Invero, la prospettiva $\mathfrak{P} \in V$ individua (ved. **73**) in $s_0 \subset S$ una prospettiva $\mathfrak{P}_0$ di cui $\mathfrak{P}$ è estensione, sicchè $S_0 \supset s_0$ è la proiezione di S.

Corollario. - Da $s \subset S$ in V segue $s_0 \subset S_0$ per le proiezioni $s_0 \leftarrow s$, $S_0 \leftarrow S$ in $V_0 \quad V$.

255. Ogni figura $\mathfrak{a}$ in una varietà V_0 si estende in modo unico a una figura $\mathfrak{a}$ in una varietà estensione $V \rightarrow V_0$, ponendo

$$\mathfrak{a}(S) = \mathfrak{a}(S_0) \cdot S, \quad \text{se} \quad S \rightarrow S_0 .$$

Invero, da $s \subset S$ in V segue (ved. **254**) $s_0 \subset S_0$ per le corrispondenti proiezioni, sicchè si può concludere $\mathfrak{a}(S_0) = \mathfrak{a}(s_0) \cdot S_0$, essendo $\mathfrak{a}$ figura in V_0. Ciò mostra che $\mathfrak{a}(s) = \mathfrak{a}(s_0) \cdot s$ e $\mathfrak{a}(S) = \mathfrak{a}(S_0) \cdot S$ stanno nella relazione $\mathfrak{a}(S) = \mathfrak{a}(s) \cdot S$ caratteristica per gli ideali di una figura in V.

Designeremo di solito la *figura estensione* che in questo modo si deriva da una data figura in V_0 con lo stesso segno come questa.

Si verifica subito, che ciascuna delle relazioni

$$\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$$

rimane valida per le figure estensioni $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ in $V \rightarrow V_0$, qualora essa sia vera per le figure $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ in V_0.

Quanto alla relazione $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ in V_0, essa certo induce $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \leq \mathfrak{c}$ in $V \rightarrow V_0$, poichè per $s \quad s_0$ vale $\mathfrak{a}(s) \cap \mathfrak{b}(s) = \mathfrak{a}(s_0) \cdot s \cap \mathfrak{b}(s_0) \cdot s \supset [\mathfrak{a}(s_0) \cap \mathfrak{b}(s_0)] \cdot s = \mathfrak{c}(s)$, ma non si può garantire uguaglianza nel caso generale.

§ 2. Estensioni complete.

256. Definizione. - Conviene definire anche nel caso in cui V_i designi un sistema qualunque, varietà o no, di prospettive di un medesimo oggetto primario (V_i) la situazione

$$V_1 \text{ è completa estensione di } V_0 \text{ (scriviamo: } V_1 \rightarrow V_0)$$

come quella, nella quale siano soddisfatte le condizioni I e II stabilite in **250** per le varietà, aggiungendo però la postulazione (implicità nel caso di varietà) che ogni $\mathfrak{P}_1 \in V_1$ non estenda che una sola $\mathfrak{P}_0 \in V_0$.

Questa definizione è d'accordo con quella data in **250** per il caso particolare dell'estensione completa contenuta in una varietà V_1 di una prospettiva $\mathfrak{P}_0$ contenuta in una varietà $V_0 \leftarrow V_1$.

Notiamo ancora: se una estensione completa $\bigcup_i \mathfrak{p}_i$ di una prospettiva $\mathfrak{p}_0$ è contenuta in una varietà V_1, essa è unica (e coincide pertanto nel caso di $\mathfrak{p}_0 \in V_0 \leftarrow V_1$ con quella definita in **250**, fine). Infatti se anche $\bigcup_j \mathfrak{p}_j' \subset V_1$ è completa estensione di $\mathfrak{p}_0$, si conclude da $\mathfrak{p}_i \to \mathfrak{p}_0$ l'esistenza di $\mathfrak{p}_i \leftarrow \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}_j'$, il che esige (ved. **111**) $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_j'$, e viceversa da $\mathfrak{p}_i' \to \mathfrak{p}_0$ si conclude $\mathfrak{p}_i' = \mathfrak{p}_h$.

257. Volendo stabilire taluni teoremi su estensioni complete, premetteremo una serie di lemmi riferentisi al simbolo $\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right)$, che definiamo ormai, estendendo le considerazioni di **208**, per s-moduli qualunque $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ come la lunghezza l di una sequenza $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{a}_l = \mathfrak{b}$ di s-moduli $\mathfrak{a}_i$, irriducibile nel senso che sia $\mathfrak{a}_i \neq \mathfrak{a}_{i+1}$ $(i > 0)$ e che non esista un s-modulo intermedio fra $\mathfrak{a}_i$ e $\mathfrak{a}_{i+1}$ diverso da questi. Sarà necessario talvolta di rilevare l'ipotesi che $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ sono da considerare come s-moduli, scrivendo $\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right)_s$ invece di $\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right)$.

La condizione necessaria e sufficiente affinchè una sequenza $\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{a}_l$ *sia irriducibile è*

$$(*) \qquad \mathfrak{a}_{i+1} = \mathfrak{a}_i + a_{i+1} \cdot s \quad \text{con} \quad a_{i+1} \not\subset \mathfrak{a}_i, \quad a_{i+1} \cdot \mathfrak{p} \subset \mathfrak{a}_i.$$

L'esistenza di $a_{i+1} \in \mathfrak{a}_{i+1}$, $a_{i+1} \not\subset \mathfrak{a}_i$, è necessario per $\mathfrak{a}_{i+1} \neq \mathfrak{a}_i$. Se fosse $a_{i+1} \cdot \mathfrak{p} \not\subset \mathfrak{a}_i$, si avrebbe $\mathfrak{a}_i \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{a}_i + a_{i+1} \cdot \mathfrak{p} \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{a}_i + a_{i+1} \cdot s \subset \mathfrak{a}_{i+1}$ e quindi una sequenza riducibile. L'affermazione reciproca si dimostra letteralmente come in **209**.

258. *Per s-moduli* $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ *vale nel caso di* $\mathfrak{p} \to \mathfrak{p}_0$: $\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right)_{s_0} = \left(\frac{\mathfrak{p}}{s}\right)_{s_0} \cdot \left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right)$. *Se* $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ *e l'ideale* $\mathfrak{a} \cap s_0$ *è primo mentre* $\left(\frac{\mathfrak{a}}{s}\right)_{s_0}$ *è finito, l'anello* $s/\mathfrak{a}$ *è* $s_0/\mathfrak{p}_0$*-modulo di rango* $\left(\frac{\mathfrak{a}}{s}\right)_{s_0}$.

DIMOSTRAZIONE. - I. Siano $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{a}_l$ con $\mathfrak{a}_{i+1} = \mathfrak{a}_i + a_{i+1} \cdot s$ sequenza irriducibile di s-moduli, e $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}_0 \subset \mathfrak{y}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{y}_f = s$ con $\mathfrak{y}_{j+1} = \mathfrak{y}_j + y_{j+1} \cdot s_0$ sequenza irriducibile di s_0-moduli. Ponendo

$$\mathfrak{a}_{ij} = \mathfrak{a}_i + a_{i+1} \cdot \mathfrak{y}_j \qquad (0 \leq i < l,\ 0 \leq j \leq f)$$

si ha $\mathfrak{a}_{i,j+1} = \mathfrak{a}_{ij} + a_{i+1} \cdot y_{j+1} \cdot s_0$ e $a_{i+1} \cdot y_{j+1} \cdot \mathfrak{p}_0 \subset a_{i+1} \cdot \mathfrak{y}_j \subset \mathfrak{a}_{ij}$, mentre $a_{i+1} \cdot y_{j+1} \subset \mathfrak{a}_{ij}$ darebbe $a_{i+1} \cdot (y_{j+1} + \sum_{h \leq j} y_h \cdot c_h) \subset \mathfrak{a}_i$, $(c_l \in s_0)$ e quindi $y_{j+1} + \sum_{h \leq j} y_h \cdot c_h \subset \mathfrak{p}$ contrario all'ipotesi $\mathfrak{y}_{j+1} \neq \mathfrak{y}_j$. Ciò mostra $\left(\frac{\mathfrak{a}_{ij}}{\mathfrak{a}_{i,\,j+1}}\right)_{s_0} = 1$ e quindi, tenuto conto di $\mathfrak{a}_{if} = \mathfrak{a}_{i+1,0} = \mathfrak{a}_{i+1}$,

$$(*) \qquad \left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}_l}\right)_{s_0} = \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{f-1} \left(\frac{\mathfrak{a}_{ij}}{\mathfrak{a}_{i,\,j+1}}\right)_{s_0} = l \cdot f.$$

Se $\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right)_s$ è finito, si può prendere $\mathfrak{a}_l = \mathfrak{b}$, cioè $l = \left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right)_s$, e allora $(*)$ constata la prima delle formule da dimostrare. Qualora però $\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right)_s$ sia infinito, l può essere scelto quanto grande si voglia, il che dimostra che in questo caso anche $\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right)_{s_0}$ è infinito.

II. Per dimostrare la seconda affermazione, osserviamo che nel caso di $\left(\frac{\mathfrak{a}}{s}\right)_{s_0} = l$ finito $\neq 0$ si ha $s = \mathfrak{a} + \sum_{i=1}^{l} a_i \cdot s_0$ $(a_i \in s)$, sicchè $s/\mathfrak{a}$ risulta $s_0 + \mathfrak{a}/\mathfrak{a}$-modulo con l elementi base $a_i + \mathfrak{a}$. Ora $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ implica $\mathfrak{a} \frown s_0 \subset \mathfrak{p} \frown s_0 = \mathfrak{p}_0$, sicchè

$$(**) \qquad x_0 + \mathfrak{a} \rightarrow x_0 + \mathfrak{p}_0 \qquad (x_0 \in s_0)$$

definisce un omomorfismo di $s_0 + \mathfrak{a}/\mathfrak{a}$ sul corpo $s_0/\mathfrak{p}_0$.

Siccome l'ipotesi che $\left(\frac{\mathfrak{a}}{s}\right)_{s_0}$ sia finito induce $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{p}^m$ con un certo m, l'ideale primo $\mathfrak{a} \frown s_0$ conterrà $\mathfrak{p}^m \frown s_0 \supset (\mathfrak{p} \frown s_0)^m = \mathfrak{p}_0{}^m$ e coincide pertanto con $\mathfrak{p}_0$. Trattandosi quindi in $(**)$ di un isomorfismo, possiamo stabilire

$$(x_0 + \mathfrak{p}_0) \cdot (z + \mathfrak{a}) = (x_0 + \mathfrak{a}) \cdot (z + \mathfrak{a}) \quad \text{per ogni} \quad x_0 \in s_0,\ z \in s$$

con l'effetto, che $s/\mathfrak{a}$ diventa $s_0/\mathfrak{p}_0$-modulo con la base $a_i + \mathfrak{a}$ $(i = 1, \dots, l)$, che subito si verifica essere indipendente, dato che una relazione lineare $(a_{i+1} + \mathfrak{a}) + \sum_{j \leq i} (c_j + \mathfrak{p}_0) \cdot (a_j + \mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$ equivarrebbe alla seguente: $a_{i+1} + \sum_{j \leq i} c_j \cdot a_j \subset \mathfrak{a}$, esclusa dall'ipotesi $\left(\frac{\mathfrak{a}}{s}\right)_{s_0} = l$.

259. Definizioni. – Gli oggetti primarii potendosi considerare come aspetti (ved. **81**), scriveremo talvolta S, s, ecc. per tali oggetti e, di seguito a questo, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{p}$, ecc. per i loro radicali. Il fatto, ugualmente constatato in **81**, che un oggetto primario è estensione di ogni sua sotto-oggetto, ci permette di generalizzare la nozione di *grado relativo* al caso di oggetti primarii $S \supset s$ con la definizione

$$\text{grado}\,\frac{S}{s} = \left(\frac{\mathfrak{P}}{S}\right)_s = \text{grado}\,\frac{S/\mathfrak{P}}{s + \mathfrak{P}/\mathfrak{P}},$$

aggiungendo però due altre nozioni, superflue nel caso di corpi, e cioè il *rango relativo* definito da

$$\text{rango}\,\frac{S}{s} = \left(\frac{0}{S}\right)_s$$

e la *molteplicità* di S

$$\text{molt. } S = \left(\frac{0}{S}\right)_S$$

legate a quella mediante la relazione

$$\text{rango}\,\frac{S}{s} = \text{grado}\,\frac{S}{s} \cdot \text{molt. } S$$

che subito segue dall'applicazione di **258**.

Sarà utile notare che ogni elemento di un oggetto primario di rango r relativo a un suo sotto-oggetto s soddisfa ad un'equazione algebrica di grado r con coefficienti in s, il primo coefficiente essendo 1.

260. *Se l'oggetto* (s) *è primario di rango* $\frac{(s)}{(s_0)}$ *finito,* s_0 *essendo perfetto, e se l'anello* A *intermedio fra* s *e* (s) *ha* s*-base finita, allora vale*

$$\left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot A}{A}\right)_{s_0} = \left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot s}{s}\right)_{s_0} \quad \textit{supposto finito.}$$

DIMOSTRAZIONE. - I. Se $\left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot s}{s}\right)$ è finito, sicchè $s = \sum_{i=1}^{h} s_0 \cdot y_i + \mathfrak{p}_0 \cdot s$ (e quindi $s = \sum_{i=1}^{h} s_0 \cdot y_i + \mathfrak{p}_0^m \cdot s$), anche A avrà s_0-base finita mod $\mathfrak{p}_0 \cdot A$:

$$(*) \qquad A = \sum_{i=1}^{n} s_0 \cdot z_i + \mathfrak{p}_0 \cdot A \text{ (e quindi } A = \sum_{i=1}^{n} s_0 \cdot z_i + \mathfrak{p}_0^m \cdot A).$$

Qualora in una relazione $\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot z_i \subset \mathfrak{p}_0 \cdot A$ $(c_i \in s_0)$ sia p. es. $c_1 \not\subset \mathfrak{p}_0$, l'elemento z_1 sarà superfluo in quella base. Supponendo n minimo, possiamo affermare che da

$$(**) \qquad \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot z_i \subset \mathfrak{p}_0^m \cdot A \ (c_i \in s_0) \text{ segue } c_i \subset \mathfrak{p}_0^m \qquad (i = 1, \dots, n).$$

Infatti, si conclude dapprima, ponendo $\mathfrak{p}_0 = p_0 \cdot s_0$, che ogni $c_i = p_0 \cdot c_i'$ con $c_i' \in s_0$. Poichè p_0 è attivo in $A \subset (s)$, si ottiene $\sum_{i=1}^{n} c_i' \cdot z_i \subset \mathfrak{p}_0^{m-1} \cdot A$, e proseguendo in questo modo si dimostra $(**)$.

Mediante gli s_0-moduli

$$\mathfrak{a}_{ik} = \mathfrak{p}_0^m \cdot A + \sum_{j<i} s_0 \cdot z_j + \mathfrak{p}_0^k \cdot z_i \subset \mathfrak{a}_{i,k-1} = \mathfrak{a}_{ik} + p_0^{k-1} \cdot z_i \cdot s_0 \qquad \begin{matrix}(1 \leq i \leq n)\\(1 \leq k \leq m)\end{matrix}$$

dove $\mathfrak{a}_{i0} = \mathfrak{a}_{i+1,m}$, si calcola (ved. 257)

$$\left(\frac{\mathfrak{p}_0^m \cdot A}{A}\right)_{s_0} = m \cdot n.$$

dato che $p_0^{k-1} \cdot z_i \cdot \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{a}_{ik}$ e che $p_0^{k-1} \cdot z_i \subset \mathfrak{a}_{ik}$ equivarrebbe a una relazione $(p_0^{k-1} + p_0^k \cdot c) \cdot z_i + \sum_{j<i} c_j \cdot z_j \subset \mathfrak{p}_0^m \cdot A$ (con c, $c_j \in s_0$) impossibile secondo $(**)$.

Supponendo anche h minimo, potremo applicare $(**)$ al caso di $A = s$, $n = h$, $z_i = y_i$, trovando in particolare $h = \left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot s}{s}\right)_{s_0}$.

II. Sia $b \in s$ non-infinitesimale e $e_0 + e_1 \cdot b + \ldots + e_l \cdot b^l = 0$ ($e_i \in s_0$, $e_l \neq 0$) con l $\left(\leq \text{rango } \frac{(s)}{(s_0)}\right)$ minimo. Allora $c' = -e_1 - \ldots - e_l \cdot b^{l-1} \neq 0$ e quindi $b \cdot c' = = e_0 \neq 0$. Ne concludiamo che per ogni $b \in s$ non-infinitesimale si troverà $c \in s$ tale che $b \cdot c = p_0^r$.

Applicando questa osservazione al numeratore comune b degli elementi base $w_i = \frac{a_i}{b}$ $(i = 1, \ldots, q)$, $(a_i \in s)$, dell'anello $A = \sum_{i=1}^{q} s \cdot w_i$, avremo

$$({}^{*}_{**}) \qquad p_0^r \cdot A \subset s.$$

III. L'ipotesi $A \supset s = \sum_{i=1}^{h} s_0 \cdot y_i + \mathfrak{p}_0^m \cdot s$ permette di scrivere (ved. I) $A = \sum_{i=1}^{h+n} s_0 \cdot y_i + \mathfrak{p}_0^m \cdot A$ con $y_{h+i} = z_i$. Mediante gli s_0-moduli

$$\mathfrak{a}_{ik} = \mathfrak{p}_0^m \cdot A + \sum_{j<i} s_0 \cdot y_j + \mathfrak{p}_0^k \cdot y_i \subset \mathfrak{a}_{i,k-1} = \mathfrak{a}_{ik} + p_0^{k-1} \cdot y_i \cdot s_0$$

$(1 \leq i \leq h + n,\ 1 \leq k \leq m)$ soddisfacenti alle relazioni $\mathfrak{a}_{i0} = \mathfrak{a}_{i+1,m}$ si ottiene

$$\left(\frac{\mathfrak{p}_0^m \cdot A}{A}\right)_{s_0} = \sum_{i=1}^{h} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\mathfrak{a}_{ik}}{\mathfrak{a}_{i,k-1}}\right)_{s_0} + \sum_{i=h+1}^{h+n} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\mathfrak{a}_{ik}}{\mathfrak{a}_{i,k-1}}\right)_{s_0}.$$

Ora, ogni termine di queste somme è ≤ 1, quelli della seconda somma essendo 0 per $k > r$, poichè secondo $({}^{*}_{**})$

$$p_0^{k-1} \cdot y_i \subset p_0^{k-r-1} \cdot s \subset \sum_{j=1}^{h} s_0 \cdot y_j + \mathfrak{p}_0^m \cdot s \subset \mathfrak{a}_{ik} \quad \text{per} \quad i > h.$$

Ne risulta (ved. I.)

$$(+) \qquad \left(\frac{\mathfrak{p}_0^m \cdot A}{A}\right)_{s_0} = m \cdot n \leq m \cdot h + r \cdot n.$$

Dall'altra parte si osservi, che $\mathfrak{a}_{ik} = \mathfrak{a}_{i,k-1}$ è impossibile per $i \leq h$, $k \leq m - r$ poichè allora si avrebbe una relazione $(p_0^{k-1} + c \cdot p_0^k) \cdot y_i + \sum_{j<i} c_j \cdot y_j \subset \subset \mathfrak{p}_0^m \cdot A \subset \mathfrak{p}_0^{m-r} \cdot s$ $(c, c_j \in s_0)$, la quale esigerebbe secondo $(**)$ (applicato al caso di $A = s$), che $k - 1 \geq m - r$. Quindi $\left(\frac{\mathfrak{a}_{ik}}{\mathfrak{a}_{i,k-1}}\right) = 1$ per $i \leq h$, $k \leq m - r$, epperò

$$(++) \qquad \left(\frac{\mathfrak{p}_0^m \cdot A}{A}\right)_{s_0} \geq h \cdot (m - r),$$

sicchè, dato l'arbitrarietà di m, da $(+)$ e $(++)$ segue

$$n = \left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot A}{A}\right)_{s_0} = h = \left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot s}{s}\right)_{s_0}$$

c. d. d.

261. *Se per un sopra-anello primario A di un aspetto s_0 $\left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot A}{A}\right)_{s_0}$ è finito, si ha*

$$\left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot A}{A}\right)_{s_0} = \sum_s \left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot s}{s}\right)_{s_0},$$

la somma estesa a tutte le estensioni $s \rightarrow s_0$ di base A.

Dimostrazione. - I. Poichè $\left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot A}{A}\right)_{s_0}$ è finito, si ha

$$(*) \qquad A = \sum_{i=1}^{n} s_0 \cdot w_i + \mathfrak{p}_0 \cdot A,$$

e l'anello $A/\mathfrak{p}_0 \cdot A$ è noetheriano.

Sia $\mathfrak{c} \supset \mathfrak{p}_0 \cdot A$ ideale primo e designi x un elemento di A non contenuto in $\mathfrak{c}$. Questo x soddisfa, come ogni elemento di A, a una congruenza $|x \cdot \delta_{ij} - a_{ij}| \subset \mathfrak{p}_0 \cdot A \subset \mathfrak{c} (a_{ij} \in s_0)$, conseguenza di $x \cdot w_i \subset \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot w_j + \mathfrak{p} \cdot A$, la quale, scritta nella forma $\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i \subset \mathfrak{c}$, $(a_i \in s_0,\ a_n = 1)$, fornisce

$$(**) \qquad x^m \cdot (a_m + \ldots) \subset \mathfrak{c},$$

se a_m è il primo coefficiente a_i non contenuto in $\mathfrak{p}_0$. Da $(**)$ e $x \,\mathfrak{c}\!\!|\!\!\subset \mathfrak{c}$ segue $a_m + \ldots \subset \mathfrak{c}$ cioè $a_m \subset \mathfrak{c} + x \cdot A$ e finalmente $A = \mathfrak{c} + x \cdot A$.

Ciò dimostra che ogni ideale primo $\mathfrak{c} \supset \mathfrak{p}_0 \cdot A$ è massimale.

II. Sia $\mathfrak{p}_0 \cdot A = \bigcap_{i=1,\dots,h} \mathfrak{q}_i$ decomposizione noetheriana con $\mathfrak{q}_i$ $\mathfrak{c}_i$-primario. Allora $\mathfrak{c}_i + \mathfrak{c}_j = A$ secondo I (per $i \neq j$) e quindi

$$\sum_{i=1}^{h} \mathfrak{a}_i = A \text{ se } \mathfrak{a}_i = \bigcap_{j \neq i} \mathfrak{q}_j .$$

Si scelgano $e_i \in \mathfrak{a}_i$ soddisfacenti a $\sum_{i=1}^{h} e_i = 1$, sicchè $A = \sum_{i=1}^{h} A \cdot e_i$. Sia

$$(\ast_{\ast\ast}) \qquad A \cdot e_i = \sum_{j=1}^{n_i} s_0 \cdot z_{ij} + \mathfrak{p}_0 \cdot A \cap A \cdot e_i$$

con $z_{ij} \in A \cdot e_i$ $(j=1,\dots, n_i)$ linearmente indipendenti mod $\mathfrak{p}_0 \cdot A \cap A \cdot e_i$ sopra s_0. Allora $A = \sum_{i,j} s_0 \cdot z_{ij} + \mathfrak{p}_0 \cdot A$ e

$$(+) \qquad \text{da } \sum_{i,j} a_{ij} \cdot z_{ij} \subset \mathfrak{p}_0 \cdot A \quad (a_{ij} \in s_0) \quad \text{segue } a_{ij} \subset \mathfrak{p}_0 ,$$

poichè $z_{lj} \subset \mathfrak{a}_l \subset \mathfrak{q}_i$ per $l \neq i$ induce $\sum_j a_{ij} \cdot z_{ij} \subset \mathfrak{q}_i$, e quindi, di seguito a $z_{ij} \subset \mathfrak{q}_l$ $(l \neq i)$, $\sum_j a_{ij} \cdot z_{ij} \subset \mathfrak{p}_0 \cdot A$, cioè finalmente $a_{ij} \subset \mathfrak{p}_0$ a causa dell'indipendenza lineare mod $\mathfrak{p}_0 \cdot A \cap A \cdot e_i$ di $z_{i1}, \dots, z_{in_i}$.

Dall'osservazione (+) si deduce

$$(++) \qquad \left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot A}{A}\right)_{s_0} = \sum_i n_i .$$

III. Designi $\mathfrak{p}_i$ la prospettiva di base A, individuata da $\mathfrak{c}_i = \mathfrak{p}_i \cap A$. Essendo $1 = \sum_i e_i$, mentre $e_l \subset \mathfrak{q}_i \subset \mathfrak{p}_i$ $(l \neq i)$, sarà $e_i \not\subset \mathfrak{p}_i$, e da $e_i \cdot e_l \subset \bigcap_j \mathfrak{q}_j = \mathfrak{p}_0 \cdot A$ segue $e_l \subset \mathfrak{p}_0 \cdot s_i$ e pertanto

$$(^{+}_{++}) \qquad A = \sum_j A \cdot e_j = A \cdot e_i + \mathfrak{p}_0 \cdot s_i .$$

Ora, $s_i \in V(A)$ induce $s_i/\mathfrak{p}_i = (A + \mathfrak{p}_i/\mathfrak{p}_i) = A + \mathfrak{p}_i/\mathfrak{p}_i$ poichè quest'ultimo anello ha $s_0 + \mathfrak{p}_i/\mathfrak{p}_i$-base finita. Tenuto conto di $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{c}_i \cdot s_i$, si deriva da $s_i = A + \mathfrak{p}_i$, successivamente:

$$s_i = A + \mathfrak{c}_i \cdot [A + \mathfrak{p}_i] = A + \mathfrak{p}_i^2 = \dots = A + \mathfrak{p}_i^L \qquad (L \text{ qualunque}),$$

e siccome per L abbastanza grande sarà $\mathfrak{c}_i^L \subset \mathfrak{q}_i$, $e_i \cdot \mathfrak{c}_i^L \subset \mathfrak{p}_0 \cdot A$ e quindi $\mathfrak{p}_i^L \subset \mathfrak{p}_0 \cdot s_i$, avremo secondo $(^{+}_{++})$ e $(\ast_{\ast\ast})$:

$$(\circ) \qquad s_i = A + \mathfrak{p}_0 \cdot s_i = A \cdot e_i + \mathfrak{p}_0 \cdot s_i = \sum_{j=1}^{n_i} s_0 \cdot z_{ij} + \mathfrak{p}_0 \cdot s_i .$$

Se fosse $\mathfrak{p}_0 \cdot s_i + \sum_{j<l} s_0 \cdot z_{ij} = \mathfrak{p}_0 \cdot s_i + \sum_{j \leq l} s_0 \cdot z_{ij}$, si troverebbe $z_{il} = \sum_{j<l} b_j \cdot z_{ij} + p_0 \cdot \frac{b}{a}$ con $b_j \in s_0$, $p_0 \in \mathfrak{p}_0$, $a, b \in A$, $a \not\subset \mathfrak{p}_i$, cioè $a \cdot (z_{il} - \sum_{j<l} b_j \cdot z_{ij}) \subset \mathfrak{p}_0 \cdot A \subset \mathfrak{q}_i$.

$a \not\subset \mathfrak{c}_i = \mathfrak{p}_i \cap A$, il che esigerebbe, dato che $\mathfrak{q}_i$ è $\mathfrak{c}_i$-primario, $z_{il} - \sum_{j<l} b_j \cdot z_{ij} \subset \mathfrak{q}_i$ epperò $\subset \mathfrak{p}_0 \cdot A$, poichè $z_{ij} \subset \mathfrak{q}_l$ $(l \neq i)$. Ma ciò contraddirebbe all'osservazione (+).

Da (o) segue ormai $\left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot s_i}{s_i}\right)_{s_0} = n_i$ e quindi, tenuto conto di (++),

$$\left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot A}{A}\right) = \sum_{i=1}^{h} \left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot s_i}{s_i}\right)_{s_0}.$$

IV. L'ipotesi $s \to s_0$, $s \in V(A)$ induce $\mathfrak{p} \cap A \supset \mathfrak{p}_0 \cdot A$ epperò $\mathfrak{p} \cap A \supset \mathfrak{c}_i$ con un certo i, ma essendo $\mathfrak{c}_i = \mathfrak{p}_i \cap A$ massimale, (ved. I.), esso coincide con $\mathfrak{p} \cap A$, sicchè $\mathfrak{p}$ è identico a $\mathfrak{p}_i$. Viceversa, ogni $\mathfrak{p}_i$ estende $\mathfrak{p}_0$, poichè $s_0 \neq \mathfrak{p}_i \cap s_0 \supset \mathfrak{p}_0$ esige $\mathfrak{p}_i \cap s_0 = \mathfrak{p}_0$.

262. *Se l'anello primario $A \supset s$ ha s-base finita, esiste un numero finito di estensioni di $\mathfrak{p}$ con A, e la loro totalità è completa estensione di $\mathfrak{p}$.*

DIMOSTRAZIONE. – La prima affermazione risulta dall'applicazione del teorema precedente a $\mathfrak{p}$ invece di $\mathfrak{p}_0$.

Ogni aspetto $S' \to s$ compatibile con l'oggetto (A) di A ammette una estensione S'' con A, dato che gli elementi di A sono integri sopra s (ved. **83** e **76**). Secondo **74** si troverà allora la situazione

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{P}'' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathfrak{P}' \arrow[dr] & & \mathfrak{P} \in V(A) \arrow[dl] \\ & \mathfrak{p} & \end{tikzcd}$$

caratterizzante la totalità delle prospettive $\mathfrak{P}$ soddisfacenti a $\mathfrak{P} \to \mathfrak{p}$, $\mathfrak{P} \in V(A)$ quale completa estensione di $\mathfrak{p}$.

263. *Se l'integrità $I\left(\frac{K}{s}\right)$ di un corpo K relativa ad un aspetto perfetto s ha s-base finita e K è finito sopra (s), ogni estensione $\mathfrak{P}$ di $\mathfrak{p}$ soddisfacente a $K \supset S \supset I\left(\frac{K}{s}\right)$, è prospettiva perfetta di base $I\left(\frac{K}{s}\right)$, e la varietà $V\left(I\left(\frac{K}{s}\right)\right)$ estende la stella $V(s)$:*

$$(*) \qquad V\left(I\left(\frac{K}{s}\right)\right) \to V(s).$$

DIMOSTRAZIONE. – I. Sia $\mathfrak{P} \to \mathfrak{p}$ con $K \supset S \supset I\left(\frac{K}{s}\right)$, quale prospettiva certo esiste secondo **83**, e designi $\mathfrak{P}' \leftarrow \mathfrak{P}$ la prospettiva individuata da $\mathfrak{P}$ in $I\left(\frac{K}{s}\right)$. Allora $\mathfrak{P}'$ è perfetta (ved. **125** e **127**) e quindi uguale alla $\mathfrak{P}$ che pertanto appartiene alla varietà $V\left(I\left(\frac{K}{s}\right)\right)$.

II. Ogni $\mathfrak{P} \in V\left(I\left(\frac{K}{s}\right)\right)$ soddisfa a $\mathfrak{P} \cap s = \mathfrak{p}$ o 0, poichè in s non ci sono altri ideali primi diversi da s. Ne risulta, che tutte le prospettive nella varietà $V\left(I\left(\frac{K}{s}\right)\right)$ sono estensioni dell'una o dell'altra fra le due prospettive di cui è costituita la stella $V(s)$.

III. Se $S' \to s' \in V(s)$ è compatibile con K, esso ammette (ved. **83**) di seguito a $s \subset s' \subset K$ una estensione S'' con $I\left(\frac{K}{s}\right)$, la quale estende (ved. **73**) un aspetto $S \in V\left(I\left(\frac{K}{s}\right)\right)$.

Le osservazioni II e III dimostrano (*).

264. La transitività del procedimento di estensione dimostrata in **251** per il caso di varietà, non si può garantire generalmente, quando si tratta semplicemente di sistemi di prospettive di un medesimo oggetto primario. Questo fatto rende utile una nozione più debole di quella designata con $V_1 \to V_0$ in **256**.

Scriveremo

$$V_1 \rightharpoonup V_0$$

per indicare, che il sistema V_1 soddisfa in riguardo al sistema V_0 alle condizioni I e II stabilite in **250**, ma che si rinuncia alla postulazione (fatta nel caso $V_1 \to V_0$), che ogni $\mathfrak{P}_1 \in V_1$ estenda solamente una $\mathfrak{P}_0 \in V_0$. Vale allora la transitività

$$\textit{Da } V_2 \rightharpoonup V_1,\ V_1 \rightharpoonup V_0 \textit{ segue } V_2 \rightharpoonup V_0,$$

che si dimostra letteralmente come in **251**, sostituendovi il segno $\rightharpoonup$ al segno $\to$, ovunque questo combini sistemi di prospettive.

Il teorema **111** permette di affermare:

Se $V_1 \rightharpoonup V_0$ *e* V_0 *è contenuto in una varietà, allora* $V_1 \to V_0$. Sarà utile notare ancora:

$$\textit{Da } V_i \rightharpoonup V_i' \ (i = 1, 2, \ldots) \textit{ segue } \bigcup_i V_i \rightharpoonup \bigcup_i V_i' \textit{ purchè}$$
$$(V_i) = (V_j),\ (V_i') = (V_j'),\ (i, j = 1, 2, \ldots).$$

Avvertiamo finalmente, per evitare un eventuale equivoco, che il simbolo $\mathfrak{P} \to \mathfrak{p}$ designa generalmente che la prospettiva $\mathfrak{P}$ è estensione di $\mathfrak{p}$, e che l'altra possibilità d'intendere questo simbolo, e cioè che $\mathfrak{P}$ sia completa estensione di $\mathfrak{p}$, non vale che quando ciò sia detto espressamente.

265. *Applicando un omomorfismo* $\tau : S \to S/\mathfrak{Q}$ *determinato da un ideale* $\mathfrak{P}$*-primario* $\mathfrak{Q}$, *agli aspetti* s, s', S *supposti nella relazione*

$$s \in V(A), \quad S \in V(s), \quad S \in V(s'), \quad s \to s',$$

si ottengono aspetti s^τ, s'^τ, di S^τ nella relazione

$$s^\tau \in V(A^\tau), \quad S^\tau \in V(s^\tau), \quad S^\tau \in V(s'^\tau), \quad s^\tau \to s'^\tau.$$

DIMOSTRAZIONE. - Secondo **216** II sono s^τ, s'^τ aspetti di S^τ, e **216** III insegna $s^\tau \in V(A^\tau)$, $S^\tau \in V(s^\tau)$, $S^\tau \in V(s'^\tau)$.

Da $1^\tau \not\subseteq \mathfrak{p}^\tau$ segue $s'^\tau \neq \mathfrak{p}^\tau \cap s'^\tau$, mentre $\mathfrak{p} \cap s' = \mathfrak{p}'$ fornisce $\mathfrak{p}^\tau \cap s'^\tau \supset$ $\supset [\mathfrak{p} \cap s']^\tau = \mathfrak{p}'^\tau$, sicchè $\mathfrak{p}^\tau \cap s'^\tau$ non può essere che $\mathfrak{p}'^\tau$.

266. Per indicare , che una prospettiva abbia base aritmetica (risp. algebrica sopra un anello A), la chiameremo *prospettiva aritmetica* (risp. *prospettiva algebrica sopra* A), e similmente diremo l'aspetto corrispondente.

Se una completa estensione $\bigcup\limits_{i=1,\dots,h} \mathfrak{p}_i$ *di una prospettiva perfetta* $\mathfrak{p}_0$ *è contenuta in una varietà algebrica sopra* s_0, *il cui oggetto* S *sia primario di rango finito sopra il corpo* (s_0), *e se l'integrità relativa* $I\left(\dfrac{S^\tau}{s_0^\tau}\right)$ *del corpo* S^τ *ottenuto da* S *mediante l'omomorfismo* $\tau: S \to S/\mathfrak{P}$ *ha* s_0^τ*-base finita, il che certo capita, quando* $\mathfrak{p}_0$ *è aritmetica o che* S^τ *sia separabile sopra* (s_0^τ), *allora esiste un anello* A *in* S, *di base finita sopra* s_0 *e tale, che la varietà* $V(A)$ *contiene una completa estensione di* $\bigcup\limits_i \mathfrak{p}_i$ *e quindi di* $\mathfrak{p}_0$.

DIMOSTRAZIONE. - I. Sia $I\left(\dfrac{S^\tau}{s_0^\tau}\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} s_0^\tau \cdot z_i^\tau$ con $z_i \in S$.

Siccome ogni $x \in \sum\limits_{i=1}^{n} s_0 \cdot z_i + \mathfrak{P}$ soddisfa ad una congruenza

$$x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \dots + a_n \subset \mathfrak{P} \qquad (\text{con } a_i \in s_0),$$

esso soddisferà anche ad un'equazione

$$(x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \dots + a_n)^L = 0 \qquad (L \text{ abbastanza grande}).$$

Ne risulta, che l'anello $B = [s_0, z_1, \dots, z_n]$ ha s_0-base finita, sicchè l'anello $[s_i, B]$ avrà s_i-base finita. Esiste quindi una estensione completa $\bigcup\limits_j \mathfrak{p}_{ij}$ di $\mathfrak{p}_i$ con la base $[s_i, B]$ (ved. **262**). L'unione $\bigcup\limits_{i,j} \mathfrak{p}_{ij}$ di queste estensioni è allora completa estensione di $\bigcup\limits_i \mathfrak{p}_i$ e quindi (ved. **264**) di $\mathfrak{p}_0$, poichè $\bigcup\limits_{i,j} \mathfrak{p}_{ij} \to \bigcup\limits_i \mathfrak{p}_i$ e quest'ultimo sistema è contenuto in una varietà (ved. **264**).

Avremo la situazione

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathfrak{p}_{ij} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathfrak{p}_i \arrow[dr, dashed] & & \mathfrak{p}'_{ij} \in V(B). \arrow[dl, dashed] \\ & \mathfrak{p}_0 & \end{tikzcd}$$

dalla quale si deduce, applicando l'omomorfismo τ, (ved. **265**), $\mathfrak{p}_{ij}^\tau \to \mathfrak{p}'^\tau_{ij} \in V(B^\tau)$.

Ora, essendo s'^{τ}_{ij} perfetto in conseguenza a $B^{\tau} = \sum_{l=1}^{n} s_0^{\tau} \cdot z_l^{\tau} = I\left(\frac{S^{\tau}}{s_0^{\tau}}\right)$ (ved. **263**), si trova $s^{\tau}_{ij} = s'^{\tau}_{ij}$, cioè $s_{ij} \subset s'_{ij} + \mathfrak{P}$ e finalmente

$$(*) \qquad s_i \subset s'_{ij} + \mathfrak{P}.$$

II. Supposte le prospettive $\mathfrak{p}_i$ algebriche sopra s_0, sia

$$(**) \qquad s_i = V([s_0, x_{i1}, \ldots, x_{im}]).$$

Secondo $(*)$ e $s'_{ij} \in V(B)$ avremo

$$({}^{\,*}_{**}) \qquad x_{ij} - \frac{a_{ij}}{b_{ij}} = p_{ij} \subset \mathfrak{P}, \quad \text{con} \quad a_{ij},\ b_{ij} \in B,\ b_{ij} \subset\!\!|\!\!= \mathfrak{p}'_{ij} = \mathfrak{p}_{ij} \frown s''_{j}$$

e quindi $b_{ij} \subset\!\!|\!\!= \mathfrak{p}_{ij}$.

L'anello A generato da s_0 e da tutti gli elementi z_i, p_{ij} ovviamente integri sopra s_0, ha s_0-base finita, e ogni $\mathfrak{p}_{ij}$ può estendersi con $A \subset I\left(\frac{S}{s_0}\right)$ (ved. **83** e **76**), precisamente a una sola prospettiva $\bar{\mathfrak{p}}_{ij}$. Invero, ogni ideale primo $\mathfrak{c} \supset \mathfrak{p}_{ij} \cdot [s_{ij}, A]$ (ved. **80**) contiene tutti gli elementi (infinitesimali) p_{kl}, sicchè esso è identico all'ideale generato da $\mathfrak{p}_{ij}$ e da quelli p_{kl}, dato che questo ideale è massimale.

Tenuto conto di **262**, ne segue $\bar{\mathfrak{p}}_{ij} \rightharpoonup \mathfrak{p}_{ij}$ e quindi $\bigcup_{i,j} \bar{\mathfrak{p}}_{ij} \rightharpoonup \bigcup_{i,j} \mathfrak{p}_{ij}$ e finalmente $\bigcup_{i,j} \bar{\mathfrak{p}}_{ij} \rightharpoonup \bigcup_{i} \mathfrak{p}_i$ (ved. **264**).

Concludiamo dapprima da $(**)$, che ogni elemento della base $[s_{ij}, A]$ di $\bar{\mathfrak{p}}_{ij}$ è quoziente $\frac{u}{v}$ con $u \in [s_0, x_{i1}, \ldots, x_{im}, A]$, $v \in [s_0, x_{i1}, \ldots, x_{im}]$ $v \subset\!\!|\!\!= \mathfrak{p}_{ij} = \bar{\mathfrak{p}}_{ij} \frown s_{ij}$ e quindi $v \subset\!\!|\!\!= \bar{\mathfrak{p}}_{ij}$. Applicando **75** possiamo dedurne, che $[s, x_{i1}, \ldots, x_{im}, A]$ è base di $\bar{\mathfrak{p}}_{ij}$. Ora $({}^{\,*}_{**})$ insegna, che ogni x_{ij} è quoziente $\frac{u}{v}$ con $u \in A$, $v \in B \subset A$, $v \subset\!\!|\!\!= \mathfrak{p}_{ij} = \bar{\mathfrak{p}}_{ij} \frown s_{ij}$, cioè $v \subset\!\!|\!\!= \bar{\mathfrak{p}}_{ij}$, sicchè nuova applicazione di **75** dimostra, che A è base di $\bar{\mathfrak{p}}_{ij}$.

Il fatto $V(A) \supset \bigcup_{i,j} \bar{\mathfrak{p}}_{ij} \rightharpoonup \bigcup_{i} \mathfrak{p}_i$ è quel che volevasi dimostrare.

III. Se il corpo S^{τ} è separabile sopra (s_0^{τ}), si ricava da **103** che

$$(+) \qquad I\left(\frac{S^{\tau}}{s_0^{\tau}}\right) \text{ ha } s_0^{\tau}\text{-base finita.}$$

Quando però S^{τ} è inseparabile sopra (s_0^{τ}), la stessa proprietà $(+)$ può affermarsi almeno nel caso in cui $\mathfrak{p}_0$ sia aritmetica. Si osservi all'uopo, che da $s_0 \in V([1, x_1, \dots, x_m])$ si deduce per ogni $y \in s_0^{\tau p^{-1}}$ una rappresentazione

$$y = \frac{f(x_1^{\tau p^{-1}}, \dots, x_m^{\tau p^{-1}})}{g(x_1^{\tau p^{-1}}, \dots, x_m^{\tau p^{-1}})} = \frac{f(x_1^{\tau p^{-1}}, \dots, x_m^{\tau p^{-1}}) \cdot g(x_1^{\tau p^{-1}}, \dots, x_m^{\tau p^{-1}})^{p-1}}{g(x_1^{\tau}, \dots, x_m^{\tau})}$$

$$(p = \operatorname{car} S^{\tau},\ g(x_1, \dots, x_m) \,\bar{\in}\, \mathfrak{p}_0)$$

con $f(X)$, $g(X) \in [1, X_1, \dots, X_m]$, dalla quale segue che $s_0^{\tau p^{-1}} = [s_0, x_1^{\tau p^{-1}}, \dots$ $\dots, x_m^{\tau p^{-1}}]$ ha s_0^{τ}-base finita e che quindi sono soddisfatte le premesse del teorema **104**.

267. *Sotto le ipotesi del teorema* **266** *vale la relazione*

$$\sum_{i=1}^{h} \left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot s_i}{s_i}\right)_{s_0} = \operatorname{rango} \frac{S}{(s_0)}$$

oppure (ved. **258**)

$$\sum_{i=1}^{h} \left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot s_i}{s_i}\right) \cdot \operatorname{grado} \frac{s_i/\mathfrak{p}_i}{s_0 + \mathfrak{p}_i/\mathfrak{p}_i} = \left(\frac{0}{S}\right) \cdot \operatorname{grado} \frac{S}{(s_0)}.$$

DIMOSTRAZIONE. - I. Sia $s \to s_0$ aspetto qualunque in S di base algebrica sopra s_0. Poichè S è di rango finito sopra (s_0), il corpo S^{τ} è finito sopra (s_0^{τ}), e siccome s_0^{τ} è perfetto, l'aspetto $s^{\tau} \supset s_0^{\tau}$ sarà immediato (ved. **218**):

$$(*) \qquad \operatorname{ord} \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{p}} = \operatorname{ord} \frac{\mathfrak{P}^{\tau}}{\mathfrak{p}^{\tau}} = 1.$$

Ora $\mathfrak{p}_0 \cdot S = S$ mostra, che $\mathfrak{P} \frown s$ non è divisore primo dell'ideale $\mathfrak{p}_0 \cdot s$. Rimanendo quindi solamente $\mathfrak{p}$ come divisore primo di $\mathfrak{p}_0 \cdot s$, questo ideale è $\mathfrak{p}$-primario e $\left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot s}{s}\right)$ risulta finito.

Con una base $B = [s_0, x_1, \dots, x_m]$ di $\mathfrak{p}$ si calcola

$$s/\mathfrak{p} = (s_0 + \mathfrak{p}/\mathfrak{p};\ x_1 + \mathfrak{p}, \dots, x_m + \mathfrak{p}).$$

Se questo corpo non fosse 0-dimensionale sopra $s_0 + \mathfrak{p}/\mathfrak{p}$, si troverebbe (ved. **137**) una estensione $\mathfrak{p}' \to \mathfrak{p}_0$ di base $B = [s_0, x_1, \dots, x_m]$ per la quale $\mathfrak{p}' \frown B \supset \mathfrak{p} \frown B$, cioè $\operatorname{ord} \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}'} \geq 1$ e quindi $\operatorname{ord} \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{p}'} \geq 2$, mentre $(*)$ si applica anche a $\mathfrak{p}'$ invece di $\mathfrak{p}$. Ne segue che $s/\mathfrak{p}$ è algebrico e 0-dimensionale sopra $s_0 + \mathfrak{p}/\mathfrak{p}$ e quindi

$$\left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot s}{s}\right)_{s_0} = \left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot s}{s}\right) \cdot \operatorname{grado} \frac{s/\mathfrak{p}}{s_0 + \mathfrak{p}/\mathfrak{p}} \text{ è finito.}$$

II. Sia $A \supset s_0$ un anello in S con s_0-base finita e tale, che

$$V(A) \supset \bigcup_{i,j} \mathfrak{p}_{ij} \rightarrow \bigcup_{i} \mathfrak{p}_i \rightarrow \mathfrak{p}_0 \qquad \text{(con } \mathfrak{p}_{ij} \rightarrow \mathfrak{p}_i\text{)}.$$

Essendo allora $\left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot A}{A}\right)_{s_0}$ finito, si può applicare il teorema **261**:

$$(**) \qquad \left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot A}{A}\right)_{s_0} = \sum_{\substack{s \rightarrow s_0 \\ s \in V(A)}} \left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot s}{s}\right)_{s_0} = \sum_{ij} \left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot s_{ij}}{s_{ij}}\right)_{s_0} \qquad \text{(ved. } \mathbf{256} \text{ fine)}.$$

Siccome l'anello $A_i = [s_i, A]$ intermedio fra s_i e $(s_i) = S$ ha s_i-base finita, avremo secondo **260**

$$({}^{*}_{**}) \qquad \left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot A_i}{A_i}\right)_{s_0} = \left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot s_i}{s_i}\right)_{s_0},$$

dato che il membro a destra è finito (ved. I).

III. Quest'ultimo fatto induce pure che s_i ha s_0-base finita mod $\mathfrak{p}_0 \cdot s_i$ e quindi A_i ha s_0-base finita mod $\mathfrak{p}_0 \cdot A_i$, il che permette di applicare **261** anche all'anello A_i trovando così

$$(+) \qquad \left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot A_i}{A_i}\right)_{s_0} = \sum_{\substack{s \rightarrow s_0 \\ s \in V(A_i)}} \left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot s}{s}\right)_{s_0}.$$

Dimostreremo che questa somma si estende precisamente a tutte le prospettive $\mathfrak{p}_{ij}$ $(j = 1, 2, \ldots)$.

Secondo **74** possiamo dedurre da $s \rightarrow s_0$, $s \in V(A_i)$ la configurazione

$$\begin{array}{ccc} & \mathfrak{p} \in V(A_i) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathfrak{p}' \in V(s_i) & & \mathfrak{p}'' \in V(A) \\ \searrow & & \swarrow \\ & \mathfrak{p}_0 & \end{array}$$

nella quale $\mathfrak{p}''$ non può essere che una delle prospettive $\mathfrak{p}_{kj}$, dato che $\bigcup_{i,j} \mathfrak{p}_{ij}$ comprende tutte le estensioni di $\mathfrak{p}_0$ contenute in $V(A)$ (ved. **256** fine).

Essendo ogni base di $\mathfrak{p}_i$ anche base di $\mathfrak{p}' \in V(s_i)$ (ved. **180**), la prospettiva $\mathfrak{p}' \rightarrow \mathfrak{p}_0$ soddisfa alle premesse di I e si ha ord $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{p}'} = 1$, il che, preso insieme con ord $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{p}_i} = 1$, $\mathfrak{p}' \geq \mathfrak{p}_i$, mostra $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}_i$. Abbiamo quindi la situazione

$$\begin{array}{ccc} & \mathfrak{p} & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathfrak{p}_i & & \mathfrak{p}_{kj} \rightarrow \mathfrak{p}_k, \end{array}$$

dalla quale si ricava $k = i$, giacchè $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_k$ appartengono a una medesima varietà (ved. **111**). Ne segue che $\mathfrak{p} \in V(A_i)$ estende $\mathfrak{p}_{ij}$. Ora $s_{ij} \supset s_i$, $s_{ij} \in V(A)$ mostrano $s_{ij} \in V(A_i)$, sicchè $\mathfrak{p}$ deve essere identica alla $\mathfrak{p}_{ij}$.

Viceversa, ogni $\mathfrak{p}_{ij}$ soddisfa alle condizioni $s_{ij} \to s_0$, $s_{ij} \in V(A_i)$ poste in (+) per s.

L'equazione (+) equivale dunque a

$$\left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot A_i}{A_i}\right)_{s_0} = \sum_j \left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot s_{ij}}{s_{ij}}\right)_{s_0} \quad \text{oppure (ved. } (\substack{*\\ **})) \text{ a} \quad \left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot s_i}{s_i}\right)_{s_0} = \sum_j \left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot s_{ij}}{s_{ij}}\right)_{s_0},$$

e la relazione $(**)$ assume la forma

$$\left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot A}{A}\right)_{s_0} = \sum_i \left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot s_i}{s_i}\right)_{s_0}.$$

IV. Dimostreremo ora che

$$\left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot A}{A}\right)_{s_0} = (s_0)\text{-rango dell'anello } [A, (s_0)] = A \cdot (s_0).$$

Scrivendo h per questo numero, avremo $A = \sum_{i=1}^{h} s_0 \cdot a_i + \mathfrak{p}_0 \cdot A$ (ved. **257**). Mediante una s_0–base di $A = \sum_{l=1}^{m} s_0 \cdot b_l$ se ne deducono equazioni del tipo $b_i = \sum_{j=1}^{h} c_{ij} \cdot a_j + \sum_{l=1}^{m} p_{il} \cdot b_l$ $(i = 1, \dots, m)$ con $c_{ij} \in s_0$, $p_{il} \in \mathfrak{p}_0$, le quali si risolvono nella forma $b_i \subset \sum_j s_0 \cdot a_j$ e insegnano pertanto $A = \sum_{i=1}^{h} s_0 \cdot a_i$. Supposto che gli elementi a_i non siano linearmente indipendenti, avremmo una relazione $\sum_{i=1}^{h} c_i \cdot a_i = 0$ con $c_i \in \mathfrak{p}_0^v = p_0^v \cdot s_0$ $(i = 1, \dots, h)$ e p. es. $c_1 \mathrel{\subset\!\!\!|\!=} \mathfrak{p}_0^{v+1}$. Dopo la divisione con $p_0^v (\mathrel{\subset\!\!\!|\!=} \mathfrak{P})$ otterremmo $a_1 \subset \sum_{i>1} s_0 \cdot a_i$ e quindi $A = \sum_{i>1} s_0 \cdot a_i$ contrario all'ipotesi $\left(\frac{\mathfrak{p}_0 \cdot A}{A}\right)_{s_0} = h$.

V. Rimane solamente a dimostrare $A \cdot (s_0) = S$.

Ogni elemento $z \in S$ è quoziente $\frac{u}{v}$ con $u \cdot v \in A$, $v \mathrel{\subset\!\!\!|\!=} \mathfrak{P}$, dato che $S = (s_i) = (s_{ij}) = (A)$. L'$(s_0)$–modulo $v \cdot A \cdot (s_0) \subset A \cdot (s_0)$ ha lo stesso rango h dell'(s_0)–modulo $A \cdot (s_0)$, poichè 1) da $A \cdot (s_0) = \sum_{i=1}^{h} (s_0) \cdot a_i$ segue $v \cdot A \cdot (s_0) = \sum_{i=1}^{h} (s_0) \cdot a_i \cdot v$ e 2) una dipendenza lineare $\sum_{i=1}^{h} c_i \cdot a_i \cdot v = 0$ $(c_i \in (s_0))$ indurrebbe $\sum_{i=1}^{h} c_i \cdot a_i = 0$ di seguito a $v \mathrel{\subset\!\!\!|\!=} \mathfrak{P}$. Vale dunque $v \cdot A \cdot (s_0) = A \cdot (s_0)$, il che mostra $v \cdot A \cdot (s_0) \supset 1$, cioè $v^{-1} \subset A \cdot (s_0)$, e finalmente $z = u \cdot v^{-1} \subset A \cdot (s_0)$.

268. Come corollario di **267** IV e V, utile in altre applicazioni, notiamo

***Se** s_0 **è perfetto e** A **un** s_0**–modulo con** s_0**–base finita, allora da** $A = \sum_{i=1}^{n} s_0 \cdot a_i + \mathfrak{p}_0 \cdot A$ **si può concludere** $A = \sum_{i=1}^{n} s_0 \cdot a_i$**, e nel caso in cui** A **sia sopra–anello primario di** s_0 **vale** $(A) = A \cdot (s_0)$.*

§ 3. **Anelli individuali.**

269. Ogni percezione $A/\mathfrak{c}$ di un anello A (ved. **63**) è il principio di una sequenza

$$A/\mathfrak{c},\ A/\mathfrak{c}^2,\ A/\mathfrak{c}^3, \dots$$

di percezioni $A/\mathfrak{c}^{n+1}$ di *precisione* n infinitamente crescente. Questa ascesa di anelli sbocca in un anello

$$A/\mathfrak{c}^\infty$$

individuale alla percezione $A/\mathfrak{c}$, definito nel modo seguente:

Ogni sequenza infinita del tipo

$$(*) \qquad a_0 + \mathfrak{c} \supset a_1 + \mathfrak{c}^2 \supset a_2 + \mathfrak{c}^3 \supset a_3 + \mathfrak{c}^4 \supset \dots \qquad (a_n \in A)$$

determina un elemento α di $A/\mathfrak{c}^\infty$, e viceversa. L'$(n+1)$–mo termine della sequenza, in quanto determinato da α e dalla precisione n, sarà designato con

$$(\alpha)_n$$

e si dirà *la* n*–esima approssimazione di* α.

I calcoli in $A/\mathfrak{c}^\infty$ si effettuano mediante le approssimazioni:

$$(\alpha + \beta)_n = (\alpha)_n + (\beta)_n, \qquad (\alpha \cdot \beta)_n = (\alpha)_n \cdot (\beta)_n .$$

Un elemento $a \in A$ *approssima* $\alpha \in A/\mathfrak{c}^\infty$ *con la precisione* n allora e soltanto allora che $a + \mathfrak{c}^{n+1} = (\alpha)_n$.

Ogni elemento a di A approssima uno ed un solo elemento α di $A/\mathfrak{c}^\infty$ con precisione infinita, e cioè quello dato dalla sequenza

$$(**) \qquad a + \mathfrak{c} \supset a + \mathfrak{c}^2 \supset a + \mathfrak{c}^3 \supset a + \mathfrak{c}^4 \dots$$

che chiameremo *l'idea di* a *in* $A/\mathfrak{c}^\infty$.

Le idee in $A/\mathfrak{c}^\infty$ di elementi di A costituiscono un sotto–anello di $A/\mathfrak{c}^\infty$ omomorfo all'anello A mediante l'associazione

$$A \ni a \to \alpha \in A/\mathfrak{c}^\infty \text{ con } (\alpha)_n = a + \mathfrak{c}^{n+1}.$$

Allora e soltanto allora che questo omomorfismo sia un isomorfismo, l'anello A diventa sotto–anello di $A/\mathfrak{c}^\infty$, identificando ogni elemento di A con la sua idea, identificazione che in tal caso sempre tacitamente supponiamo effettuata. La condizione necessaria e sufficiente affinchè sia $A \subset A/\mathfrak{c}^\infty$,