DIMOSTRAZIONE. - Premettendo all'uopo una estensione con un insieme finito di elementi generante K sopra k, si può assumere che $\mathfrak{p}$ sia prospettiva di K. Partendo da una base appropriata dell'ideale $\mathfrak{p} = \sum_{i=1}^{h} p_i \cdot s$, si estenda la $\mathfrak{p}$, supposta non-perfetta, a una prospettiva $\mathfrak{P}_1$ di base $\left[s, \frac{p_2}{p_1}, \dots, \frac{p_h}{p_1}\right]$ e soddisfacente alla condizione

$$1 = \dim \frac{K}{k} - \dim \frac{S_1/\mathfrak{P}_1}{k + \mathfrak{P}_1/\mathfrak{P}_1} \qquad \text{(ved. } \mathbf{219} \text{ e } \mathbf{249}\text{)}.$$

Scelti $x_i \in S_1$ tali che $\dim \frac{(k, x_1, \dots, x_n)}{k} = n = \dim \frac{K}{k}$ e

$$\dim \frac{(k + \mathfrak{P}_1/\mathfrak{P}_1,\ x_1 + \mathfrak{P}_1, \dots, x_n + \mathfrak{P}_1)}{k + \mathfrak{P}_1/\mathfrak{P}_1} = n - 1,$$

la prospettiva $\mathfrak{P}_0$ di $K_0 = (k, x_1, \dots, x_n)$, individuata da $\mathfrak{P}_1$ nell'anello $[k, x_1, \dots, x_n]$ sarà perfetta, e l'estensione di $\mathfrak{P}_1$ con l'integrità di K relativa a S_0 fornirà una estensione di $\mathfrak{p}$ del tipo desiderato, perchè

$$I\left(\frac{K}{S_0}\right) = S_0 \cdot I\left(\frac{K}{[k, x_1, \dots, x_n]}\right)$$

ha S_0-base finita secondo il teorema di F. K. SCHMIDT (ved. **108**).

§ 2. Infinitesimali integri di un corpo.

348. I risultati **346** e **347** mostrano che in generale, cioè qualora non sia $\dim K = 0$ o $\dim \frac{K}{k} = 0$, gli anelli $\cap S$ ivi considerati non bastano alla ricerca della struttura di K (relativa a k).

Estendiamo pertanto il corpo K alla sua corrispondenza infinitesimale (ved. **6**) $R = [K, d_1K, d_2K, d_3K, \dots] =$

$$K + \sum_i K \cdot d_iK + \sum_{i<j} K \cdot d_iK \cdot d_jK + \sum_{i<j<l} K \cdot d_iK \cdot d_jK \cdot d_lK + \dots$$

che subito riconosceremo essere oggetto primario con l'aspetto

$$S + \sum_i S \cdot d_iS + \sum_{i<j} S \cdot d_iS \cdot d_jS + \sum_{i<j<l} S \cdot d_iS \cdot d_jS \cdot d_lS + \dots$$

estensione di un qualsiasi aspetto S di K.

Sostituendo ormai all'intersezione $\cap S$ prima considerata la seguente:

$$\cap [S + \sum_i S \cdot d_i S + \sum_{i<j} S \cdot d_i S \cdot d_j S + \sum_{i<j<l} S \cdot d_i S \cdot d_j S \cdot d_l S + \dots] =$$

$$= \cap S + \sum_i \cap S \cdot d_i S + \sum_{i<j} \cap S \cdot d_i S \cdot d_j S + \dots ,$$

nella quale S percorre tutti gli aspetti perfetti di K (contenenti k), otteniamo in un modo unicamente determinato dal corpo K (relativo a k) i moduli

$$\cap S, \quad \cap S \cdot d_1 S, \quad \cap S \cdot d_1 S \cdot d_2 S, \quad \cap S \cdot d_1 S \cdot d_2 S \cdot d_3 S, \dots$$

che chiameremo ***le integrità di K (relative a k) infinitesimali*** di grado 0, 1, 2, 3, ecc.

Esse saranno designate con

$$I_0(K),\ I_1(K),\ I_2(K),\ I_3(K), \dots$$

o con

$$I_0\left(\frac{K}{k}\right), \quad I_1\left(\frac{K}{k}\right), \quad I_2\left(\frac{K}{k}\right), \quad I_3\left(\frac{K}{k}\right), \dots$$

secondochè si tratti di integrità assolute o relative di K.

Gli elementi di $I_n(K)$ $\left(\text{di } I_n\left(\frac{K}{k}\right)\right)$ e soltanto questi verranno distinti col nome di ***integri infinitesimali n-pli*** di K (sopra k.)

Benchè non sia necessario è nondimeno utile presupporre che nel caso relativo i simboli d_1, d_2, ecc. significhino differenziazione generica r e l a t i v a a k (ved. 14). E ciò che sempre sottintenderemo qualora si consideri K come sopra-corpo di k.

349. Il fatto che le permutazioni π degli indici 1, 2, 3, ... dei simboli di differenziazione d_1, d_2, d_3, ... inducono automorfismi dell'anello $R = [K, d_1K, d_2K, d_3K, ..]$ permette di definire il *prodotto esterno* $x \wedge y$ di elementi $x = \Sigma a \cdot d_1 b \dots d_p c \in K \cdot d_1 K \dots d_p K$, $y = \Sigma e \cdot d_1 f \dots d_q g \in K \cdot d_1 K \dots d_q K$ mediante una permutazione $\pi = \pi_{pq}$ avente l'effetto

$$\pi(1) = p + 1,\ \pi(2) = p + 2, \dots,\ \pi(q) = p + q$$

quale prodotto

$$x \cdot \pi y = \Sigma a \cdot e \cdot d_1 b \dots d_p c \cdot d_{p+1} f \dots d_{p+q} g \in K \cdot d_1 K \dots d_{p+q} K$$

calcolato in R.

Estendiamo questa moltiplicazione esterna a elementi qualunque del sotto-modulo $M = K + K \cdot d_1 K + K \cdot d_1 K \cdot d_2 K + K \cdot d_1 K \cdot d_2 K \cdot d_3 K + \dots$ di R, stabilendo che per $x = \sum_{p=0}^{m} x_p$, $y = \sum_{q=0}^{n} y_q$ con $x_p \in K \cdot d_1 K \dots d_p K$,

$y_q \in K \cdot d_1 K, \ldots, d_q K$ il prodotto esterno $x \wedge y$ si riduca nel modo

$$x \wedge y = \sum_{p,q} x_p \wedge y_q = \sum_{p,q} x_p \cdot \pi_{pq} y_q$$

a una somma di prodotti del tipo suddetto. È evidente allora, che il K-modulo M diventa così anello, in generale non-commutativo, che scriveremo

$$K + K \cdot dK + K \cdot dK \wedge dK + K \cdot dK \wedge dK \wedge dK + \ldots = [K, dK],$$

omettendo gli indici di differenziazione e tenendo conto del fatto che $a \cdot d_1 b \cdot d_2 c \ldots d_n g = a \cdot db \wedge dc \ldots \wedge dg = a \wedge db \wedge dc \ldots \wedge dg$.

Da $x \in S \cdot d_1 S \ldots d_p S$ e $y \in S \cdot d_1 S \ldots d_q S$ segue $x \wedge y = x \cdot \pi y \in S \cdot d_1 S \ldots d_{p+q} S$. Se quindi x e y sono integri, anche $x \wedge y$ sarà integro, il che si esprime con le relazioni

$$(*) \qquad I_p(K) \wedge I_q(K) \subset I_{p+q}(K), \qquad I_p\left(\frac{K}{k}\right) \wedge I_q\left(\frac{K}{k}\right) \subset I_{p+q}\left(\frac{K}{k}\right)$$

Le integrità di un corpo possono pertanto essere raccolte in un solo sotto-anello $I_0(K) + I_1(K) + I_2(K) + I_3(K) + \ldots$, risp. $I_0\left(\frac{K}{k}\right) + I_1\left(\frac{K}{k}\right) + I_2\left(\frac{K}{k}\right) + I_3\left(\frac{K}{K}\right) + \ldots$ di $[K, dK]$.

I casi particolari

$$I_0(K) \cdot I_n(K) \subset I_n(K), \quad I_0\left(\frac{K}{k}\right) \cdot I_n\left(\frac{K}{k}\right) \subset I_n\left(\frac{K}{k}\right)$$

delle relazioni $(*)$ mostrano che le singole integrità sono $I_0(K)$-moduli, risp. $I_0\left(\frac{K}{k}\right)$-moduli.

350. Le permutazioni π_i $(i = 1, 2, \ldots, n!)$, che lasciano invarianti gli indici maggiori di n, hanno l'effetto di automorfismi nel K-modulo $K \cdot d_1 K \ldots d_n K = K \cdot (dK)^n$, in ogni S-modulo $S \cdot d_1 S \ldots d_n S = S \cdot (dS)^n$ derivato da un qualsiasi aspetto S di K, e quindi anche nelle integrità $I_n(K)$ e $I_n\left(\frac{K}{k}\right)$. Ne segue p. es. che la ***simmetrisazione***

$$\sum_{i=1}^{n!} \pi_i x$$

e l'***antisimmetrisazione***

$$\sum_{i=1}^{n!} \chi(\pi_i) \cdot \pi_i x \qquad (\text{dove } \chi(\pi) = \pm 1 \text{ secondo la parità di } \pi)$$

mutano ogni integro x in un integro simmetrico, risp. antisimmetrico.

Un qualunque sistema di forme lineari $\sum_{j=1}^{n!} a_{ij}\pi_j (i = 1, 2, \ldots)$ a coefficienti interi razionali definise un *tipo di simmetria* nel modulo delle forme differenziali di grado n, se si stabilisce che l'appartenere di $x \in K \cdot (dK)^n$ a quel tipo significhi il soddisfare alle equazioni

$$\sum_{j=1}^{n!} a_{ij}\pi_j x = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Rileviamo come il più importante tipo di simmetria l'*antisimmetria* definita dalle relazioni $x - \chi(\pi_i) \cdot \pi_i x = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n!)$.

§ 3. Differenziali integri di un corpo.

351. Sia B un insieme, finito o no, di elementi del corpo $K(\supset k)$, i cui differenziali generici (sopra k) $d_1 x$ costituiscano una base linearmente indipendente di $K \cdot d_1 K = \sum_{x \in B} K \cdot d_1 x$. Vale allora anche $K \cdot d_i K = \sum_{x \in B} K \cdot d_i x$ e l'indipendenza lineare dei $d_i x$ ($x \in B$) per ogni altro indice i. e la corrispondenza infinitesimale $R = [K, d_1 K, d_2 K, \ldots]$ di K (relativa a k) sarà

$$(*) \qquad R = K + \sum_{\substack{x \in B \\ i}} K \cdot d_i x + \sum_{\substack{x, y \in B \\ i<j}} K \cdot d_i x \cdot d_j y + \sum_{\substack{x, y, z \in B \\ i<j<l}} K \cdot d_i x \cdot d_j y \cdot d_l z + \ldots$$

Considerando per ora gli elementi $d_i x$ ($i = 1, 2, 3, \ldots, x \in B$) come argomenti liberi di un anello P di polinomi a coefficienti in K, potremo dire che R risulta da P mediante un omomorfismo avente il nucleo

$$\sum_{x, y \in B} d_i x \cdot d_i y \cdot P$$

(ved. **4** e **5**) e che pertanto ogni elemento di R è uguale a una sola espressione del tipo indicato al membro destro di (*).

352. La corrispondenza d i f f e r e n z i a l e S di K (ved. **9**) si deriva da R per mezzo di un omomorfismo avente il nucleo

$$\mathfrak{n} = \sum_{x, y \in B} (d_i x \cdot d_j y + d_i y \cdot d_j x) \cdot R,$$

al quale corrisponde in P l'ideale

$$\sum_{x, y \in B} d_i x \cdot d_i y \cdot P + \sum_{x, y \in B} (d_i x \cdot d_j y + d_i y \cdot d_j x) \cdot P.$$

Calcolare in R modulo $\mathfrak{n}$, equivale a introdurre l'antisimmetria espressa dalle congruenze

$$d_i x \cdot d_j y + d_i y \cdot d_j x \equiv 0 \qquad (x, y \in B),$$