Osserveremo la possibilità di distinguere

$$\pm \frac{3 \cdot \sqrt{-23}}{y} \cdot dx$$

fra tutti gli infinitesimali semplici integri del corpo K, essendo questi due infinitesimali gli unici elementi di $I_1(K)$ atti a formare una $I(k)$-base dell'integrità $I_1(K)$.

398. Per poter formulare brevemente il lemma di cui ci siamo serviti nella dimostrazione precedente (ved. 397 III fine), introduciamo la nozione « estensione perfetta » di un sistema V di prospettive di un medesimo corpo K, con quale termine intenderemo la totalità degli aspetti perfetti di K che estendono un aspetto appartenente al sistema V.

Se due sistemi V, V_0 di prospettive di un medesimo corpo stanno nella relazione $V \rightharpoonup V_0$, (definita in **264**), *allora coincidono le loro estensioni perfette.*

DIMOSTRAZIONE. - Siccome ogni S perfetto con $(S) = K$ che estende un $s \in V$, estende anche un aspetto appartenente a V_0, e cioè l'aspetto s_0 esteso da s (ved. **250** I), l'estensione perfetta di V è contenuta nell'estensione perfetta di V_0.

Sia S elemento qualunque dell'estensione perfetta di V_0, essendo per es. $S \rightharpoonup s_0 \in V_0$. Vale allora un diagramma

$$\begin{array}{ccc} & S = S' \in V([S,\, s]) & \\ \swarrow & & \searrow \\ S & & s \in V \\ \searrow & & \swarrow \\ & s_0 \in V_0 & \end{array}$$

da interpretare con le stesse conclusioni già usate nella dimostrazione **396**. Questo diagramma mostra che il dato aspetto perfetto S appartiene anche all'estensione perfetta di V, estendendo esso l'aspetto $s \in V$.

§ 5. Rango e classe di un'integrità.

399. Se V è varietà aritmetica di un corpo K, la totalità V' degli aspetti $s \in V$ contenenti il corpo primo (1) (e quindi nel caso di V' regolare la 0-esima integrità $k = I_0\left(\frac{K}{(1)}\right)$ di K sopra (1), ved. **83** e **237**) è varietà, essendo essa la sintesi ((1), V) di V con la varietà (1) costituita dal solo aspetto totale del corpo (1) (ved. **117**).

Se una varietà V aritmetica e chiusa di un corpo K di caratteristica 0 *è siffatta, che la* ((1), V) *è senza singolarità, allora esiste un numero intero* *razionale* $c > 0$ *tale che*

$$\bigcap_{s \in V} s \cdot ds^n \subset I_n(K) \subset c^{-1} \cdot \bigcap_{s \in V} s \cdot ds^n .$$

DIMOSTRAZIONE. - I. Sia $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot dx_j = 0$ $(a_{ij} \in s)$ $(i = 1, 2, ...)$ sistema base per le equazioni differenziali di $s \in V([1, x_1, ..., x_m])$, $s \in V$. Allora ogni determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & & a_{i_1 j_{m-r}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_{m-r} j_1} & & a_{i_{m-r} j_{m-r}} \end{vmatrix}$$

di ordine m-r formato dalla matrice (a_{ij}) dà luogo a un sistema di equazioni $\Delta \cdot dx_l = \sum_h c_{lh} \cdot dx_h$ $(c_{lh} \in s)$ esprimenti (se $\Delta \neq 0$) i differenziali dx_l con $l = j_1, ..., j_{m-r}$ mediante gli r rimanenti. Se quindi r designa la dimensione di K, si può concludere col teorema **388**, che

$$(*) \qquad \Delta^n \cdot I_n(K) \subset s \cdot ds^n .$$

Sia ora b un elemento qualunque dell'ideale $\mathfrak{d}_r(s) = \sum_{i=1}^{N} s \cdot \Delta_i$ generato dalla totalità Δ_i $(i = 1, 2, ..., N)$ dei determinanti di ordine m-r della matrice (a_{ij}). Siccome $b = \sum_{i=1}^{N} b_i \cdot \Delta_i$ con $b_i \in s$, ci sarà una relazione $b^{N \cdot n} = \sum_{i=1}^{N} c_i \cdot \Delta_i^n$ $(c_i \in s)$, dalla quale segue, tenuto conto di (*),

$$b^{N \cdot n} \cdot I_n(K) \subset s \cdot ds^n .$$

II. L'ipotesi che ((1), V) sia senza singolarità, induce $\mathfrak{d}_r(S) = S$ per ogni $S \supset (1)$ in V (ved. **304**).

Sia $\mathfrak{d}_r(s) \neq s$ e quindi car $s/\mathfrak{p} = p \neq 0$. Siccome ogni aspetto $S \in V(s)$, l'origine del quale non contiene p, comprende il corpo primo (1), si ha $\mathfrak{d}_r(s) \cdot S = \mathfrak{d}_r(S) = S$ (ved. **284**) epperò (ved. **334**) $S = \mathfrak{d}_r(s) \cdot S = \bigcap_{i=1,...,h} \mathfrak{q}_i \cdot S$, cioè $\mathfrak{q}_i \cdot S = S$, se $\mathfrak{d}_r(s) = \bigcap_i \mathfrak{q}_i$ è decomposizione noetheriana di $\mathfrak{d}_r(s)$. Ora certo sarà $\mathfrak{q}_i \cdot S_i \neq S_i$, se $\mathfrak{q}_i$ è $[\mathfrak{P}_i \cap s]$-primario (ved. **175**). Ne segue $p \subset \mathfrak{P}_i$ $(i = 1, ..., h)$ e finalmente $p^L \subset \bigcap_i \mathfrak{q}_i = \mathfrak{d}_r(s)$ per L abbastanza grande.

III. La r-esima differente $\mathfrak{d}_r V$ della varietà V è figura finita (ved. **337**), poichè la V è unione finita di varietà $V(A_i)$ aventi basi aritmetiche A_i e il differente $\mathfrak{d}_r(s)$ può essere generato dal differente $\mathfrak{d}_r\left(\frac{A}{[1]}\right)$ (ved. **15**), se $s \in V(A)$. Sia pertanto $\mathfrak{d}_r V = \bigcap_{i=1,...,t} \mathfrak{Q}_i$, dove $\mathfrak{Q}_i$ è figura $\mathfrak{P}_i$-primaria. Per ogni tale $\mathfrak{P}_i$

è car $S_i/\mathfrak{P}_i = p_i \neq 0$, una potenza $p_i^{n_i}$ di questa caratteristica essendo contenuta in $\mathfrak{d}_r(S_i)$ (ved. II). Dalla relazione (ved. **177**)

$$\mathfrak{d}_r(s) = \cap\, \mathfrak{Q}_i(s) = \cap\, \mathfrak{Q}_i(S_i) \frown s \supset \cap\, \mathfrak{d}_r(S_i) \frown s,$$

valida per ogni $s \in V$, segue allora $q = \prod_i p_i^{n_i} \subset \mathfrak{d}_r(s)$ e quindi (ved. I) $q^{N \cdot n} \cdot I_n(K) \subset \subset s \cdot ds^n$, dove N può essere scelto indipendentemente da s, prendendolo uguale al massimo fra i numeri N_i $(i = 1, \ldots)$ dei determinanti base negli ideali $\mathfrak{d}_r\left(\frac{A_i}{[1]}\right)$.

Il numero $q^{N \cdot n} = c$ è quello di cui volevamo dimostrare l'esistenza.

Valgono le stesse conclusioni anche nel caso delle integrità differenziali, purchè si sostituisca dappertutto $s \cdot ds^n + \mathfrak{d}$ al modulo $s \cdot ds^n$.

400. ***L'integrità assoluta di un corpo aritmetico K di caratteristica*** 0 ***e la sua integrità relativa al corpo primo stanno nelle relazioni***

$$I_n\left(\frac{K}{(1)}\right) = (1) \cdot I_n(K), \qquad D_n\left(\frac{K}{(1)}\right) = (1) \cdot D\ (K).$$

DIMOSTRAZIONE. - Appoggiandoci su una classica ipotesi, supponiamo trovata una varietà aritmetica chiusa $V = \cup\, V(A_l)$ di K siffatta, che la sua sintesi $(V, (1))$ (ved. **399**) con il corpo primo sia senza singolarità.

I. Siano ξ un elemento qualunque di $I_n(K)$ e $A = [1, x_1, \ldots, x_m]$ una delle basi A_l. Se $f_i(x_1, \ldots, x_m) = 0$ $(i = 1, \ldots)$ con $f_i(X_1, \ldots, X_m) \in [1][X_1, \ldots, X_m]$ sono le equazioni definenti K, allora le relazioni

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \cdot dx_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots)$$

costituiscono un sistema base per le equazioni differenziali dell'anello A e perciò anche per le equazioni differenziali di un qualsiasi $s \in V(A)$.

Ogni determinante Δ di ordine $m - r$ $(r = \dim K)$ formato dalla matrice $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ fornisce dopo l'applicazione del lemma **388** una equazione del tipo

$$(*) \qquad \Delta^n \cdot \xi = \sum_{j_1 \ldots j_n} a_{j_1 \ldots j_n} \cdot dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_n},$$

ove gli indici del membro destro percorrono gli r valori che non si trovano fra gli indici delle $m - r$ colonne in $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$, dalle quali è tolto il determinante Δ.

Se $\Delta = 0$, si prenderanno $a_{j_1 \ldots j_n} = 0$. Se però $\Delta \neq 0$, gli r differenziali dx_j che intervengono nel membro destro di $(*)$ saranno linearmente indipendenti e secondo **388** si verifica $\mathfrak{a}_{j_1 \dots j_n} \subset s$ per ogni $s \in V(A)$ che contiene il corpo primo. Ne segue (ved. **336**)

$$\mathfrak{a}_{j_1 \dots j_k} \subset \bigcap_{s \in V([A, (1)])} s = [A, (1)] = [(1), x_1, \dots, x_m].$$

Esiste quindi un numero naturale a tale, che

$$(**) \qquad a \cdot \Delta^n \cdot \xi \subset \left(\sum_{j=1}^{m} A \cdot dx_j\right)^n \subset A \cdot dA^n.$$

Del resto possiamo scegliere a in modo tale che la relazione suddetta valga con lo stesso a per ognuno degli N determinanti Δ che costituiscono una base dell'ideale $\mathfrak{d}_r\left(\frac{A}{[1]}\right)$.

II. Siano Δ_i $(i = 1, \dots, N)$ questi determinanti base. Siccome per ogni $s \in V([A, (1)])$ vale $\mathfrak{d}_r(s) = \mathfrak{d}_r\left(\frac{A}{[1]}\right) \cdot s = \sum_{i=1}^{N} \Delta_i \cdot s$, sarà

$$({}^{*}_{**}) \qquad \sum_{i=1}^{N} \Delta_i \cdot [A, (1)] = [A, (1)] \supset 1.$$

Invero, altrimenti ci sarebbe un ideale primo $\neq [A, (1)]$ in $[A, (1)]$, il quale conterrebbe il membro sinistro di $({}^{*}_{**})$ e individuerebbe pertanto (ved. **72**) una prospettiva $\mathfrak{p} \in V([A, (1)])$ con $\mathfrak{d}_r(s) \subset \mathfrak{p}$.

Da $({}^{*}_{**})$ segue l'esistenza di un numero naturale b contenuto in $\sum_{i=1}^{N} \Delta_i \cdot A$. Essendo allora $b^{N \cdot n} \subset \sum_i \Delta_i^n \cdot A$, si potrà dedurre da $(**)$ una relazione $c \cdot \xi \subset \subset A \cdot dA^n$ con $c = a \cdot b^{N \cdot n}$.

Determinati i numeri naturali c_i nel modo or ora descritto per ciascuna delle varietà parziali $V(A_i)$ della V, sarà

$$(\prod_i c_i) \cdot \xi \subset \bigcap_i A_i \cdot dA_i^n \subset \bigcap_{s \in V} s \cdot ds^n \subset I_n(K) \qquad \text{(ved. } \mathbf{384}\text{)}.$$

III. Avendo dimostrato con ciò che *ogni infinitesimale integro sopra il corpo primo diventa assolutamente integro dopo la moltiplicazione con un appropriato numero naturale*, possiamo concludere dall'esistenza di una base finita del (1)-modulo $I_n\left(\frac{K}{(1)}\right)$ (ved. **377**) che $I_n\left(\frac{K}{(1)}\right) \subset (1) \cdot I_n(K)$, mentre l'inverso è ovvio.

L'altra parte del teorema, la quale si riferisce alle integrità differenziali, si dimostra seguendo le stesse linee concettuali oppure come immediata conseguenza delle relazioni $n! \cdot D_n\left(\frac{K}{(1)}\right) \subset I_n\left(\frac{K}{(1)}\right) + \mathfrak{d}/\mathfrak{d} \subset D_n\left(\frac{K}{(1)}\right)$, $I_n(K) + \mathfrak{d}/\mathfrak{d} \subset \subset D_n(K)$ dimostrate in **358**.

401. La 0–esima integrità $I_0(K)$ di un corpo aritmetico K è l'integrità totale $I(k)$ del corpo $k = I_0\left(\frac{K}{(1)}\right) = (1) \cdot I_0(K)$, cioè del massimo corpo 0–dimensionale contenuto in K.

Il fatto, che ognuna delle integrità $I_n(K)$, $D_n(K)$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ è $I(k)$-modulo, dirige l'attenzione verso gli importanti risultati ottenuti da STEINITZ in questo campo.

402. *Dati degli elementi $a_i \in s_i$ qualunque negli aspetti perfetti $s_1, \ldots, s_h$ di un corpo aritmetico k di dimensione 0, le congruenze*

$$(*) \qquad x \equiv a_i \mod \mathfrak{p}_i^n \qquad (i = 1, \ldots, h)$$

ammettono una soluzione integra, cioè contenuta in $I(k)$.

DIMOSTRAZIONE. – Siano $\mathfrak{p}_i^0$ le prospettive del corpo primo (1), definite da $\mathfrak{p}_i^0 \leftarrow \mathfrak{p}_i$, e designino p_i i numeri primi corrispondenti.

Estendendo il sistema delle congruenze $(*)$ con l'aggiunzione di ulteriori congruenze, qualora $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_h$ non sia già estensione perfetta del sistema $\mathfrak{p}_i^0$ $(i=1,\ldots,h)$ (ved. **398**), si raggiunge che x diventa integro sopra s_i^0 $(i=1,\ldots,h)$ (ved. **329**). Se tutti gli aspetti di (1), sopra i quali x non è integro, sono caratterizzati dai numeri primi p_j $(j > h)$, siamo sicuri che $p_i \neq p_j$ per $i \leq h < j$. Possiamo quindi scegliere un numero naturale c soddisfacente alle congruenze $c \equiv 1 \mod p_i^n$, $(i \leq h)$, $c \equiv 0 \mod p_j^N$ $(j > h)$, le quali per N abbastanza grande garantiscono $xc \subset s$ per ogni $s \in V(I(k))$, cioè $xc \subset I(k)$ (ved. **346**), mentre $xc \equiv x \mod \mathfrak{p}_i^n$ $(i \leq h)$ mostra che si può sostituire xc a x nella soluzione del problema.

403. *Data una matrice (a_{ij}) $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$ di rango ≥ 2 e costituita da elementi a_{ij} integri in un corpo aritmetico k di dimensione 0, si troveranno sempre elementi $x_i \in I(k)$ $(i = 1, \ldots, n)$ appartenenti a un dato ideale $\mathfrak{u} \subset I(k)$ e soddisfacenti alla condizione*

$$\sum_i \left(\sum_j a_{ij} \cdot x_j\right) \cdot I(k) = \sum_{i,j} a_{ij} \cdot \mathfrak{u}$$

(Teorema di STEINITZ).

DIMOSTRAZIONE. – 1. Sia $\mathfrak{p} \in V(I(k))$ qualunque e $\mathfrak{u} \cdot s = \mathfrak{p}^f$, $\sum_{i,j} a_{ij} \cdot s = \mathfrak{p}^e$ sicchè uno degli a_{ij}, sia a_{11}, non appartiene a $\mathfrak{p}^{e+1}$. Scelti $z_i \in I(k)$ $(i=1,\ldots,n)$ in modo tale che $z_1 \subset \mathfrak{p}^f$, $\not\subset \mathfrak{p}^{f+1}$, $z_i \subset \mathfrak{p}^{f+1}$ $(i \neq 1)$, sarà

$$\sum_j a_{ij} \cdot z_j \subset \mathfrak{p}^{e+f} \ (i = 1, \ldots, m), \ \sum_j a_{1j} \cdot z_j \not\subset \mathfrak{p}^{e+f+1}$$

e quindi

$$\sum_i \left(\sum_j a_{ij} \cdot z_j\right) \cdot s = \mathfrak{p}^{e+f} = \mathfrak{u} \cdot \left(\sum_{i,j} a_{ij} \cdot s\right).$$

La validità di questa relazione permane, facendo variare $z_1, \dots, z_n \bmod \mathfrak{p}^{f+1}$.

II. Dato un insieme finito $\mathfrak{p}_l$ $(l = 1, \dots, N)$ di prospettive $\mathfrak{p} \in V(I(k))$, siano $z_1^{(l)}, \dots, z_n^{(l)}$ degli elementi di $I(k)$, che riguardo a $\mathfrak{p}_l$ fanno la parte fatta da $z_1, \dots, z_n$ riguardo alla $\mathfrak{p}$ considerata in I. Secondo **402** esistono $y_1, \dots, y_n \in I(k)$ soddisfacenti alle congruenze $y_i \equiv z_i^{(l)} \bmod \mathfrak{p}_l^{f_l+1}$, $(i \leq n,\ l \leq N)$, le quali garantiscono

$$\sum_i \left(\sum_j a_{ij} \cdot y_j\right) \cdot s = \mathfrak{u} \cdot \left(\sum_{i,j} a_{ij} \cdot s\right) \quad \text{per ogni} \quad s = s_l \ (l \leq N).$$

III. L'ipotesi sul rango di (a_{ij}) permette di presupporre per es. $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = d \neq 0$. Siccome gli elementi y_i non sono determinati che modulo l'ideale $\left(\prod_{l \leq N} \mathfrak{p}_l^{f_l+1}\right) \frown I(k) = \mathfrak{v}$, è lecito di supporre $\Sigma\, a_{2j} \cdot y_j \neq 0$. Scelto il sistema $\mathfrak{p}_l$ $(l \leq N)$ così completo, che esso comprenda tutte le $\mathfrak{p} \in V(I(k))$ soddisfacenti a una o più delle relazioni $a_{ij} \subset \mathfrak{p}$, $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{p}$, $d \subset \mathfrak{p}$, designiamo con $\mathfrak{p}_l$ $(l > N)$ l'insieme finito, vuoto o no, delle $\mathfrak{p} \in V(I(k))$ con la proprietà $\sum_j a_{2j} \cdot y_j \subset \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_l$ $(l \leq N)$.

Determinati gli integri v, w mediante le equazioni $a_{11} \cdot v + a_{12} \cdot w = d$, $a_{21} \cdot v + a_{22} \cdot w = 0$, e scelto $u \in I(k)$ sotto le condizioni $u \subset \mathfrak{p}_l^{f_l+1}$ $(l \leq N)$, $u \not\subset \mathfrak{p}_l$ $(l > N)$, sarà $x_1 = y_1 + u \cdot v \cdot c \equiv y_1$, $x_2 = y_2 + u \cdot w \cdot c \equiv y_2 \bmod \mathfrak{v}$, qualora c sia integro, e ponendo $x_i = y_i$ per $i > 2$, diventerà

$$\sum_j a_{1j} \cdot x_j = \sum_j a_{1j} \cdot y_j + c \cdot u \cdot d \equiv 1 \bmod \mathfrak{p}_l \ (l > N)$$

purchè soddisfi c a queste congruenze, risolubili secondo **402**, perchè $(u \cdot d)^{-1} \subset s_l$ $(l > N)$ di seguito alla premessa sul sistema $\mathfrak{p}_l$ $(l \leq N)$. Queste congruenze garantiscono $\Sigma\, a_{1j} \cdot x_j \not\subset \mathfrak{p}_l$ $(l > N)$ e pertanto

$$\left(\sum_j a_{1j} \cdot x_j\right) \cdot s + \left(\sum_j a_{2j} \cdot x_j\right) \cdot s = s$$

per ogni $\mathfrak{p} \in V(I(k))$ diverso dalle $\mathfrak{p}_l$ con $l \leq N$. Invero, $\sum_j a_{2j} \cdot x_j = \sum_j a_{2j} \cdot y_j \subset \mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_l$ $(l = 1, \dots, N)$ induce che $\mathfrak{p}$ coincide con una delle $\mathfrak{p}_l$ con $l > N$.

Valendo anche $\mathfrak{u} \cdot \left(\sum_{i,j} a_{ij} \cdot s\right) = s$ per ogni s diverso dagli $s_1, \dots, s_N$, avremo (ved. II) $\sum_i \left(\sum_j a_{ij} \cdot x_j\right) \cdot s = \left(\sum_{i,j} a_{ij} \cdot \mathfrak{u}\right) \cdot s$ per ogni $s \in V(I(k))$, il che secondo **336** equivale a quel che volevasi dimostrare.

404. Se M designa una matrice in $I(k)$, cioè con elementi appartenenti all'anello $I(k)$, denoteremo con $\mathfrak{d}(M)$ l'ideale generato in $I(k)$ dai determinanti di ordine uguale al numero delle righe di M, presi da M.

Dimostreremo che nel caso che questo ordine m non superi $n-2$, n essendo il numero delle colonne di M, si può aggiungere a M una riga ulteriore $z_1, \dots, z_n$ costituita da elementi z_j di un dato ideale $\mathfrak{u}$ in $I(k)$ e in maniera tale che per la nuova matrice M' risulti $\mathfrak{d}(M') = \mathfrak{d}(M) \cdot \mathfrak{u}$ (STEINITZ).

Si considerino i determinanti di ordine $m+1$ di M' come forme lineari in $z_1, \dots, z_n$ a coefficienti integri. Fra queste forme si trovano, quando $\mathfrak{d}(M) \neq 0$, almeno due linearmente indipendenti. Infatti, se per es. il determinante Δ formato dalle m prime righe e colonne è diverso da 0, si avranno determinanti dei tipi $\in \Delta \cdot z_{r+1} + \sum_{j=1}^{r} I(k) \cdot z_j$, $\in \Delta \cdot z_{r+2} + \sum_{j=1}^{r} I(k) \cdot z_j$. Questo fatto permette di applicare il teorema precedente al sistema di tutte le forme ottenute come determinanti di ordine $m+1$ di M', il che subito verifica l'affermazione suddetta.

405. *Se gli integri $x_1, \dots, x_m$ generano l'ideale $\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot I(k) = I(k)$, allora esiste una matrice quadrata (x_{ij}) in $I(k)$ con $x_{1j} = x_j$, $|x_{ij}| = 1$.*

DIMOSTRAZIONE. - Secondo l'osservazione precedente si può costruire, con la successiva aggiunzione di nuove righe, una matrice $(x_{ij}) = M$ $(i \leq m-1, j \leq m)$ avente le proprietà $x_{ij} \in I(k)$, $x_{1j} = x_j$, $\mathfrak{d}(M) = I(k)$. Il determinante della matrice ottenuta da M con l'aggiunzione di una m-esima riga $z_1, \dots, z_m$ è una forma lineare $\sum_{j=1}^{m} c_j \cdot z_j$ con la proprietà $\sum_{j=1}^{m} c_j \cdot I(k) = I(k)$, la quale rende ovvia l'esistenza di valori $z_j = x_{mj} \in I(k)$ soddisfacenti alla condizione $\sum_{j=1}^{m} c_j \cdot x_{mj} = 1$.

406. Sia $\mathfrak{M} = \sum_{j=1}^{m} I(k) \cdot \omega_j$ un qualunque $I(k)$-modulo a base finita, e supponiamo che le relazioni

$$(*) \qquad \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot \omega_j = 0 \qquad (i = 1, \dots, n) \quad (a_{ij} \in I(k))$$

siano base per tutte le relazioni valide in $\mathfrak{M}$ (ved. 98).

L'ideale $\mathfrak{d}_\nu(\mathfrak{M})$, generato in $I(k)$ dai determinanti di ordine $m - \nu$ della matrice (a_{ij}), se $\nu < m$, e uguale a $I(k)$, se $\nu \geq m$, non dipende allora nè dalla scelta della base $\omega_1, \dots, \omega_m$, nè dalla scelta delle relazioni base $(*)$. È questo un importante teorema di FITTING dimostrato implicitamente in 14. Definiamo ormai, contrario a quel che fa FITTING, il *rango* del modulo $\mathfrak{M}$ come l'indice del primo ideale nella sequenza

$$(**) \qquad \mathfrak{d}_0(\mathfrak{M}) \subset \mathfrak{d}_1(\mathfrak{M}) \subset \mathfrak{d}_2(\mathfrak{M}) \subset \dots$$

che sia $\neq 0$.

In riguardo all'applicazione al caso delle integrità è importante la *premessa, che in* $\mathfrak{M}$ *segua da* $c \cdot \omega = 0$, $c \neq 0$, $\in I(k)$, *sempre* $\omega = 0$. *Sotto questa premessa* dimostreremo, che $\mathfrak{M}$ *ammette una base costituita da* $r+1$ *elementi, r essendo il rango di* $\mathfrak{M}$.

Se tutti gli a_{ij} sono 0, il teorema è evidente conseguenza di $r = m$. Se però l'ideale $\sum\limits_{i,j} a_{ij} \cdot I(k)$ è diverso da 0, esso è $I(k)$, poichè, data una qualunque prospettiva di base $I(k)$, si può sempre indicare una relazione $\Sigma\, b_j \cdot \omega_j = 0$, per la quale $\sum\limits_{j} b_j \cdot I(k) \not\sqsubset \mathfrak{p}$.

Sia infatti $\Sigma\, a_j \cdot \omega_j = 0$ una relazione, nella quale per es. $a_1 \neq 0$ abbia in $\mathfrak{p}$ un ordine non maggiore di quello degli altri coefficienti a_j sicchè vale $\frac{a_j}{a_1} \subset s$ $(j = 1, \dots, m)$. Determiniamo allora $c \in I(k)$ risolvendo secondo **402** le congruenze simultanee $c \equiv 1 \bmod \mathfrak{p}$, $c \equiv a_1 \bmod a_1 \cdot s'$ per ogni altro $\mathfrak{p}' \in V(I(k))$, le quali in realtà si riducono a un sistema finito di congruenze e garantiscono $\frac{c \cdot a_j}{a_1} \in I(k)$. La premessa suddetta permette allora di dedurre da $a_1 \cdot \sum\limits_{j} \frac{c \cdot a_j}{a_1} \cdot \omega_j = 0$ la relazione $\sum\limits_{j} \frac{c \cdot a_j}{a_1} \cdot \omega_j = 0$, nella quale il coefficiente di ω_1 è $c \not\sqsubset \mathfrak{p}$.

Avendo dimostrato che $\sum\limits_{i,j} a_{ij} \cdot I(k) = I(k)$, applicheremo il teorema **403** alle forme lineari $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot a_{ij}$ $(j = 1, \dots, m)$.

Dall'ipotesi, che il rango del modulo $\mathfrak{M}$ sia r, segue che il rango della matrice (a_{ij}) è $m - r$. Se quindi $m \geq r + 2$, possiamo determinare secondo **403** gli elementi $x_i \in I(k)$ in modo tale, che $\sum\limits_{j} (\sum\limits_{i} x_i \cdot a_{ij}) \cdot I(k) = I(k)$ e quindi vale una relazione $\Sigma\, a_j \cdot \omega_j = 0$, i cui coefficienti $a_j = \sum\limits_{i} x_i \cdot a_{ij}$ sono atti (ved. **405**) a formare la prima riga di una matrice quadrata (c_{ij}) in $I(k)$ con determinante 1. Sostituendo ormai alla base $\omega_1, \dots, \omega_m$ di $\mathfrak{M}$ la nuova $\Omega_i = \sum\limits_{j} c_{ij} \cdot \omega_j$ $(i = 1, \dots, m)$, otteniamo che vale una relazione $\Omega_1 = 0$, che mostra Ω_1 essere superfluo nella base di $\mathfrak{M}$.

Tale riduzione della base di $\mathfrak{M}$ può continuarsi finchè si trovi una base costituita da $r + 1$ o meno elementi.

407. Sia $\mathfrak{M} = \sum\limits_{j=1}^{m} I(k) \cdot \omega_j$ un qualunque $I(k)$-modulo a base finita e di rango r. Ogni sistema di $m - r$ relazioni

$$(*) \qquad \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot \omega_j = 0, \quad (i = 1, \dots, m - r)$$

valido in $\mathfrak{M}$ determina un ideale $\mathfrak{a}$ in $I(k)$ generato da tutti i determinanti di ordine $m - r$ della matrice (a_{ij}), uguale a $\mathfrak{a} = I(k)$, se $m = r$.

Siccome l'ipotesi sul rango di $\mathfrak{M}$ procura, che nel caso di $\mathfrak{a} \neq 0$ ogni riga $a_1, \ldots, a_m$ corrispondente a una relazione $\sum_j a_j \cdot \omega_j = 0$ diventa combinazione lineare delle righe $a_{i1}, \ldots, a_{im}$ $(i = 1, \ldots, m - r)$ con coefficienti $\in k$, è certo, che la classe degli ideali $\mathfrak{a}$ diversi da 0 non dipende dalla scelta del sistema (*). Chiameremola *la classe del modulo* $\mathfrak{M}$, anticipando con ciò una altra sua proprietà d'invarianza che subito dimostreremo.

Aggiungendo alla base $\omega_1, \ldots, \omega_m$ un qualunque elemento ω_{m+1} di $\mathfrak{M}$, potremo, volendo calcolare la classe di $\mathfrak{M}$ mediante la nuova base $\omega_1, \ldots, \omega_{m+1}$ di $\mathfrak{M}$, prendere il sistema ottenuto dall'aggiunzione di una relazione $\sum_{j=1}^{m} b_j \cdot \omega_j + \omega_{m+1} = 0$ al sistema (*). Ovviamente risulta allora lo stesso ideale $\mathfrak{a}$ come prima. Basta ripetere ormai il ragionamento **14** III, per riconoscere la indipendenza della classe di $\mathfrak{M}$ anche dalla scelta della base del modulo.

408. Se un $I(k)$-modulo $\mathfrak{M}$ di rango r ha una base costituita da r elementi, la sua classe è principale. Supponendo, viceversa, che la classe di un $I(k)$-modulo $\mathfrak{M}$ di rango r sia principale, potremo trovare una base di $\mathfrak{M}$ costituita da r elementi, purchè il modulo soddisfi alla premessa enunciata in **406**.

Ad ogni modo esiste una base di $\mathfrak{M}$, che consiste di $r+1$ elementi, sia ω_i $(i = 1, \ldots, r+1)$. In ogni relazione $\sum_{j=1}^{r+1} a_j \cdot \omega_j = 0$ sarà $\sum_{j=1}^{r+1} a_j \cdot I(k)$, se non è 0, ideale principale $= a \cdot I(k)$. Vale allora anche la relazione ottenuta da questa con la divisione per a, e siccome $\sum_{j=1}^{r+1} \frac{a_j}{a} \cdot I(k) = I(k)$, sarà lecito di prendere $\sum_{j=1}^{r+1} \frac{a_j}{a} \cdot \omega_j$ come primo elemento Ω_1 di una nuova base Ω_i $(i = 1, \ldots, r+1)$ di $\mathfrak{M}$ (ved. **405**), nella quale Ω_1 è superfluo.

409. *L'integrità assoluta di un corpo aritmetico K di caratteristica* 0 *e la sua integrità relativa al massimo corpo* 0*-dimensionale k in K stanno nelle relazioni*

$$I\left(\frac{K}{k}\right) = k \cdot I(K), \quad D\left(\frac{K}{k}\right) = k \cdot D(K).$$

DIMOSTRAZIONE. - Se un aspetto perfetto S di K contiene il corpo primo (1), esso contiene anche il corpo k, perchè $S \frown k$ è aspetto di k (ved. **328**) contenente (1) e quindi k (ved. **126**)

Soddisfacendo ogni $x \in k$ a un'equazione $f(x) = 0$ irriducibile in $(1)[X]$ il suo differenziale assoluto dx sarà $= 0$ di seguito a $f'(x) \cdot dx = 0$, il che mostra l'identità della differenziazione assoluta di K con quella relativa a k.

Questi due fatti inducono $I\left(\frac{K}{k}\right) = I\left(\frac{K}{(1)}\right)$, $D\left(\frac{K}{k}\right) = D\left(\frac{K}{(1)}\right)$ (ved. **348** e **357**). Basta ormai di tener conto del risultato **400**, per verificare subito le relazioni suddette.

410. Siccome si considerano le integrità $I_n(K)$, $D_n(K)$ come sotto-moduli di $K \cdot dK^n$, risp. $K \cdot dK^n + \mathfrak{d}/\mathfrak{d}$, esse soddisfano alla premessa di **406**. Avendo esse anche $I(k)$-base finita (ved. **378**), potremo applicare a loro, e del resto altresì a ogni loro sotto-modulo (ved. **98**) caratterizzato da un tipo di simmetria (**350**), i risultati ottenuti in **406** — **408**.

Rileviamo anzitutto l'importanza dei ranghi di questi moduli, i quali di seguito all'osservazione **409** coincidono coi k-ranghi delle integrità $I_n\left(\frac{K}{k}\right)$, $D_n\left(\frac{K}{k}\right)$, risp. dei loro sotto-$k$-moduli di dato tipo di simmetria.

Definiamo il *genere n-dimensionale* di K quale k-rango dell'integrità differenziale $D_n\left(\frac{K}{k}\right)$, distinguendo fra questi generi come *genere geometrico* o semplicemente *genere* di K quello di massima dimensione $n = r = \dim K$. Questi generi coincidono (ved. **358**) coi k-ranghi dei sotto-moduli $D_n^1\left(\frac{K}{k}\right)$ di $I_n\left(\frac{K}{k}\right)$ costituiti con tutti gli infinitesimali $\in I_n\left(\frac{K}{k}\right)$ antisimmetrici (ved. **350**).

Altri caratteri importantissimi di K si ottengono dalla considerazione dei sotto-moduli $D_n^m(K)$ di $I_{mn}(K)$, oppure $D_n^m\left(\frac{K}{k}\right)$ di $I_{mn}\left(\frac{K}{k}\right)$, caratterizzati dal seguente tipo di simmetria (ved. **350**) dei loro infinitesimali: Antisimmetria rispetto a ognuno degli m sistemi di indici $hn+1, hn+2, \ldots, hn+n$ $(h = 0, 1, \ldots, m-1)$, e simmetria riguardo alle permutazioni che scambiano questi sistemi senza perturbare la successione dei loro termini. Si tratta in sostanza degli infinitesimali che mediante una base indipendente di $K \cdot dK = \sum_{i=1}^{r} K \cdot dx_i$ si esprimono come polinomi omogenei di grado m negli $\binom{r}{n}$ argomenti $d(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ $(i_1 < \ldots < i_n)$ (ved. **358**). Il rango di $D_n^m(K)$, cioè il k-rango del modulo $D_n^m\left(\frac{K}{k}\right)$, sarà detto *l'm-genere n-dimensionale di K*. Come nel caso di $m = 1$, che fornisce i generi delle diverse dimensioni, distingueremo l'm-genere di massima dimensione r col nome «m-genere geometrico» o col più semplice «*m-genere*» di K. Per $n = \dim K$ si tratta diffatti dei *plurigeneri* scoperti da Castelnuovo e Enriques. Aggiungendo a questi classici plurigeneri quelli di dimensione $n < \dim K$, diamo alla nozione «plurigenere» una estensione indispensabile, come si potrebbe mostrare con esempi.

411. Lasciando da parte la questione, quali altri tipi di simmetria meritino essere segnalati a causa della loro indispensabilità nella classificazione delle strutture di corpi, osserviamo finalmente, che ognuna delle integrità $I_n(K)$, $D_n(K)$, $D_n^m(K)$ individua (ved. **407**), in quanto $I(k)$-modulo, una classe di ideali (o divisori) in k, che sarà detta *la classe dell'integrità*. Per es la classe dell'integrità $I_1(K)$ del corpo $K = (x, y)$ definito da $y^2 - x^3 - \sqrt{-23} = 0$ (ved. **397** V) è principale, benchè in $k = (\sqrt{-23})$ ci siano 3 classi di divisori.

La non-esistenza di elementi di ordine finito nel gruppo additivo dato da un'integrità, rende ovvio, che ognuna di quelle integrità ammette una base assoluta (cioè [1]-base) costituita con tanti elementi indipendenti, quanti indica il corrispondente rango moltiplicato col grado di k, che del resto abbiamo uguagliato al grado di K (ved. **142**). Quanto al numero minimo degli elementi di una $I(k)$-base di un'integrità, possiamo affermare secondo **406** e **408**, che esso è uguale al corrispondente genere o lo supera con 1, secondo che la classe dell'integrità sia principale o no.

Concludiamo queste considerazioni con l'osservazione, che la definizione dei generi e plurigeneri si estende in modo evidente al caso che K sia considerato relativamente a un suo sotto-corpo k.

§ 6. Le integrità relative a un divisore.

412. Dato un divisore $\mathfrak{a}$ (sopra k) di un corpo K (sopra k), definiamo *l'integrità infinitesimale di K* (sopra k) *relativa al divisore* $\mathfrak{a}$

$$I\left(\frac{K}{\mathfrak{a}}\right) = \bigcap_S \mathfrak{a}^{-1}(S) \cdot [S,\ dS] \qquad \begin{array}{r}(S \text{ percorre tutti gli} \\ \text{aspetti perfetti di } K)\end{array}$$

risp.

$$I\left(\frac{K}{k\,|\,\mathfrak{a}}\right) = \bigcap_{S \supset k} \mathfrak{a}^{-1}(S) \cdot [S,\ dS] \qquad \begin{array}{r}(S \text{ percorre tutti gli aspetti} \\ \text{perfetti contenenti } k)\end{array}$$

e *l'integrità differenziale di K* (sopra k) *relativa al divisore* $\mathfrak{a}$

$$D\left(\frac{K}{\mathfrak{a}}\right) = \bigcap_S [\mathfrak{a}^{-1}(S) \cdot [S,\ dS] + \mathfrak{d}/\mathfrak{d}]$$

risp.

$$D\left(\frac{K}{k\,|\,\mathfrak{a}}\right) = \bigcap_{S \supset k} [\mathfrak{a}^{-1}(S) \cdot [S,\ dS] + \mathfrak{d}/\mathfrak{d}]$$