è la varietà algebrica sopra k $V = V(A) \cup V(B)$ definita in **129**. Ogni divisore finito sopra k di K ha figura base in questa varietà, e si definiscono i « *divisori primi* sopra k » quali divisori aventi come base una figura prima in V.

CAPITOLO IX

LA TOTALE INTEGRITÀ DI UN CORPO

§ 1. Elementi integri di un corpo.

346. Il problema dominante della geometria aritmetica è descrivere la struttura di un corpo — « riconoscere il corpo in sè » —, partendo dalla moltitudine dei suoi aspetti.

La via più diretta di elevarsi dall'accidentalità degli aspetti a un riconoscimento almeno parziale del corpo in sè sarebbe la formazione dell'anello $\cap S$ intersezione di tutti gli aspetti perfetti di un corpo.

Volendo determinare questa intersezione nel caso di un corpo aritmetico, premettiamo il lemma:

Ogni prospettiva aritmetica non-totale $\mathfrak{p}$ di un sotto-corpo di un corpo aritmetico K può estendersi a una prospettiva aritmetica perfetta di K.

DIMOSTRAZIONE. - Sia $K = (z_1, \ldots, z_m)$ con $z_1 = 1$, e supponiamo (ved. **90**) che $\mathfrak{p}$ ammetta estensione con $\frac{z_1}{z_i}, \frac{z_2}{z_i}, \ldots, \frac{z_m}{z_i}$. Essendo tale estensione di seguito a $K = \left(\frac{z_1}{z_i}, \frac{z_2}{z_i}, \ldots, \frac{z_m}{z_i}\right)$ prospettiva di K, sarà lecito di assumere che già $\mathfrak{p}$ sia prospettiva di K.

Sia $\mathfrak{p} = \sum_{i=1}^{h} p_i \cdot s$ con numerazione siffatta, che $\mathfrak{p}$ ammette estensione $\mathfrak{P}_1$ con $\frac{p_2}{p_1}, \ldots, \frac{p_h}{p_1}$ (ved. **90**). Siccome ogni divisore primo dell'ideale $\mathfrak{p} \cdot A$ in $A = \left[s, \frac{p_2}{p_1}, \ldots, \frac{p_h}{p_1}\right]$ individua (ved. **80**) tale $\mathfrak{P}_1$, possiamo supporre che $\mathfrak{P}_1 \frown A$ sia divisore primo minimale di $\mathfrak{p} \cdot A = p_1 \cdot A$, al quale ideale principale si applica pertanto il teorema di KRULL (ved. **219**): la minimalità di $\mathfrak{P}_1 \frown A$ induce (ved. **222**) che $\mathfrak{P}_1$ è prospettiva estrema della figura $(p_1 \cdot S_1)$ in $V(S_1)$ e quindi immediata (ved. **125**), cioè di ordine 1 sotto la prospettiva totale, sicchè risulta (ved. **248**)

$$1 = \dim_a K - \dim_a S_1/\mathfrak{P}_1.$$

Ponendo $\dim K = n$, $\dim S_1/\mathfrak{P}_1 = \nu$, avremo $\nu = n - 1$, se $\operatorname{car} K = \operatorname{car} S_1/\mathfrak{P}_1$, $\nu = n$, se $\operatorname{car} K \neq \operatorname{car} S_1/\mathfrak{P}_1 = p$. Scelti $x_i \in S_1$ siffatti che i ν elementi $x_i + \mathfrak{P}_1$ siano algebricamente indipendenti, si potrà trovare $x_n \in S_1$ tale, che $x_1, \ldots, x_n$ sono algebricamente indipendenti in K. L'ideale primo $\mathfrak{P}_1 \cap [1, x_1, \ldots, x_n]$ è allora principale e individua pertanto una prospettiva perfetta $\mathfrak{P}_0 \in V([1, x_1, \ldots, x_n)]$ del corpo $K_0 = (x_1, \ldots, x_n)$, sopra il quale K è 0-dimensionale. Avendo l'integrità $I\left(\frac{K}{S_0}\right)$ S_0-base finita (ved. **103** e **104** e **266** III), ogni estensione $\mathfrak{P}$ di $\mathfrak{P}_1$ con $I\left(\frac{K}{S_0}\right)$ (ved. **83**) è prospettiva aritmetica, e cioè perfetta (ved. **263**). Essendo tale $\mathfrak{P}$ anche estensione di $\mathfrak{p}$, essa è prospettiva del tipo desiderato.

Dal lemma or ora dimostrato segue, che *l'intersezione* $\cap S$ *di tutti gli aspetti perfetti aritmetici di un corpo aritmetico* K *è la sua integrità assoluta*:

$$\cap S = I(K).$$

Invero ogni aspetto perfetto di K contiene $I(K)$, perchè esso ammette estensione con questa integrità (ved. **83**), e viceversa, per ogni elemento $x \in K$ non-integro si troverà un aspetto perfetto aritmetico di K, che non lo contiene, Basta all'uopo partire da un aspetto $s'' \subset K$ non-estendibile con x (ved. **82**), di estenderlo con x^{-1} a una prospettiva $\mathfrak{p}'$ per la quale $x^{-1} \subset \mathfrak{p}'$ (ved. **89**) e di derivarne secondo **73** una prospettiva $\mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{p}'$ di base $[1, x^{-1}]$. Secondo quel lemma esiste un aspetto perfetto aritmetico S di K, che estende s e perciò non contiene x, valendo $x^{-1} \subset \mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap s$.

347. Prima di trarre le conseguenze del risultato suddetto, lo estenderemo al caso che si consideri un corpo K in riguardo a un dato suo sottocorpo k. Come la struttura assoluta di un corpo K deve ricercarsi mediante la totalità dei suoi aspetti perfetti, si fonderà la ricerca della struttura relativa di K sulla considerazione degli aspetti perfetti di K che contengono k.

L'intersezione $\bigcap_{S \supset k} S$ *di tutti gli aspetti perfetti di un corpo* K *algebrico sopra* k, *che hanno basi algebriche sopra* k, *è l'integrità relativa* $I\left(\frac{K}{k}\right)$, cioè la totalità degli elementi di K che dipendono algebricamente da k.

La dimostrazione di questo fatto differisce da quella data in **346** solamente con ciò, che essa si appoggia su un altro lemma e cioè questo:

Ogni aspetto non-totale s, *di base algebrica sopra* k *e contenuto nel corpo, algebrico sopra* k, K, *può estendersi con un insieme finito di elementi a un aspetto perfetto di* K.

DIMOSTRAZIONE. – Premettendo all'uopo una estensione con un insieme finito di elementi generante K sopra k, si può assumere che $\mathfrak{p}$ sia prospettiva di K. Partendo da una base appropriata dell'ideale $\mathfrak{p} = \sum_{i=1}^{h} p_i \cdot s$, si estenda la $\mathfrak{p}$, supposta non-perfetta, a una prospettiva $\mathbb{P}_1$ di base $\left[s, \frac{p_2}{p_1}, \dots, \frac{p_h}{p_1}\right]$ e soddisfacente alla condizione

$$1 = \dim \frac{K}{k} - \dim \frac{S_1/\mathbb{P}_1}{k + \mathbb{P}_1/\mathbb{P}_1} \qquad \text{(ved. } \mathbf{219} \text{ e } \mathbf{249}\text{)}.$$

Scelti $x_i \in S_1$ tali che $\dim \frac{(k, x_1, \dots, x_n)}{k} = n = \dim \frac{K}{k}$ e

$$\dim \frac{(k + \mathbb{P}_1/\mathbb{P}_1,\ x_1 + \mathbb{P}_1, \dots, x_n + \mathbb{P}_1)}{k + \mathbb{P}_1/\mathbb{P}_1} = n - 1,$$

la prospettiva $\mathbb{P}_0$ di $K_0 = (k, x_1, \dots, x_n)$, individuata da $\mathbb{P}_1$ nell'anello $[k, x_1, \dots, x_n]$ sarà perfetta, e l'estensione di $\mathbb{P}_1$ con l'integrità di K relativa a S_0 fornirà una estensione di $\mathfrak{p}$ del tipo desiderato, perchè

$$I\left(\frac{K}{S_0}\right) = S_0 \cdot I\left(\frac{K}{[k, x_1, \dots, x_n]}\right)$$

ha S_0-base finita secondo il teorema di F. K. SCHMIDT (ved. **108**).

§ 2. Infinitesimali integri di un corpo.

348. I risultati **346** e **347** mostrano che in generale, cioè qualora non sia $\dim K = 0$ o $\dim \frac{K}{k} = 0$, gli anelli $\cap S$ ivi considerati non bastano alla ricerca della struttura di K (relativa a k).

Estendiamo pertanto il corpo K alla sua corrispondenza infinitesimale (ved. **6**) $R = [K, d_1K, d_2K, d_3K, \dots] =$

$$K + \sum_i K \cdot d_iK + \sum_{i<j} K \cdot d_iK \cdot d_jK + \sum_{i<j<l} K \cdot d_iK \cdot d_jK \cdot d_lK + \dots$$

che subito riconosceremo essere oggetto primario con l'aspetto

$$S + \sum_i S \cdot d_iS + \sum_{i<j} S \cdot d_iS \cdot d_jS + \sum_{i<j<l} S \cdot d_iS \cdot d_jS \cdot d_lS + \dots$$

estensione di un qualsiasi aspetto S di K.