268. Come corollario di **267** IV e V, utile in altre applicazioni, notiamo

Se s_0 è perfetto e A un s_0-modulo con s_0-base finita, allora da $A = \sum_{i=1}^{n} s_0 \cdot a_i + \mathfrak{p}_0 \cdot A$ si può concludere $A = \sum_{i=1}^{n} s_0 \cdot a_i$, e nel caso in cui A sia sopra-anello primario di s_0 vale $(A) = A \cdot (s_0)$.

§ 3. **Anelli individuali.**

269. Ogni percezione $A/\mathfrak{c}$ di un anello A (ved. **63**) è il principio di una sequenza

$$A/\mathfrak{c},\ A/\mathfrak{c}^2,\ A/\mathfrak{c}^3, \ldots$$

di percezioni $A/\mathfrak{c}^{n+1}$ di *precisione n* infinitamente crescente. Questa ascesa di anelli sbocca in un anello

$$A/\mathfrak{c}^{\infty}$$

individuale alla percezione $A/\mathfrak{c}$, definito nel modo seguente:

Ogni sequenza infinita del tipo

$$(*) \qquad a_0 + \mathfrak{c} \supset a_1 + \mathfrak{c}^2 \supset a_2 + \mathfrak{c}^3 \supset a_3 + \mathfrak{c}^4 \supset \ldots \qquad (a_n \in A)$$

determina un elemento α di $A/\mathfrak{c}^{\infty}$, e viceversa. L'$(n+1)$-mo termine della sequenza, in quanto determinato da α e dalla precisione n, sarà designato con

$$(\alpha)_n$$

e si dirà *la n-esima approssimazione di α.*

I calcoli in $A/\mathfrak{c}^{\infty}$ si effettuano mediante le approssimazioni:

$$(\alpha + \beta)_n = (\alpha)_n + (\beta)_n, \quad (\alpha \cdot \beta)_n = (\alpha)_n \cdot (\beta)_n .$$

Un elemento $a \in A$ *approssima* $\alpha \in A/\mathfrak{c}^{\infty}$ *con la precisione n* allora e soltanto allora che $a + \mathfrak{c}^{n+1} = (\alpha)_n$.

Ogni elemento a di A approssima uno ed un solo elemento α di $A/\mathfrak{c}^{\infty}$ con precisione infinita, e cioè quello dato dalla sequenza

$$(**) \qquad a + \mathfrak{c} \supset a + \mathfrak{c}^2 \supset a + \mathfrak{c}^3 \supset a + \mathfrak{c}^4 \ldots$$

che chiameremo *l'idea di a in $A/\mathfrak{c}^{\infty}$*.

Le idee in $A/\mathfrak{c}^{\infty}$ di elementi di A costituiscono un sotto-anello di $A/\mathfrak{c}^{\infty}$ omomorfo all'anello A mediante l'associazione

$$A \ni a \to \alpha \in A/\mathfrak{c}^{\infty} \text{ con } (\alpha)_n = a + \mathfrak{c}^{n+1}.$$

Allora e soltanto allora che questo omomorfismo sia un isomorfismo, l'anello A diventa sotto-anello di $A/\mathfrak{c}^{\infty}$, identificando ogni elemento di A con la sua idea, identificazione che in tal caso sempre tacitamente supponiamo effettuata. La condizione necessaria e sufficiente affinchè sia $A \subset A/\mathfrak{c}^{\infty}$, è $\bigcap_{n=1,2,\dots,\infty} \mathfrak{c}^n=0$, come si verifica p. es. quando esiste un aspetto noetheriano S di base A soddisfacente a $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{c}$ (ved. 92).

Dare un elemento di $A/\mathfrak{c}^\infty$ significa dare le sue approssimazioni. Conviene ricordare, che con la n-esima approssimazione di un elemento si conoscono anche tutte le sue approssimazioni di precisione minore di n, valendo $(\alpha)_m = (\alpha)_n + \mathfrak{c}^{m+1}$ per $m \leq n$.

270. L'anello $s/\mathfrak{p}^\infty$ individuale al soggetto $s/\mathfrak{p}$ di una prospettiva $\mathfrak{p}$ sarà detto *l'individualità di* $s/\mathfrak{p}$ (o semplicemente di $\mathfrak{p}$ oppure di s).

L'individualita $s/\mathfrak{p}^\infty$ è aspetto s^*, l'origine del quale è la totalità $\mathfrak{p}^*$ degli elementi approssimati da elementi di $\mathfrak{p}$.

DIMOSTRAZIONE I. - Gli elementi $\xi \in s/\mathfrak{p}^\infty$ approssimati da elementi di $\mathfrak{p}$ sono proprio quelli soddisfacenti a $(\xi)_0 = \mathfrak{p}$. Ora, da $(\xi)_0 = \mathfrak{p}$, $(\eta)_0 = \mathfrak{p}$ segue $(\xi - \eta)_0 = (\xi)_0 - (\eta)_0 = \mathfrak{p}$, e $(\xi \cdot \zeta)_0 = (\xi)_0 \cdot (\zeta)_0 = \mathfrak{p}$ per ogni $\zeta \in s/\mathfrak{p}^\infty$, il che verifica $\mathfrak{p}^*$ quale ideale in $s/\mathfrak{p}^\infty$. L'idea di 1, cioè l'elemento approssimato da 1 con infinita precisione, non appartiene a $\mathfrak{p}^*$.

II. Per ogni $\xi \in s/\mathfrak{p}^\infty$, $\xi \not\subset \mathfrak{p}^*$, dimostriamo l'esistenza di un inverso $\eta \in s/\mathfrak{p}^\infty$, costruendo successivamente le sue approssimazioni

$$(*) \qquad y_0 + \mathfrak{p} \supset y_1 + \mathfrak{p}^2 \supset y_2 + \mathfrak{p}^3 \supset \dots \supset y_{n-1} + \mathfrak{p}^n .$$

Sia $(\xi)_m = x_m + \mathfrak{p}^{m+1}$ $(x_m \in s)$. Da $\xi \not\subset \mathfrak{p}^*$ segue $x_0 \not\subset \mathfrak{p}$ e quindi l'esistenza di $x_0^{-1} = y_0 \in s$.

Avendo già costruito la sequenza $(*)$ in modo tale che $x_m \cdot y_m = 1$, deduciamo da $x_{n-1} \cdot y_{n-1} = 1$ e $x_n \subset x_{n-1} + \mathfrak{p}^n$, che $x_n \cdot y_{n-1} = 1 + p$ con $p \in \mathfrak{p}^n$ sicchè $y_n = (1+p)^{-1} \cdot y_{n-1} \in s$ soddisfa a $x_n \cdot y_n = 1$ e a $y_n + \mathfrak{p}^{n+1} \subset y_{n-1} + \mathfrak{p}^n$ e approssima pertanto η con la precisione $n+1$.

Con I e II è dimostrato il teorema.

Sapendo ormai, che l'ideale $\mathfrak{p}^*$ è origine di una prospettiva $s^* \to s^*/\mathfrak{p}^*$ ammetteremo anche per questa la denominazione «la individualità di $\mathfrak{p}$».

Nell'individualità s^* di una qualunque prospettiva $\mathfrak{p}$ vale

$$\bigcap_{i=1,2,\dots\infty} \mathfrak{p}^{*n} = 0.$$

271. Conveniamo di designare le idee di elementi di s (ved. **269**) con gli stessi segni come questi, comunque sia s sotto-anello di s^* o semplicemente segno di un sotto-anello di s^* omomorfo all'aspetto s.

Se l'ideale $\mathfrak{p}$ ha base finita, la totalità degli elementi di s^* approssimati dallo zero con la precisione $m-1$ è $\mathfrak{p}^m \cdot s^*$. In particolare

$$\mathfrak{p}^* = \mathfrak{p} \cdot s^* \text{ e } s^* = s + \mathfrak{p}^m \cdot s^* \quad \textit{con } m \textit{ qualunque.}$$

Dimostrazione. – Sia $\mathfrak{p}^m = \sum_{i=1}^{H} P_i \cdot s$. Dato un elemento $\xi \in s^*$ approssimato dallo zero con la precisione $m-1$, cioè soddisfacente a $(\xi)_{m-1} = \mathfrak{p}^m$, supponiamo già determinati $x_{il} \in s$ $(i = 1, \dots, H,\ 0 \leq l \leq n - m)$ tali che

$$x_{i0} + \mathfrak{p} \supset x_{i1} + \mathfrak{p}^2 \supset x_{i2} + \mathfrak{p}^3 \supset \dots \supset x_{i,\, n-m} + \mathfrak{p}^{n-m+1}$$

e $(\xi)_n = \sum_{i=1}^{H} x_{i,\, n-m} \cdot P_i + \mathfrak{p}^{n+1}$. Di seguito a $(\xi)_n = (\xi)_{m-1} + \mathfrak{p}^{n+1} = \mathfrak{p}^{n+1}$ si prendano $x_{i,\, n-m} = 0$ per $n < m$ (ved. 269 fine).

Il fatto $(\xi)_{n+1} \subset (\xi)_n$ permette di scrivere $(\xi)_{n+1} = x + \mathfrak{p}^{n+2}$ con $x = \sum_{i=1}^{H} x_{i,\, n-m} \cdot P_i + \sum_{i=1}^{H} p_i \cdot P_i$ con $p_i \in \mathfrak{p}^{n+1-m}$. Se quindi si pongono

$$x_{i,\, n-m+1} = x_{i,\, n-m} + p_i \qquad (i = 1, \dots, H),$$

questi elementi soddisfano tanto a $x_{i,\, n-m} + \mathfrak{p}^{n-m+1} \supset x_{i,\, n-m+1} + \mathfrak{p}^{n-m+2}$ quanto a $(\xi)_{n+1} = \sum_{i=1}^{H} x_{i,\, n-m+1} \cdot P_i + \mathfrak{p}^{n+2}$.

Con questo procedimento si ottengono le approssimazioni $(\xi_i)_n = x_{in} + \mathfrak{p}^{n+1}$ di elementi $\xi_i \in s^*$ soddisfacenti a

$$(\xi)_n = \sum_i x_{i,\, n-m} \cdot P_i + \mathfrak{p}^{n+1} \supset \text{epperò} = \sum_i (\xi_i)_n \cdot (P_i)_n \text{ per ogni } n,$$

sicchè $\xi = \sum_i \xi_i \cdot P_i \subset \mathfrak{p}^m \cdot s^*$. Viceversa, dalla regola $(\alpha \cdot \beta)_n = (\alpha)_n \cdot (\beta)_n$ e dal fatto $(\mathfrak{p})_n = \mathfrak{p}$ segue $(\mathfrak{p}^m \cdot s^*)_n \subset \mathfrak{p}^m + \mathfrak{p}^{n+1}$ e quindi $(\xi)_{m-1} = \mathfrak{p}^m$ per ogni $\xi \in \mathfrak{p}^m \cdot s^*$.

È dimostrato con ciò, che la totalità degli elementi $\xi \in s^*$ soddisfacenti a $(\xi)_{m-1} = \mathfrak{p}^m$ è $\mathfrak{p}^m \cdot s^*$.

Applicando questo risultato al caso $m = 1$, otteniamo $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{p} \cdot s^*$.

Poichè per ogni $\xi \in s^*$ vale $(\xi)_0 = x + \mathfrak{p}$ con $x \in s$, avremo $(\xi - x)_0 = \mathfrak{p}$ e quindi $\xi - x \in \mathfrak{p} \cdot s^*$. Ciò dimostra $s^* = s + \mathfrak{p} \cdot s^*$ e con questo la relazione più generale $s^* = s + \mathfrak{p}^m \cdot s^*$ dove m è qualunque.

272. *Se l'ideale $\mathfrak{p}$ ha base finita, l'anello s^* è noetheriano.*

Dimostrazione. – I. Sia $\mathfrak{p} = \sum_{i=1}^{h} p_i \cdot s$ e quindi $\mathfrak{p}^* = \sum_i p_i \cdot s^*$.

Da una relazione $\sum_i \gamma_i \cdot p_i \subset \mathfrak{p}^{*2} = \mathfrak{p}^2 \cdot s^*$ $(\gamma_i \in s^*)$ segue $(\sum_i \gamma_i \cdot p_i)_1 = \sum_i (\gamma_i)_1 \cdot (p_i)_1 = \mathfrak{p}^2$ e pertanto, ponendo $(\gamma)_1 = c_i + \mathfrak{p}^2$ $(c_i \in s)$, $\sum_i c_i \cdot p_i \subset \mathfrak{p}^2$. Ne risulta nel caso che $p_1, \dots, p_h$ sia base minima di $\mathfrak{p}$, come presupporremo, che si avrà $c_i \subset \mathfrak{p}$, $(\gamma_i)_0 = (\gamma_i)_1 + \mathfrak{p} = \mathfrak{p}$ e perciò $\gamma_i \subset \mathfrak{p}^*$, sicchè $p_1, \dots, p_h$ è anche base minima di $\mathfrak{p}^*$.

II. Di seguito a $s^* = s + \mathfrak{p}^*$ possiamo identificare i corpi $s/\mathfrak{p}$ e $s^*/\mathfrak{p}^*$ mediante l'isomorfismo $\xi + \mathfrak{p}^* \to (\xi)_0$ $(\xi \in s^*)$ e estendere questa identificazione agli anelli

$$s/\mathfrak{p}[u_1, \dots, u_h] = s[u]/\mathfrak{p}[u] \to s^*/\mathfrak{p}^*[u_1, \dots, u_h] = s^*[u]/\mathfrak{p}^*[u] = s[u] + \mathfrak{p}^*[u]/\mathfrak{p}^*[u],$$

coi quali si costruiscono secondo **196** le forme tangenti in $\mathfrak{p}$ risp. in $\mathfrak{p}^*$.

Diremo conseguentemente: la forma $f(u_1, \dots, u_h + \mathfrak{p}^*[u_1, \dots, u_h]$ (con $f(u) \in s[u]$ omogeneo di grado m) tocca $\xi \in s^*$ allora e soltanto allora che in s^* vale $f(p_1, \dots, p_h) \subset \xi + \mathfrak{p}^{*m+1}$ oppure, calcolando le approssimazioni di precisione m, $f(p_1, \dots, p_h) + \mathfrak{p}^{m+1} = (f(p_1, \dots p_h))_m \subset$ epperò $= (\xi)_m$. Viceversa, da $(\xi)_m = f(p_1, \dots, p_h) + \mathfrak{p}^{m+1}$ si deduce $(f(p_1, \dots, p_h) - \xi)_m = \mathfrak{p}^{m+1}$ e quindi (ved. **271**) $f(p_1, \dots, p_h) - \xi \subset \mathfrak{p}^{m+1} \cdot s^*$. Ne risulta, che $f(u_1, \dots, u_h) + \mathfrak{p}^*[u_1, \dots, u_h]$ (con $f(u) \in s[u]$ di grado m) tocca $\xi \in s^*$ allora e soltanto allora che $f(p_1, \dots, p_h)$ approssima ξ con la precisione m.

III. Sia ora $\mathfrak{a}(s^*)$ un ideale qualunque in s^* e designi $\overline{\mathfrak{a}(s^*)}$ l'ideale tangente $\mathfrak{a}(s^*)$, cioè generato in $s^*/\mathfrak{p}^*[u] = s/\mathfrak{p}[u]$ dalle forme tangenti elementi di $\mathfrak{a}(s^*)$ (ved. **197**). Se le forme

$$(*) \qquad a_i(u_1, \dots, u_h) + \mathfrak{p}^*[u_1, \dots, u_h] \quad (\text{con } a_i(u) \in s[u] \text{ di grado } m_i)$$

$(i = 1, \dots, l)$ costituiscono una base dell'ideale $\overline{\mathfrak{a}(s^*)}$, gli elementi $\alpha_i \in \mathfrak{a}(s^*)$ approssimati da $a_i(p_1, \dots, p_h)$ con la precisione m_i, cioè soddisfacenti a

$$(**) \qquad a_i(p_1, \dots, p_h) \subset \alpha_i + \mathfrak{p}^{m_i+1} \cdot s^*,$$

costituiranno una base dell'ideale $\mathfrak{a}(s^*)$.

Sia, infatti, α un elemento qualunque di $\mathfrak{a}(s^*)$, e supponiamo già costruite le sequenze

$$x_{i0} + \mathfrak{p} \supset x_{i1} + \mathfrak{p}^2 \subset \dots \supset x_{i,n-m_i} + \mathfrak{p}^{n-m_i+1} \quad (n \geq m_i,\ x_{ij} \in s)$$

$(i = 1, \dots, l)$ in modo tale che

$$({}^{*}_{**}) \qquad (\alpha)_n = \sum_{i=1}^{l} (x_{i,n-m_i})_n \cdot (\alpha_i)_n \qquad (x_{ij} = 0 \text{ per } j < 0).$$

Poichè $(\alpha)_0 \neq \mathfrak{p}$ indurrebbe $\alpha \not\subset \mathfrak{p}^*$ e quindi $\mathfrak{a}(s^*) = s^* = 1 \cdot s^*$, possiamo limitarci al caso di $(\alpha)_0 = \mathfrak{p}$ e prendere $x_{i0} = 0$.

Da $(\alpha - \sum_i x_{i,n-m_i} \cdot \alpha_i)_n = (\alpha)_n - \sum_i (x_{i,n-m_i})_n \cdot (\alpha_i)_n = \mathfrak{p}^{n+1}$ segue (ved. **271**)

$$(+) \qquad (\mathfrak{a}(s^*) \ni) \quad \alpha - \sum_i x_{i,n-m_i} \cdot \alpha_i \subset \mathfrak{p}^{n+1} \cdot s^* = \mathfrak{p}^{*n+1}$$

e quindi l'esistenza di una forma $a(u_1, \dots, u_h) + \mathfrak{p}^*[u_1, \dots, u_h] \in \overline{\mathfrak{a}(s^*)}$ (con

$a(u) \in s[u]$) di grado $n+1$ tangente il membro sinistro di (+) e soddisfacente perciò a

$$(++) \qquad a(p_1, \dots, p_h) \subset \alpha - \sum_i x_{i, n-m_i} \cdot \alpha_i + \mathfrak{p}^{n+2} \cdot s^* .$$

Ora, dato che le forme (*) costituiscono una base dell'ideale $\overline{\mathfrak{a}(s^*)}$, avremo una relazione $a(u_1, \dots, u_h) \subset \sum_i b_i(u_1, \dots, u_h) \cdot a_i(u_1, \dots, u_h) + \mathfrak{p}^*[u_1, \dots, u_h]$ (con $b_i(u) \in s[u]$ di grado $n - m_i + 1$), dalla quale segue mediante (**): $a(p_1, \dots, p_h) - \sum_i b_i(p_1, \dots, p)_h) \cdot \alpha_i \subset \mathfrak{p}^{n+2} \cdot s^*$ oppure, tenuto conto di (++),

$$\alpha - \sum (x_{i, n-m_i} + b_i(p_1, \dots, p_h)) \cdot \alpha_i \subset \mathfrak{p}^{n+2} \cdot s^*,$$

sicchè ponendo $x_{i, n-m_i+1} = x_{i, n-m_i} + b_i(p_1, \dots, p_h)$ $(i = 1, \dots, l)$, troviamo

$$(\alpha)_{n+1} = \sum (x_{i, n-m_i+1})_{n+1} \cdot (\alpha_i)_{n+1},$$

in analogia a $\binom{*}{**}$, e nello stesso tempo

$$x_{i, n-m_i} + \mathfrak{p}^{n-m_i+1} \supset x_{i, n-m_i+1} + \mathfrak{p}^{n-m_i+2} .$$

Ciò descrive un procedimento infinitamente continuabile che definisce elementi $\xi_i \in s^*$ con le approssimazioni $(\xi_i)_n = x_{i,n} + \mathfrak{p}^{n+1}$.

Da (**) e $\xi_i - x_{i, n-m_i} \subset \mathfrak{p}^{n-m_i+1} \cdot s^*$ segue $\alpha_i \cdot \xi_i - \alpha_i \cdot x_{i, n-m_i} \subset \mathfrak{p}^{n+1} \cdot s^*$ e quindi

$$(\alpha)_n = \sum_i (x_{i, n-m_i})_n \cdot (\alpha_i)_n = \sum_i (\alpha_i)_n \cdot (\xi_i)_n$$

per n qualunque, fatto equivalente a $\alpha = \sum \alpha_i \cdot \xi_i$, c. d. d.

273. *Se l'ideale $\mathfrak{p}$ ha base finita, per ogni ideale $\mathfrak{a}$ in s con $\left(\frac{\mathfrak{a}}{s}\right)$ finito vale*

$$(*) \qquad \left(\frac{\mathfrak{a}}{s}\right) = \left(\frac{\mathfrak{a} \cdot s^*}{s^*}\right).$$

Quindi, s^* è regolare (perfetto), se s è regolare (perfetto).

DIMOSTRAZIONE. - I. Con

$$(**) \qquad \xi + \mathfrak{p}^{m+1} \cdot s^* \rightarrow (\xi)_m$$

si definisce un isomorfismo di $s^*/\mathfrak{p}^{m+1} \cdot s^*$ su $s/\mathfrak{p}^{m+1}$, poichè $(\mathfrak{p}^{m+1} \cdot s^*)_m = \mathfrak{p}^{m+1}$ e, viceversa, da $(\xi)_m = \mathfrak{p}^{m+1}$ segue $\xi \in \mathfrak{p}^{m+1} \cdot s^*$ (ved. **271**).

II. Dall'ipotesi, che $\left(\frac{\mathfrak{a}}{s}\right)$ sia finito, si deriva l'esistenza di una potenza $\mathfrak{p}^{m+1} \subset \mathfrak{a}$. Contenendo allora l'ideale $\mathfrak{a} \cdot s^*$ il nucleo $\mathfrak{p}^{m+1} \cdot s^*$ dell'isomorfismo (**), si stabilisce (ved. **215**) con (**) una corrispondenza biunivoca fra gli ideali contenenti $\mathfrak{a} \cdot s^*$ di s^* e quelli di $s/\mathfrak{p}^{m+1}$ contenenti $(\mathfrak{a} \cdot s^*)_m =$

$= \mathfrak{a} + \mathfrak{p}^{m+1}/\mathfrak{p}^{m+1} = \mathfrak{a}/\mathfrak{p}^{m+1}$, i quali, dal conto loro, corrispondono biunivocamente agli ideali in s contenenti $\mathfrak{a}$. Le sequenze irriducibili di ideali misuranti (secondo 208) i numeri $\left(\frac{\mathfrak{a} \cdot s^*}{s^*}\right)$ e $\left(\frac{\mathfrak{a}}{s}\right)$ sono pertanto costituite dal medesimo numero di termini, come afferma $(*)$.

III. Poichè la regolarità di s significa (ved. 234): s è noetheriano e $\left(\frac{\mathfrak{p}^{m+1}}{s}\right) = \left(\frac{m+h}{h}\right)$, essa si trasporta, di seguito a 272 e l'uguaglianza $(*)$, subito all'anello s^*. Se s è perfetto, si ha regolarità e $h = 1$, proprietà che altresì subito si trasportano a s^*.

Viceversa, se s^* è regolare (perfetto), si può affermare, che s è regolare (perfetto), purchè si sappia s essere noetheriano.

274. *Per s noetheriano vale $s^* \cap (s) = s$.*

DIMOSTRAZIONE. - Sia $x = \frac{a}{b}$ con $a, b \in s \subset s^*$ elemento qualunque di (s). Se $x \subset s^*$, si ha $a = x \cdot b$ e quindi $(a)_n = (x)_n \cdot (b)_n$ per ogni n. Ne segue $a \subset b \cdot s + \mathfrak{p}^{n+1}$ epperò (ved. 236), $a \subset b \cdot s$, cioè $x \in s$, c. d. d.

275. *L'individualità s_0^* di un aspetto perfetto s_0 è sotto-anello dell'individualità s^* di una qualsiasi sua estensione s noetheriana.*

DIMOSTRAZIONE. - Se a ogni $\xi_0 \in s_0^*$, determinato da $(\xi_0)_n = x_n + \mathfrak{p}_0^{n+1}$ $(x_n \in s_0)$ si associa l'elemento $\xi \in s$ determinato da $(\xi)_n = x_n + \mathfrak{p}^{n+1}$, si definisce (di seguito a $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}$) un omomorfismo di s_0^* in s^*. Il nucleo $\mathfrak{n}$ di questo omomorfismo è 0 o $\mathfrak{p}_0^{*\nu}$ $(\nu \geq 0)$, dato che in s_0^*, che sappiamo essere perfetto (ved. 273), non ci sono altri ideali (ved. 94). Ad ogni modo sarà $\mathfrak{n} = a \cdot s_0^*$ con $a \in s_0$. Ora, $a + \mathfrak{p}^{n+1} = \mathfrak{p}^{n+1}$ $(n = 1, 2, ...)$ induce (ved. 92) $a = 0$, sicchè non può trattarsi che di un isomorfismo. Basta identificare ogni $\xi_0 \in s_0^*$ con il $\xi \in s^*$ risultante da ξ_0 mediante questo isomorfismo, per rendere s_0^* sotto-anello di s^*, identificazione che sempre tacitamente effettueremo.

276. *Per un sopra-anello noetheriano e primario A di un aspetto perfetto s_0 segue da*

$$(*) \qquad A = \sum_{i=1}^{n} s_0 \cdot y_i + \mathfrak{p}_0 \cdot A, \quad n = \left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot A}{A}\right)_{s_0},$$

che

$$A/(\mathfrak{p}_0 \cdot A)^\infty = \sum_{i=1}^{n} s_0^* \cdot y_i \supset s_0^*, \quad n = (s_0^*)\text{-rango di } (A/(\mathfrak{p}_0 \cdot A)^\infty)$$

e

$$(A/(\mathfrak{p}_0 \cdot A)^\infty) = \sum_{i=1}^{n} (s_0^*) \cdot y_i = A \cdot (s_0^*).$$

Dimostrazione. - I. Da $\sum_i c_i \cdot y_i \subset \mathfrak{p}_0^m \cdot A$, $c_i \in s_0$ segue $c_i \subset \mathfrak{p}_0^m$.

Ciò risulta per $m = 1$ immediatamente dall'ipotesi $(*)$ e si dimostra per $m > 1$ con induzione secondo m, valendosi del fatto, che $\mathfrak{p}_0 = p_0 \cdot s_0$ e p_0 è non-infinitesimale.

II. Conseguenza diretta di $(*)$ è $A = \sum_{i=1}^n s_0 \cdot y_i + \mathfrak{p}_0^{m+1} \cdot A$ con m qualunque, donde si deduce per ogni elemento

$$\xi: \quad x_0 + \mathfrak{p}_0 \cdot A \supset x_1 + (\mathfrak{p}_0 \cdot A)^2 \supset \ldots \supset x_m + (\mathfrak{p}_0 \cdot A)^{m+1} \supset \ldots$$

di $B = A/(\mathfrak{p}_0 \cdot A)^\infty$ una rappresentazione

$$(\xi)_m = x_m + \mathfrak{p}_0^{m+1} \cdot A = \sum_{i=1}^n c_{mi} \cdot y_i + \mathfrak{p}_0^{m+1} \cdot A$$

dove $c_{mi} \in s_0$ secondo I è unico mod $\mathfrak{p}_0^{m+1}$. Ora, inducendo $(\xi)_{m+1} + \mathfrak{p}_0^{m+1} \cdot A = (\xi)_m$ l'uguaglianza $\sum_{i=1}^n c_{m+1,i} \cdot y_i + \mathfrak{p}_0^{m+1} \cdot A = \sum_{i=1}^n c_{m,i} \cdot y_i + \mathfrak{p}_0^{m+1} \cdot A$, si avrà $c_{m+1,i} - c_{m,i} \subset \mathfrak{p}_0^{m+1}$, sicchè

$$(**) \qquad (\gamma_i)_m = c_{mi} + \mathfrak{p}_0^{m+1} \cdot A \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

definiscono elementi γ_i di B, coi quali si scrive

$$({}^{*}_{**}) \qquad \xi = \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot y_i,$$

designata con y_i l'idea di y_i in $B = A/(\mathfrak{p}_0 \cdot A)^\infty$.

III. Associando a ogni elemento

$$(+) \qquad x_0 + \mathfrak{p}_0 \supset x_1 + \mathfrak{p}_0^2 \supset \ldots \supset x_m + \mathfrak{p}_0^{m+1} \supset \ldots \qquad (x_m \in s_0)$$

di s_0^* l'elemento

$$x_0 + (\mathfrak{p}_0 \cdot A) \supset x_1 + (\mathfrak{p}_0 \cdot A)^2 \supset \ldots \supset x_m + (\mathfrak{p}_0 \cdot A)^{m+1} \supset \ldots$$

di B, si definisce un omomorfismo di s_0^* in B. Se il nucleo di questo omomorfismo non fosse 0, esso sarebbe (ved. **273** e **94**) $\mathfrak{p}_0^{*v} = p_0^v \cdot s_0^*$ $(v \geq 0)$, ma l'idea di $p_0^v \in s_0 \subset A$ in B certo è diversa da zero, dato che di seguito al carattere primario di A esiste (ved. **72**) una prospettiva $\mathfrak{P}$ di base A soddisfacente a $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{p}_0 \cdot A$ (ved. **269**). Trattandosi quindi di un isomorfismo, identificheremo s_0^* con la sua immagine ottenuta mediante quell'isomorfismo realizzando così $B \supset s_0^*$.

Il risultato $({}^{*}_{**})$ insegna ormai $B = \sum_{i=1}^n s_0^* \cdot y_i$.

IV. Da una relazione $\sum_i \gamma_i \cdot y_i = 0$ si deriva, ponendo $(**)$,

$$\sum_{i=1}^n c_{mi} \cdot y_i \subset \mathfrak{p}_0^{m+1} \cdot A, \text{ e quindi } c_{mi} \subset \mathfrak{p}_0^{m+1}, \text{ cioè } \gamma_i = 0.$$

Ne segue subito, che nessuno degli elementi di s_0^* è divisore dello zero in B, sicchè l'oggetto (B) di questo anello contiene $[(s_0^*), B] = (s_0^*) \cdot B = \sum_{i=1}^{n} (s_0^*) \cdot y_i = C$. Se $\beta \in B$ è attivo in B (ved. **63**), l'ideale $\beta \cdot C$ in C si verifica subito avere l'(s_0^*)-rango uguale a n e coincidere pertanto con C. Ciò prova $\beta^{-1} \subset C$ e con questo l'uguaglianza $(B) = C = \sum_{i=1}^{n} (s_0) \cdot y_i$.

277. *Per ogni estensione $s \rightarrow s_0$ noetheriana e primaria di un aspetto perfetto s_0 segue da $s = \sum_{i=1}^{n} s_0 \cdot y_i + \mathfrak{p}_0 \cdot s$, $n = \left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot s}{s}\right)_{s_0}$, che*

$$s^* = \sum_{i=1}^{n} s_0^* \cdot y_i, \quad (s^*) = \sum_{i=1}^{n} (s_0^*) \cdot y_i,$$

gli elementi y_i essendo linearmente indipendenti sopra (s_0^*).

DIMOSTRAZIONE. - I. Dall'ipotesi, che $\left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot s}{s}\right)_{s_0}$ sia finito, segue che la funzione caratteristica

$$\left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot s + \mathfrak{p}^{m+1}}{s}\right) \leq \left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot s}{s}\right)$$

(ved. **210**) è di grado 0 e che quindi (ved. **230** e **193**) $\mathfrak{p}_0 \cdot s$ è $\mathfrak{p}$-primario. Partendo da una relazione $\mathfrak{p}^e \subset \mathfrak{p}_0 \cdot s$, associamo a ogni elemento

$$\xi: \quad x_0 + \mathfrak{p}_0 \cdot s \supset x_1 + \mathfrak{p}_0^2 \cdot s \supset \ldots \supset x_m + \mathfrak{p}_0^{m+1} \cdot s \supset \ldots$$

di $s/(\mathfrak{p}_0 \cdot s)^\infty$ l'elemento

$$x_0 + \mathfrak{p} \supset x_1 + \mathfrak{p}^2 \supset \ldots \supset x_m + \mathfrak{p}^{m+1} \supset \ldots$$

di s^* in modo evidentemente univoco e tale, che si definisce un omomorfismo, il cui nucleo è costituito dagli elementi ξ con $(\xi)_m \subset \mathfrak{p}^{m+1} + \mathfrak{p}_0^{m+1} \cdot s/\mathfrak{p}_0^{m+1} \cdot s$. Da $(\xi)_m = (\xi)_{me+e} + \mathfrak{p}_0^{m+1} \cdot s$ e $(\xi)_{me+e} \subset \mathfrak{p}_0^{m+1} \cdot s$ segue $(\xi)_m = \mathfrak{p}_0^{m+1} \cdot s$, cioè $\xi = 0$. Si tratta quindi di un isomorfismo, il quale di nuovo ci servirà a identificare quell'elemento ξ con la sua immagine in s^*.

Tutto l'anello s^* risulta in questo modo da $s/(\mathfrak{p}_0 \cdot s)^\infty$, poichè, dato $\eta \in s^*$, si trova, ponendo $(\xi)_m = (\eta)_{me+e} + \mathfrak{p}_0^{m+1} \cdot s$ un elemento ξ di $s/(\mathfrak{p}_0 \cdot s)^\infty$, al quale corrisponde sotto quell'isomorfismo un $\zeta \in s^*$ con $(\zeta)_m \quad (\eta)_{me+e} + \mathfrak{p}^{m+1} \subset \subset (\eta)_m$ e quindi uguale a η.

II. Poichè all'anello $s/(\mathfrak{p}_0 \cdot s)^\infty$ si applica il teorema **276**, avremo $s/(\mathfrak{p}_0 \cdot s)^\infty = \sum_{i=1}^{n} s_0^* \cdot y_i$, dove s_0^* designa (ved. **276** III) l'immagine di s_0^* ottenuta dall'identificazione dell'elemento

$$\xi_0: \quad x_0 + \mathfrak{p}_0 \supset x_1 + \mathfrak{p}_0^2 \supset \ldots \supset x_m + \mathfrak{p}_0^{m+1} \supset \ldots \qquad (x_i \in s_0)$$

di s_0^* all'elemento

$$x_0 + \mathfrak{p}_0 \cdot s \supset x_1 + \mathfrak{p}_0^2 \cdot s \supset \ldots \supset x_m + \mathfrak{p}_0^{m+1} \cdot s \supset \ldots$$

di $s/(\mathfrak{p}_0 \cdot s)^\infty$, che appunto corrisponde all'elemento

$$x_0 + \mathfrak{p} \supset x_1 + \mathfrak{p}^2 \supset \ldots \supset x_m + \mathfrak{p}^{m+1} \supset \ldots$$

da associare a ξ_0 secondo il procedimento generale esposto in **275**.

Essendo questa identificazione d'accordo con quella descritta in I., essa riduce le affermazioni da dimostrare a quelle provate in **276**.

278. *Se per un sopra-anello primario e noetheriano A di un aspetto perfetto s_0 il numero $\left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot A}{A}\right)_{s_0}$ è finito, l'anello individuale*

$$\mathfrak{A} = A/(\mathfrak{p}_0 \cdot A)^\infty = s_1^* + s_2^* \ldots + s_h^*$$

è somma diretta delle individualità s_i^* delle estensioni $s_i \to s_0$ di base A, (le quali individualità suppongonsi immerse in $\mathfrak{A}$ mediante gli isomorfismi associanti le approssimazioni $a_n + \mathfrak{p}_i^{n+1} \to a_n \cdot e_i^{(n)} + \mathfrak{p}_0^{n+1} \cdot A$ $(a_n \in A)$.

DIMOSTRAZIONE. - I. Soddisfatte le premesse del teorema **261**, possiamo valerci delle denominazioni vi usate:

$$\mathfrak{p}_0 \cdot A = \bigcap_{i=1,\ldots,h} \mathfrak{q}_i = \prod_{i=1}^{h} \mathfrak{q}_i;\quad \mathfrak{q}_i \text{ è } [\mathfrak{p}_i \cap A]\text{-primario},\quad \mathfrak{q}_i + \mathfrak{q}_j = A,\ (i \neq j),$$

$$(*) \qquad A = \sum_{i=1}^{h} \left(\sum_{j=1}^{n_i} s_0 \cdot z_{ij}\right) + \mathfrak{p}_0 \cdot A, \qquad z_{ij} \in \prod_{l \neq i} \mathfrak{q}_l,\ \sum_{i=1}^{h} n_i = \left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot A}{A}\right)_{s_0},$$

$$(**) \qquad s_i = \sum_{j=1}^{n_i} s_0 \cdot z_{ij} + \mathfrak{p}_0 \cdot s_i, \quad n_i = \left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot s_i}{s_i}\right)_{s_0}.$$

II. Di seguito a $(*)$ possiamo applicare il teorema **276** e ricavarne

$$\mathfrak{A} = A/(\mathfrak{p}_0 \cdot A)^\infty = \sum_{i,j} s_0^* \cdot \zeta_{ij}$$

dove ζ_{ij}, definiti da $(\zeta_{ij})_n = z_{ij} + \mathfrak{p}_0^{n+1} \cdot A$, sono linearmente indipendenti sopra l'individualità s_0^* immersa in $\mathfrak{A}$ mediante l'isomorfismo associante le approssimazioni $a_n + \mathfrak{p}_0^{n+1}$ e $a_n + \mathfrak{p}_0^{n+1} \cdot A$ $(a_n \in s_0)$.

III. Da $\mathfrak{q}_i + \mathfrak{q}_j = A$ $(i \neq j)$ segue $\mathfrak{q}_i^m + \mathfrak{q}_j^m = A$ e, ponendo $\prod_{i \neq j} \mathfrak{q}_j = \mathfrak{u}_i$, $\sum_{i=1}^{h} \mathfrak{u}_i = A$, donde risulta l'esistenza di elementi $e_i^{(n)} \subset \mathfrak{u}_i^{n+1}$ con le proprietà

$$({*}{*}{*}) \qquad \begin{gathered} 1 = \sum_{i=1}^{h} e_i^{(n)}, \quad e_i^{(n)} \cdot e_j^{(n)} \subset \mathfrak{p}_0^{n+1} \cdot A \ (i \neq j) \\ e_i^{(n)} - e_i^{(n+1)} = -\sum_{j \neq i} (e_j^{(n)} - e_j^{(n+1)}) \subset \mathfrak{p}_0^{n+1} \cdot A, \quad e^{(n)} \subset \mathfrak{p}_j^{n+1}\ (i \neq j), \end{gathered}$$

le quali permettono di definire con $(\varepsilon_i)_n = e_i^{(n)} + \mathfrak{p}_0^{n+1} \cdot A$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ elementi ε_i soddisfacenti alle relazioni

$$(+) \qquad \sum_{i=1}^{h} \varepsilon_i = 1, \quad \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j = 0 \ (i = j), \ \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i = \varepsilon_i.$$

Si osservi ora, che da $z_{ij} \subset \mathfrak{u}_i$ si deriva $z_{ij} \cdot e_l^{(n)} \subset \mathfrak{p}_0 \cdot A$ $(i \neq l)$. Ponendo per $l \neq i$ $(\alpha_{ijl})_n = p_0^{-1} \cdot z_{ij} \cdot e_l^{(n+1)} + \mathfrak{p}_0^{n+1} \cdot A$. $(\mathfrak{p}_0 = p_0 \cdot s_0)$, si definiscono, pertanto e di seguito a $({}^{*}_{**})$, elementi $\alpha_{ijl} \in \mathfrak{A}$ per cui vale $(p_0 \cdot \alpha_{ijl})_n = z_{ij} \cdot$ $\cdot e_l^{(n+1)} + \mathfrak{p}_0^{n+1}$ $A = z_{ij} \cdot e_l^{(n)} + \mathfrak{p}_0^{n+1} \cdot A = (\zeta_{ij} \cdot \varepsilon_l)_n$, cioè $\zeta_{ij} \cdot \varepsilon_l = p_0 \cdot \alpha_{ijl}$ $(i \neq l)$, donde si deriva, tenuto conto di $\mathfrak{A} = \sum\limits_{i,j} s_0^* \cdot \zeta_{ij} = \sum\limits_{i,j,l} s_0^* \cdot \zeta_{ij} \cdot \varepsilon_l$, la relazione $\mathfrak{A} = \sum\limits_{i,j} s_0^* \cdot \zeta_{ij} \cdot \varepsilon_i + \mathfrak{p}_0^* \cdot \mathfrak{A}$ che a sua volta induce (ved. 268)

$$(++) \qquad \mathfrak{A} = \sum_{i,j} s_0^* \cdot \zeta_{ij} \cdot \varepsilon_i .$$

IV. Di seguito a $(**)$ possiamo applicare il teorema 277 e ricavarne

$$({}^{+}_{++}) \qquad s_i^* = \sum_{j=1}^{n_i} s_0^* \cdot z_{ij},$$

dove z_{ij}, considerati come elementi di s_i^*, sono definiti da $(z_{ij})_n = z_{ij} + \mathfrak{p}_i^{n+1}$ e linearmente indipendenti sopra l'individualità s_0^* immersa in s_i^* mediante l'isomorfismo σ associante le approssimazioni $x_n + \mathfrak{p}_0^{n+1}$ e $x_n + \mathfrak{p}_i^{n+1}$ $(x_n \in s_0)$.

Questo σ può estendersi a tutto l'anello $\mathfrak{A}$, definendo l'estensione σ_i di σ con l'effetto

$$\sigma_i: \qquad (\alpha)_n = a_n + \mathfrak{p}_0^{n+1} \cdot A \rightarrow a_n + \mathfrak{p}_i^{n+1} \qquad (\alpha \in \mathfrak{A}, \ a_n \in A).$$

Da $(\varepsilon_j)_n = e_j^{(n)} + \mathfrak{p}_0^{n+1} \cdot A \subset \mathfrak{p}_i^{n+1}$ $(j \neq i)$ segue allora, che σ_i annulla ε_j $(j \neq i)$ e muta pertanto $\varepsilon_i = 1 - \sum\limits_{j \neq i} \varepsilon_j$ nell'elemento uno di s_i^*. L'immagine

$$(\text{o}) \qquad \mathfrak{A}^{\sigma_i} = \sum_{i,j} s_0^* \cdot \zeta_{ij}^{\sigma_i} \cdot \varepsilon_i^{\sigma_i} = \sum_{j=1}^{n_i} s_0^* \cdot z_{ij}$$

è quindi tutto l'anello s_i^* dato da $({}^{+}_{++})$.

Le relazioni $(+)$ mostrano che $\mathfrak{A} \cdot \varepsilon_i$ è sotto-anello di $\mathfrak{A}$ e uguale a

$$\mathfrak{A} \cdot \varepsilon_i = \sum_{j=1}^{n_i} s_0^* \cdot \zeta_{ij} \cdot \varepsilon_i$$

secondo $(++)$, mentre (o) insegna $(\mathfrak{A} \cdot \varepsilon_i)^{\sigma_i} = s_i^*$.

Poichè $(\sum\limits_j \gamma_{ij} \cdot \zeta_{ij} \cdot \varepsilon_i)^{\sigma_i} = \sum\limits_j \gamma_{ij} \cdot z_{ij}$ $(\gamma_{ij} \in s_0^*)$, l'omomorfismo σ_i ristretto a $\mathfrak{A} \cdot \varepsilon_i$, è isomorfismo di $\mathfrak{A} \cdot \varepsilon_i$ su s_i^*, il quale fa corrispondere le approssimazioni

$$a_n \cdot e_i^{(n)} + \mathfrak{p}_0^{n+1} \cdot A \quad \text{e} \quad a_n + \mathfrak{p}_i^{n+1},$$

sicchè la decomposizione $\mathfrak{A} = \sum\limits_i \mathfrak{A} \cdot \varepsilon_i$ può interpretarsi nel senso $\mathfrak{A} = \sum s_i^*$ esposto nel teorema da dimostrare. L'affermazione, che questa somma è diretta, significa, che ogni elemento $\alpha \in \mathfrak{A}$ è somma $\Sigma\alpha_i$ con $\alpha_i \in \mathfrak{A} \cdot \varepsilon_i$, nella quale α_i è unico di seguito alla conseguenza $\alpha \cdot \varepsilon_i = \alpha_i$ di tale decomposizione. Essa significa di più la validità delle regole

$$(\sum_i \alpha_i) + (\sum_i \beta_i) = \sum_i (\alpha_i + \beta_i) \qquad (\alpha_i, \beta_i \in \mathfrak{A} \cdot \varepsilon_i).$$

279. Agli anelli $\mathfrak{A}$, s_i^* considerati nel teorema precedente si applicano le osservazioni **276**, risp. **277**, che insegnano

$$(\mathfrak{A}) = \sum_{i,j} (s_0^*) \cdot \zeta_{ij} \cdot \varepsilon_i, \quad (s_i^*) = \sum_{j=1}^{n_i} (s_0^*) \cdot z_{ij},$$

nelle quali relazioni si consideri l'individualità s_0^* come sotto-anello comune di quegli anelli, identificando gli elementi aventi in $\mathfrak{A}$ le approssimazioni $a_n + \mathfrak{p}_0^{n+1} \cdot A$, in s_i^* le approssimazioni $a_n + \mathfrak{p}_i^{n+1}$ $(a_n \in A)$.

Gli anelli suddetti ammettono il calcolo delle norme e traccie relative al loro sotto-corpo comune (s_0^*) (ved. **59**).

Valendosi della decomposizione $\alpha = \alpha \cdot (\Sigma\varepsilon_i) = \sum_i \alpha \cdot \varepsilon_i$ di un elemento qualunque di $(\mathfrak{A})$, si ottengono relazioni del tipo

$$(*) \qquad \alpha \cdot \zeta_{ij} \cdot \varepsilon_i = \sum_{l=1}^{n_i} \gamma_{ijl} \cdot \zeta_{il} \cdot \varepsilon_i \qquad (j=1, 2, \ldots, n_i,\ i=1, 2, \ldots, h),$$

dalle quali si derivano, applicando l'isomorfismo σ_i introdotto in **278** IV, o piuttosto la sua estensione a $(\mathfrak{A})$, le relazioni

$$(**) \qquad \alpha \cdot z_{ij} = \sum_{l=1}^{n_i} \gamma_{ijl} \cdot z_{il} \qquad \text{valide in } (s_i^*).$$

Calcolato secondo **59** mediante le formule $(**)$, la norma $N\alpha$ di α in (s_i^*) relativa a (s_0^*) sarà l'i-esimo fra i determinanti parziali

$$\begin{vmatrix} \gamma_{i11} & \gamma_{i12} & \gamma_{i1n_i} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{in_i1} & & \gamma_{in_in_i} \end{vmatrix} \qquad (i = 1, 2, \ldots, h),$$

in cui si spezza il determinante fornito da $(*)$ per la norma $N\alpha$ di α in $(\mathfrak{A})$ relativa a (s_0^*). Ciò dimostra il teorema seguente:

Sotto le premesse del teorema **278** *valgono per ogni* $\alpha \in (\mathfrak{A})$ *le formule*

$$N_{\frac{(\mathfrak{A})}{(s_0^*)}} \alpha = \prod_{i=1}^{h} N_{\frac{(s_i^*)}{(s_0^*)}} \alpha \quad , \quad T_{\frac{(\mathfrak{A})}{(s_0^*)}} \alpha = \sum_{i=1}^{h} T_{\frac{(s_i^*)}{(s_0^*)}} \alpha$$

(purchè s'identifichino gli elementi $\alpha \in s_0^*$, s_i, $\mathfrak{A}$ definiti rispettivamente da $(\alpha)_n = a_n + \mathfrak{p}_0^{n+1}$, $a_n + \mathfrak{p}_i^{n+1}$, $a_n + \mathfrak{p}_0^{n+1} \cdot A$, $(a_n \in s_0)$).

280. *Sia* s_0 *perfetto e* S *oggetto primario e finito sopra il corpo* (s_0) (cioè di rango $\frac{S}{(s_0)}$ finito), *mentre* $\mathfrak{p}$ *sia prospettiva non-totale di* S. *algebrica sopra* s_0 (ved. **266**). *Se* $\mathfrak{p}_i$ $(i = 1, \ldots, h)$ *sono tutte le estensioni di* $\mathfrak{p}$ *con un dato insieme finito* E *di elementi di* S, *integri sopra* s, *allora valgono le regole:*

$$N_{\frac{(s^*)}{(s_0^*)}} \xi = \prod_{i=1}^{h} N_{\frac{(s_i^*)}{(s_0^*)}} \xi \quad , \quad T_{\frac{(s^*)}{(s_0^*)}} \xi = \sum_{i=1}^{h} T_{\frac{(s_i^*)}{(s_0^*)}} \xi$$

per ogni $\xi \in (s^*)$, (purchè s'identifichino gli elementi ξ di s_0^*, s^*. s_i^* definiti rispettivamente da $(\xi)_n = x_n + \mathfrak{p}_0^{n+1}$, $x_n + \mathfrak{p}^{n+1}$, $x_n + \mathfrak{p}_i^{n+1}$, $x_n \in s_0$).

DIMOSTRAZIONE - I. Dalle ipotesi su $\mathfrak{p}$ e $\mathfrak{p}_0$ segue $\mathfrak{p} \to \mathfrak{p}_0$. Il ragionamento **267** I. si applica al caso presente $s \to s_0$ e dimostra che $\left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot s}{s}\right)_{s_0} = q$ è finito, sicchè $s = \sum_{i=1}^{q} s_0 \cdot y_i + \mathfrak{p}_0 \cdot s$ e in conseguenza (ved. **277**)

$$(*) \qquad (s^*) = \sum_{i=1}^{q} (s_0^*) \cdot y_i = s \cdot (s_0^*).$$

Essendo l'anello $A = [s, E]$ un s-modulo finito, esso avrà di seguito a $\left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot s}{s}\right)_{s_0}$ finito una s_0-base finita mod $\mathfrak{p}_0 \cdot A$ e permette pertanto l'applicazione dei teoremi **276** e **279**, dei quali l'uno insegna

$$(**) \qquad \mathfrak{A} = A/(\mathfrak{p}_0 \cdot A)^\infty = A \cdot s_0^* \quad , \quad (\mathfrak{A}) = A \cdot (s_0^*)$$

mentre l'altro fornisce

$$({}^{*}_{**}) \qquad N_{\frac{(\mathfrak{A})}{(s_0^*)}} \xi = \prod_{i=1}^{h} N_{\frac{(s_i^*)}{(s_0^*)}} \xi \qquad \text{per} \quad \xi \in (\mathfrak{A})$$

(e la corrispondente formula riguardo alle traccie), perchè, come dimostreremo in II., $\mathfrak{p}_i$ $(i = 1, \ldots, h)$ sono appunto tutte le estensioni di $\mathfrak{p}_0$ aventi la base A.

II. Si tratta di dimostrare, che $V(A) \supset \mathfrak{p}' \to \mathfrak{p}_0$ equivale a $V(A) \supset \mathfrak{p}' \to \mathfrak{p}$.

Sia $V(A) \supset \mathfrak{p}' \to \mathfrak{p}_0$. Se l'insieme $\mathfrak{p}' \cap s \supset \mathfrak{p}' \cap s_0 = \mathfrak{p}_0 \neq 0$ che di seguito a $A \supset s$ è ideale primo in s, non fosse $\mathfrak{p}$, esso individuerebbe (ved. **73**) una prospettiva $\mathfrak{p}'' > \mathfrak{p}$ non totale, contrario al fatto ord $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{p}} = 1$ (ved. **267** I). Quindi $V(A) \supset \mathfrak{p}' \to \mathfrak{p}_0$ induce $V(A) \supset \mathfrak{p}' \to \mathfrak{p}$, e l'inverso risulta da $\mathfrak{p} \to \mathfrak{p}_0$.

III. Supposto il rango $\frac{S}{(s_0)}$ finito, vale $S = (s) = s \cdot (s_0)$, (come si vede p. es. con le conclusioni esposte in **267** V).

Se fosse $p_0^{-r} \cdot s \subset A$ per ogni $r > 0$, sarebbe $(s_0) \cdot s \subset A \subset S = (s_0) \cdot s$, il che si esclude a causa di $A \subset \mathrm{I}\left(\frac{S}{s}\right) \mp S$. (Si osservi p. es. $p_0^{-1} \subset\!\!\!\!\mid\; \mathrm{I}\left(\frac{S}{s}\right)\right)$. Esiste dunque una potenza p_0^r tale che

$$(+) \qquad p_0^r \cdot A \subset s$$

IV. L'ideale $\mathfrak{p}_0 \cdot s$ individua in $V(s)$ una figura $(\mathfrak{p}_0 \cdot s)$, di cui $\mathfrak{P}$ certo non è prospettiva, perchè $\mathfrak{p}_0 \cdot s \subset\!\!\!\!\mid\; \mathfrak{P}$. Ne risulta, che $\mathfrak{p}$, in quanto prospettiva immediata (ved. II), è la sola prospettiva di $(\mathfrak{p}_0 \cdot s)$, sicchè l'ideale $\mathfrak{p}_0 \cdot s$ è primario e pertanto superiore a una potenza $\mathfrak{p}^e$:

$$(++) \qquad \mathfrak{p}_0 \cdot s \supset \mathfrak{p}^e.$$

V. le relazioni (+) e (++) permettono di interpretare s^* come sotto-anello di $\mathfrak{A}$.

All'uopo si associ a $\xi \in s^*$ definito da $(\xi)_n = x_n + \mathfrak{p}^{n+1}$ $(x_n \in s)$ l'elemento $\alpha \in \mathfrak{A}$ definito da $(\alpha)_n = x_{ne+e} + \mathfrak{p}_0^{n+1} \cdot A$.

Da (++) segue, che α è determinato da ξ in modo unico, sicchè si tratta di un omomorfismo, mentre (+) insegna che $\alpha = 0$, equivalente a $x_{ne+e} \subset \mathfrak{p}_0^{n+1} \cdot A$, induce $x_{ne+e} \cdot p_0^r \subset \mathfrak{p}_0^{n+1} \cdot s$, cioè $x_{ne+e} \subset \mathfrak{p}_0^{n+1-r} \cdot s$, $(\xi)_n = (\xi)_{ne+e+nr} + \mathfrak{p}^{n+1} \subset \subset \mathfrak{p}_0^{n+r+1-r} \cdot s + \mathfrak{p}^{n+1}$, equivalente a $\xi = 0$. Identificando l'immagine α di ξ sotto quell'omomorfismo, ormai riconosciuto quale isomorfismo, con ξ, si rende s^* sotto-anello di $\mathfrak{A}$.

VI. Ciò posto, concludiamo da (+) che $A \cdot (s_0^*) \subset s \cdot (s_0^*)$, mentre $A \supset s$ induce la situazione inversa e con ciò (ved. $(*)$ e $(**)$)

$$(\mathfrak{A}) = A \cdot (s_0^*) = s \cdot (s_0^*) = (s^*),$$

il che significa, tenuto conto di $({}_{**}^{*})$, le formule da dimostrare.

L'applicazione di queste formule presuppone l'interpretazione di $\xi \in (\mathfrak{A}) = s \cdot (s_0^*)$ come elemento di (s_i^*), definita in **279**, la quale identifica ogni elemento $x \in s$ (avente in $\mathfrak{A}$ le approssimazioni $(x)_n = x + \mathfrak{p}_0^{n+1} \cdot A$) all'elemento $x \in s_i$ dato da $(x)_n = x + \mathfrak{p}_i^{n+1}$, cioè all'idea di x in s_i^*. Poichè l'immersione di s^* in $\mathfrak{A}$, descritta in V, altresì identifica x con la sua idea rispettiva, la validità di quelle formule è completamente definita, dicendo, che l'argomento ξ sia ogni volta quell'elemento $\Sigma\, c_l \cdot y_l$ $(c_l \in (s_0^*))$ del rispettivo oggetto (s_i^*), che si ottiene da una (qualsiasi) espressione $\sum_i c_l \cdot y_l$ dell'elemento $\xi \in (s^*) = \Sigma\, (s_0^*) \cdot y_l$, sostituendo a $y_l \in s$ la sua idea in s_i^*.

281. *Sotto le premesse del teorema* 280 *vale*

$$\left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot s}{s}\right)_{s_0} = \sum_{i=1}^{h} \left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot s_i}{s_i}\right)_{s_0}.$$

280 — 281

Dimostrazione. - Se $s = \sum_i s_0 \cdot y_i + \mathfrak{p}_0 \cdot r$ con $n = \left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot s}{s}\right)_{s_0}$, avremo (ved. **277**) $s = \sum_i s_0^* \cdot y_i$ con $y_1, \dots, y_n$ linearmente indipendenti sopra (s_0^*). Quindi

$$N_{\frac{(s^*)}{(s_0^*)}}\, p_0 = p_0^{\,n}, \quad N_{\frac{(s_i^*)}{(s_0^*)}}\, p_0 = p_0^{\,n_i}, \quad n_i = \left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot s_i}{s_i}\right)_{s_0},$$

donde si deriva con la regola dimostrata in **280** $p_0^{\,n} = \prod_i p_0^{\,n_i}$ e con ciò la relazione da dimostrare.

282. *Se una estensione completa* $\bigcup_{i=1,\dots,h} \mathfrak{p}_i \to \mathfrak{p}_0$ *di una prospettiva perfetta* $\mathfrak{p}_0$ *è contenuta in una varietà aritmetica* V, *il cui oggetto* S *è primario e finito sopra* (s_0), *allora valgono le regole*

$$N_{\frac{S}{(s)}}\, x = \prod_i N_{\frac{(s_i^*)}{(s_0^*)}}\, x, \quad T_{\frac{S}{(s)}}\, x = \sum_i T_{\frac{(s_i^*)}{(s_0^*)}}\, x$$

per ogni $x \in S$. *Le stesse relazioni valgono sotto le premesse più generali del teorema* **266**.

Dimostrazione. - Soddisfatte le premesse di **266** che sono anche quelle di **267**, possiamo riprendere le notazioni usate in **267**.

Il teorema **266** assicura l'esistenza di un anello $A \supset s_0$ di s_0-base finita, col quale si costruiscono le situazioni

$$(*) \qquad V(A) \supset \bigcup_{i,j} \mathfrak{p}_{ij} \to \mathfrak{p}_0$$

$$(**) \qquad V(A_i) \supset \bigcup_{j} \mathfrak{p}_{ij} \to \mathfrak{p}_i \qquad (A_i = [A, s_i]).$$

I. Siccome $\bigcup_{i,j} \mathfrak{p}_{ij}$ è la totalità delle estensioni di $\mathfrak{p}_0$ aventi la base A (ved. **250** fine), il quale anello è del tipo presupposto in **279**. avremo, ponendo $A/(\mathfrak{p}_0 \cdot A)^\infty = \mathfrak{A}$, le formule

$$({}^{\,*}_{**}) \qquad N_{\frac{(\mathfrak{A})}{(s_0^*)}}\, \alpha = \prod_{i,j} N_{\frac{(s_{ij}^*)}{(s_0^*)}}\, \alpha, \quad T_{\frac{(\mathfrak{A})}{(s_0^*)}}\, \alpha = \sum_{i,j} T_{\frac{(s_{ij}^*)}{(s_0^*)}}\, \alpha$$

per ogni $\alpha \in (\mathfrak{A}) = A \cdot (s_0^*)$, nelle quali si calcolano le norme e traccie, sostituendo a ogni elemento di A la sua idea nella rispettiva individualità s_{ij}^*.

II. Poichè l'anello A è generato da s_0 e un insieme finito di elementi integri sopra s_0, e quindi sopra s_i, le prospettive $\mathfrak{p}_{ij}$ $(j = 1,2,\dots)$ costituiscono una completa (ved. **262**) estensione di $\mathfrak{p}_i$ soddisfacente alle premesse del teorema **280**, sicchè valgono le relazioni

$$\prod_j \underset{(s_i^*)}{N_{(s_{ij}^*)}} \alpha = \underset{(s_0^*)}{N_{(s_i^*)}} \alpha, \qquad \sum_j \underset{(s_0^*)}{T_{(s_{ij}^*)}} \alpha = \underset{(s_0^*)}{T_{(s_i^*)}} \alpha$$

per ogni $\alpha \in (s_i^*)$, mediante le quali le formule $\binom{*}{**}$ si semplificano in

$$(+) \qquad \underset{(s_0)}{N_{(\mathfrak{A})}} \alpha = \prod_i \underset{(s_0)}{N_{(s_i^*)}} \alpha, \qquad \underset{(s_0)}{T_{(\mathfrak{A})}} \alpha = \sum_i \underset{(s_0)}{T_{(s_i^*)}} \alpha$$

III. In quanto s_0-modulo, l'anello A ha una s_0-base linearmente indipendente (ved. **99**), e questa sarà, secondo l'osservazione **268**, anche linearmente indipendente mod $\mathfrak{p}_0 \cdot A$, sicchè essa serve a calcolare col procedimento esposto in **59** le norme e traccie, tanto in S relativamente a (s_0), quanto in $(\mathfrak{A})$ relativamente a (s_0^*), essendo essa anche s_0^*-base linearmente indipendente di $\mathfrak{A}$. (Ved. **276**).

Qualora x sia elemento di S, come presuppone il teorema da dimostrare, troveremo quindi

$$(++) \qquad \underset{(s)}{N_S}\, x = \underset{(s_{0*})}{N_{(\mathfrak{A})}}\, x, \qquad \underset{(s)}{T_S}\, x = \underset{(s_0^*)}{T_{(\mathfrak{A})}}\, x$$

in un senso tale, che per $x \in A$ i membri destri sono le idee dei membri sinistri di queste equazioni. Da (+) e (++) seguono le relazioni asserite nel teorema suddetto,

§ 4. **Differenti relative.**

283. Una varietà V estensione di una varietà V_0 (ved. **250**) sarà distinta come *estensione algebrica* della V_0, allora e soltanto allora, che ogni prospettiva $\mathfrak{P} \in V$ ha una base anello algebrico sopra la proiezione $S_0 \leftarrow S$ dell'aspetto S.

Rammentiamo che varietà estensioni si considerano soltanto nel caso di varietà primarie. Se S è l'oggetto di tale varietà V, chiameremo $S/\mathfrak{P}$, cioè il soggetto della prospettiva totale di V, il *corpo della varietà* V, e la caratteristica di questo sarà detta *la caratteristica della varietà.*

Una varietà aritmetica è ovviamente estensione algebrica di ogni varietà, di cui essa sia semplicemente estensione.

284. Sia V varietà estensione algebrica della varietà V_0.

I differenti relativi n-esimi

$$\mathfrak{d}_n\left(\frac{s_0}{s}\right) \qquad V \ni s \to s_0 \in V_0$$