e finalmente

$$\chi(\mathfrak{a},\ m) = c \cdot m + c' + \sum_{r+1}^{m} \chi(\mathfrak{a} + A \cdot f,\ l).$$

Essendo $\chi(\mathfrak{a} + f \cdot A,\ m)$ per $m > m_1$ polinomio di grado $m < n$, la sua sommazione estesa da $m = r + 1$ fino a un $m > m_0 =$ massimo di $r + 1$ e m_1 darà per $\chi(\mathfrak{a},\ m)$ una espressione come polinomio di grado $\leq n = \dim(\mathfrak{a})$.

III. Per dimostrare che il grado di questo polinomio è appunto n, osserviamo che fra gli elementi $u_1, \ldots, u_h$ debbono trovarsi n, siano $u_1, \ldots, u_n$ tali che

$$(**) \qquad \mathfrak{a} \frown k[u_1, \ldots, u_n] = 0.$$

Se infatti ciò non si verificasse, se cioè per n qualunque presi $u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}$ si trovasse un polinomio $g(u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}) \neq 0,\ \in \mathfrak{a}$, si avrebbe per ogni $\mathfrak{P}_i$ la dipendenza algebrica

$$g(u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}) \subset \mathfrak{P}_i \frown A$$

fra $u_{i_1} + \mathfrak{P}_i, \ldots, u_{i_n} + \mathfrak{P}_i$ contrario all'ipotesi che per un $\mathfrak{P}_i$ almeno sia $\dim \mathfrak{P}_i = n$.

Ora da $(**)$ segue, che ci sono almeno $\binom{l + n - 1}{n - 1}$ forme di grado l linearmente indipendenti dalle $\varphi(\mathfrak{a},\ l)$ forme di grado l in $\mathfrak{a}$, cioè

$$\varphi(A,\ l) = \binom{l + h - 1}{h - 1} \geq \varphi(\mathfrak{a},\ l) + \binom{l + n - 1}{n - 1}$$

e quindi

$$\chi(\mathfrak{a},\ m) = \sum_{l=0}^{m} (\varphi(A,\ l) - \varphi(\mathfrak{a},\ l)) \geq \sum_{l=0}^{m} \binom{l + n - 1}{n - 1} = \binom{m + n}{n},$$

sicchè il grado del polinomio $\chi(\mathfrak{a},\ m)$ non può essere minore di $n = \dim(\mathfrak{a})$.

§ 7. Funzione caratteristica di una figura.

207. Definizioni. - La funzione caratteristica $\chi(\mathfrak{a}(s),\ m)$ di una figura $\mathfrak{a}$ in una varietà V associa a ogni prospettiva $\mathfrak{p} \in V$ e ogni numero intero $m \geq 0$, il valore

$$\chi(\mathfrak{a}(s),\ m) = \chi(\overline{\mathfrak{a}(s)},\ m)$$

della funzione caratteristica (ved. **201**) dell'ideale $\overline{\mathfrak{a}(s)}$ che individua il cono tangente $(\overline{\mathfrak{a}(s)})$ (ved. **197**) di $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{p}$.

206 — 207

Dall'osservazione **198** risulta che $\chi(\mathfrak{a}(s).\, m)$ non dipende dall'arbitrio nella scelta della base minima dell'ideale $\mathfrak{p}$.

La *dimensione in* $\mathfrak{p}$ *di una figura* $\mathfrak{a}$ è la dimensione del suo cono tangente in $\mathfrak{p}$ e quindi ugualmente indipendente dalla base minima di $\mathfrak{p}$.

208. Considerando gli ideali in un aspetto s come gruppi additivi che ammettono gli elementi di s come omomorfismi in sè (endomorfismi), si può applicare il teorema di JORDAN-HÖLDER-SCHREIER alle sequenze

$$\mathrm{I} \qquad \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{a}_l = \mathfrak{b}$$

di ideali $\mathfrak{a}_i$ in s e affermare che la lunghezza l di una tale sequenza fra $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ è indipendente dalla scelta particolare dei membri intermedi $\mathfrak{a}_i$, purchè la sequenza sia *irriducibile* nel senso, che $\mathfrak{a}_i \neq \mathfrak{a}_{i+1}$ e che non esista un ideale intermedio fra $\mathfrak{a}_i$ e $\mathfrak{a}_{i+1}$ diverso da questi.

Riprodurremo la dimostrazione di questo teorema seguendo un'idea di ZASSENHAUS:

Sia

$$\mathrm{II} \qquad \mathfrak{a} = \mathfrak{a}'_0 \subset \mathfrak{a}'_1 \subset \dots \subset \mathfrak{a}'_m = \mathfrak{b}$$

una sequenza qualunque fra $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}$ con $\mathfrak{a}'_k \neq \mathfrak{a}'_{k+1}$.

Intercalando entro $\mathfrak{a}_i$ e $\mathfrak{a}_{i+1}$ la sequenza

$$\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_{i+1} \cap \mathfrak{a}'_0 \subset \mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_{i+1} \cap \mathfrak{a}'_1 \subset \dots \subset \mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_{i+1} \cap \mathfrak{a}'_m = \mathfrak{a}_{i+1}$$

e entro $\mathfrak{a}'_k$ e $\mathfrak{a}'_{k+1}$ la sequenza

$$\mathfrak{a}'_k = \mathfrak{a}'_k + \mathfrak{a}'_{k+1} \cap \mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}'_k + \mathfrak{a}'_{k+1} \cap \mathfrak{a}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{a}'_k + \mathfrak{a}'_{k+1} \cap \mathfrak{a}_l = \mathfrak{a}'_{k+1}.$$

si ottengono due sequenze I', II' costituite tutte e due da $l \cdot m + 1$ termini (distinti o no).

Se $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_{i+1} \cap \mathfrak{a}'_k = \mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_{i+1} \cap \mathfrak{a}'_{k+1}$, ogni $x \in \mathfrak{a}_{i+1} \cap \mathfrak{a}'_{k+1}$ è somma $x = a_i + a'_k$ con $a'_k \in \mathfrak{a}'_k \subset \mathfrak{a}'_{k+1}$; $a_i \in \mathfrak{a}_i$ e $a_i = x - a'_k \in \mathfrak{a}'_{k+1}$, cioè $a_i \in \mathfrak{a}'_{k+1} \cap \mathfrak{a}_i$, sicchè $\mathfrak{a}'_k + \mathfrak{a}'_{k+1} \cap \mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}'_k + \mathfrak{a}'_{k+1} \cap \mathfrak{a}_{i+1}$. La sequenza II' contiene quindi al più tanti termini distinti quanti ne contiene I', cioè al più $l + 1$ termini distinti, data la irriducibilità della sequenza I. Ne risulta $m \leq l$, poichè anche la sequenza II non può avere più di $l + 1$ termini distinti. Se in particolare II è irriducibile, si può invertire il ragionamento e dimostrare $m = l$, cioè il fatto che la lunghezza di una sequenza irriducibile fra $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ dipende unicamente da questi ideali finali.

Per ogni coppia di ideali $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ $(\subset s)$ definiamo il simbolo

$$\binom{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$$

come la lunghezza di una sequenza irriducibile fra $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$, qualora ce ne esista, e come $+\infty$, se tale sequenza non esiste.

Vale allora

$$(*) \qquad \binom{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} + \binom{\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}} = \binom{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}} \quad \text{per} \quad \mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{c} (\subset s),$$

poichè nel caso in cui $\binom{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ e $\binom{\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}}$ sono finiti si ottiene una sequenza irriducibile fra $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{c}$, continuando una sequenza irriducibile fra $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ con una sequenza irriducibile fra $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$, mentre in ciascun altro caso si ottengono sequenze fra $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{c}$ con tanti termini distinti quanti se ne vuole.

Se $\binom{\mathfrak{a}}{s}$ è finito, si ha

$$(**) \qquad \binom{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = \binom{\mathfrak{a}}{s} - \binom{\mathfrak{b}}{s}.$$

209. Quanto al calcolo del simbolo $\binom{\mathfrak{a}}{s}$ giova osservare

$$\binom{\mathfrak{a}}{\mathfrak{a} + x \cdot s} = 1, \quad \text{se} \quad x \cdot \mathfrak{p} \subset \mathfrak{a}, \ x \notin \mathfrak{a}.$$

Se, infatti, $c = a + x \cdot e$ con $a \in \mathfrak{a}$, $e \in s$ è elemento $\notin \mathfrak{a}$ di un ideale $\mathfrak{c}$ intermedio fra $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{a} + x \cdot s$, si conclude da $x \cdot \mathfrak{p} \subset \mathfrak{a}$, che $e \notin \mathfrak{p}$ e quindi $x = (c - a) \cdot e^{-1} \in \mathfrak{c} + \mathfrak{a} = \mathfrak{c}$, cioè $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + x \cdot s$.

210. *La funzione caratteristica di una figura* $\mathfrak{a}$ *è*

$$\chi(\mathfrak{a}(s), m) = \binom{\mathfrak{a}(s) + \mathfrak{p}^{m+1}}{s}.$$

DIMOSTRAZIONE. - Secondo la relazione 208 $(*)$ si ha

$$(*) \qquad \binom{\mathfrak{a}(s) + \mathfrak{p}^{m+1}}{s} = \sum_{l=0}^{m} \binom{\mathfrak{a}(s) + \mathfrak{p}^{l+1}}{\mathfrak{a}(s) + \mathfrak{p}^{l}}.$$

Introducendo le notazioni di 196, scegliamo una base indipendente

$$(**) \qquad f_i(u_1, \ldots, u_h) + \mathfrak{p}[u_1, \ldots, u_h] \in s/\mathfrak{p}[u_1, \ldots, u_h]$$

($i = 1, \ldots, \varphi(A, l)$) dell'$s/\mathfrak{p}$-modulo delle forme di grado l tale, che le $\varphi(\overline{\mathfrak{a}(s)}, m) = \alpha$ prime di queste forme costituiscano una base indipendente dell'$s/\mathfrak{p}$-modulo delle forme di grado l tangenti elementi di $\mathfrak{a}(s)$.

Allora

$$(^+) \qquad \mathfrak{p} \cdot f_{i+1}(p_1, \ldots, p_h) \subset \mathfrak{p}^{l+1}$$

e per $i \geq \alpha$

$$(^{++}) \qquad f_{i+1}(p_1, \ldots, p_h) \,\subset\!\!\!|\!\!=\, \sum_{j=\alpha+1}^{i} f_j(p_1, \ldots, p_h) \cdot s + \mathfrak{a}(s) + \mathfrak{p}^{l+1},$$

poichè una relazione

$$f_{i+1}(p) - \sum_{j=\alpha+1}^{i} f_j(p) \cdot c_j \subset \mathfrak{a}(s) + \mathfrak{p}^{l+1} \qquad (\text{con } c_j \in s)$$

significherebbe che la forma

$$f_{i+1}(u) - \sum_{j=\alpha+1}^{i} f_j(u) \cdot c_j + \mathfrak{p}[u] \quad \in s/\mathfrak{p}[u_1, \ldots, u_h]$$

tange un elemento di $\mathfrak{a}(s)$ contrario all'ipotesi sulla base ($**$).

Mediante gli ideali

$$\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}(s) + \mathfrak{p}^{l+1} + \sum_{j=\alpha+1}^{i} f_j(p_1, \ldots, p_h) \cdot s \qquad (i \geq \alpha)$$

si calcola

$$({}_+{}^+{}_+) \qquad \left(\frac{\mathfrak{a}(s) + \mathfrak{p}^{l+1}}{\mathfrak{a}(s) + \mathfrak{p}^l}\right) = \sum_{i=\alpha}^{\varphi(A,l)-1} \left(\frac{\mathfrak{a}_i}{\mathfrak{a}_{i+1}}\right) = \varphi(A, l) - \alpha = \varphi(A, l) - \varphi(\overline{\mathfrak{a}(s)}, l)$$

giacchè secondo ($^+$) e ($^{++}$)

$$\left(\frac{\mathfrak{a}_i}{\mathfrak{a}_{i+1}}\right) = \left(\frac{\mathfrak{a}_i}{\mathfrak{a}_i + f_{i+1}(p) \cdot s}\right) = 1$$

(ved. **209**). Da ($*$) e (${}_+{}^+{}_+$) segue il teorema da dimostrare.

211. *Per ideali qualunque* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *in* s *vale*

$$\left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}\right) = \left(\frac{\mathfrak{a} \frown \mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\right),$$

conseguenza immediata dell's-isomofismo σ fra gli s-moduli

$$\mathfrak{a}/\mathfrak{a} \frown \mathfrak{b} \quad e \quad \mathfrak{a} + \mathfrak{b}/\mathfrak{b}$$

definito da

$$(a + \mathfrak{a} \frown \mathfrak{b})^{\sigma} = a + \mathfrak{b} \qquad (a \in \mathfrak{a}).$$

Invero, questo isomorfismo σ e il suo inverso stabiliscono una corrispondenza biunivoca fra le seguenze di ideali entro $\mathfrak{a} \frown \mathfrak{b}$ e $\mathfrak{a}$ e quelle entro $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$.

Se $\left(\frac{\mathfrak{a} \frown \mathfrak{b}}{s}\right)$ è finito, si può dedurre dalla relazione suddetta l'equazione (ved. **208** $(**)$)

$$(*) \qquad \left(\frac{\mathfrak{a} \frown \mathfrak{b}}{s}\right) - \left(\frac{\mathfrak{a}}{s}\right) = \left(\frac{\mathfrak{b}}{s}\right) - \left(\frac{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}{s}\right).$$

212. *Le funzioni caratteristiche delle figure* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \frown \mathfrak{b}$ *in una varietà soddisfano alla disuguaglianza*

$$\chi((\mathfrak{a} \frown \mathfrak{b})(s),\ m) \geq \chi(\mathfrak{a}(s),\ m) + \chi(\mathfrak{b}(s),\ m) - \chi((\mathfrak{a} + \mathfrak{b})(s),\ m).$$

Applicando la relazione **211** $(*)$ agli ideali $\mathfrak{a}(s) + \mathfrak{p}^{m+1}$ e $\mathfrak{b}(s) + \mathfrak{p}^{m+1}$ invece di $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, e tenendo conto della conseguenza

$$\left(\frac{\mathfrak{a}(s) + \mathfrak{p}^{m+1} \frown \mathfrak{b}(s) + \mathfrak{p}^{m+1}}{s}\right) \leq \left(\frac{\mathfrak{a}(s) \frown \mathfrak{b}(s) + \mathfrak{p}^{m+1}}{s}\right)$$

di $\mathfrak{a}(s) + \mathfrak{p}^{m+1} \frown \mathfrak{b}(s) + \mathfrak{p}^{m+1} \supset \mathfrak{a}(s) \frown \mathfrak{b}(s) + \mathfrak{p}^{m+1}$, si trova la disuguaglianza

$$\left(\frac{\mathfrak{a}(s) \frown \mathfrak{b}(s) + \mathfrak{p}^{m+1}}{s}\right) \geq \left(\frac{\mathfrak{a}(s) + \mathfrak{p}^{m+1}}{s}\right) + \left(\frac{\mathfrak{b}(s) + \mathfrak{p}^{m+1}}{s}\right) - \left(\frac{\mathfrak{a}(s) + \mathfrak{b}(s) + \mathfrak{p}^{m+1}}{s}\right)$$

equivalente a quella da dimostrare (ved. **210**).

§ 8. Subordinazione di prospettive.

213. Definizione. - Una prospettiva $\mathfrak{p}$ è *subordinata* a una prospettiva $\mathfrak{P}$ allora e soltanto allora che $\mathfrak{P}$ appartiene alla stella $V(s)$ di $\mathfrak{p}$, pur essendo essa diversa da $\mathfrak{p}$. Diremo anche, che in questo caso l'aspetto s è subordinato all'aspetto S.

La subordinazione di prospettive è transitiva, cioè, se $\mathfrak{p}$ è subordinata a $\mathfrak{P}$, mentre $\mathfrak{P}$ è subordinata a $\mathfrak{P}'$, anche $\mathfrak{p}$ è subordinata a $\mathfrak{P}'$. Infatti da $S \in V(s)$, $S' \in V(S)$ segue $S' \in V(s)$ (ved. **180**).

Questa transitività permette di definire una *subordinazione di* $\mathfrak{p}$ *sotto* $\mathfrak{P}$ quale seguenza di prospettive

$$(*) \qquad \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0,\ \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2, \ldots,\ \mathfrak{p}_l = \mathfrak{P}$$

dove ciascuna $\mathfrak{p}_i$ è subordinata alla seguente $\mathfrak{p}_{i+1}$.