§ 5. Cono tangente.

195. Il numero minimo ($\leq \infty$) di elementi costituenti una base dell'origine $\mathfrak{p}$ di una prospettiva $\mathfrak{p}$ sarà chiamato *l'ampiezza* della prospettiva, mentre tale base stessa sarà distinta come *base minima* di $\mathfrak{p}$ dalle basi di $\mathfrak{p}$ aventi più elementi di quanto indica l'ampiezza di $\mathfrak{p}$. Volendo dire che l'ampiezza di una prospettiva è finita, diremo semplicemente che la prospettiva è *finita.*

La condizione necessaria e sufficiente perchè assegnati elementi $p_i \in \mathfrak{p}$ $(i = 1, \dots, h)$ costituiscano una base minima di una prospettiva finita $\mathfrak{p}$ è

(*) *che* $\mathfrak{p} = \sum_i p_i \cdot s + \mathfrak{p}^2$, *e che da* $\sum_i c_i \cdot p_i \subset \mathfrak{p}^2$. $c_i \in s$ *segua sempre* $c_i \subset \mathfrak{p}$.

DIMOSTRAZIONE. - I. La prima delle condizioni (*) equivale all'esprimere che $p_1, \dots, p_h$ è base dell'ideale $\mathfrak{p}$. Se, invero, q_i $(i = 1, \dots, m)$ è base qualunque di $\mathfrak{p}$, sussisteranno relazioni $q_i = \sum_j b_{ij} \cdot p_j + \sum_{jl} c_{ijl} q_j q_l$ $(i = 1, \dots, m)$ con b_{ij}, $c_{ijl} \in s$, le quali, scritte nella forma $\sum_k a_{ik} \cdot q_k = \sum_j b_{ij} \cdot p_j$ con $a_{ik} - \delta_{ik}$ $\subset \mathfrak{p}$ e quindi $|a_{ik}| \equiv 1 \bmod \mathfrak{p}$, mostrano $q_i \subset \sum p_j \cdot s$.

II. - La seconda condizione (*) è necessaria affinchè $p_1, \dots, p_h$ sia base minima. Supposto p. es. $\sum_{i=1}^{h} c_i \cdot p_i \subset \mathfrak{p}^2$ con $c_1 \not\subset \mathfrak{p}$, si troverebbe $p_1 \subset \sum_{i=2}^{h} s \cdot p_i + \mathfrak{p}^2$ e quindi, tenuto conto del risultato I, $\mathfrak{p} = \sum_{i=2}^{h} p_i \cdot s$, sicchè $p_1, \dots, p_h$ non è base minima di $\mathfrak{p}$.

III. - Soddisfatte le condizioni (*), supponiamo $q_1, \dots, q_m$ sia una base minima di $\mathfrak{p}$. Allora $p_i = \sum_j a_{ij} \cdot q_j$ con $a_{ij} \in s$. Se fosse $m < h$, ci sarebbero $c_i \in s$ tali che $\sum_{i=1}^{h} c_i \cdot a_{ij} \subset \mathfrak{p}$ $(j = 1, 2, \dots, m)$ senza che siano tutti i c_i elementi di $\mathfrak{p}$. La relazione $\sum_i c_i \cdot p_i \subset \mathfrak{p}^2$ però contradirebbe all'ipotesi (*). Dunque $m \geq h$, cioè $p_1, \dots, p_h$ è base minima di $\mathfrak{p}$.

196. In corrispondenza a una base minima $p_1, \dots, p_h$ di $\mathfrak{p}$ costruiamo l'anello

$$s/\mathfrak{p}[u_1, \dots, u_h] \qquad (= s/\mathfrak{p}[u])$$

dei polinomi in h argomenti liberi $u_1, \dots, u_h$ con coefficienti $\in s/\mathfrak{p}$. Scriveremo talvolta un elemento $\varphi(u_1, \dots, u_h) = \sum \alpha_{i_1 \dots i_h} \cdot u_1^{i_1} \dots u_h^{i_h}$ $(\alpha_{i_1 \dots i_h} \in s/\mathfrak{p})$ di $s/\mathfrak{p}[u]$ come elemento $f(u_1, \dots, u_h) + \mathfrak{p}[u_1, \dots, u_h]$ di

$$s[u_1, \dots, u_h]/\mathfrak{p}[u_1, \dots, u_h]$$

scegliendo $f(u_1, \dots, u_h) = \Sigma\, a_{i_1 \dots i_h} \cdot u_1^{i_1} \dots u_h^{i_h}$ di modo che $\alpha_{i_1 \dots i_h} = a_{i_1 \dots i_h} + \mathfrak{p}$. Se in particolare $\varphi(u)$ è forma di grado m sceglieremo anche $f(u)$ omogeneo di grado m.

DEFINIZIONE. - Una forma $\varphi(u_1, \dots, u_h) \in s/\mathfrak{p}[u]$ di grado m *tange* l'elemento $x \in s$ allora se oltanto allora che, scrivendo $\varphi(u_1, \dots, u_h) = f(u_1, \dots, u_h) + \mathfrak{p}[u_1, \dots, u_h]$ con $f \in s[u_1 \dots, u_h]$ di grado m, vale

$$f(p_1, \dots, p_h) \subset x + \mathfrak{p}^{m+1}.$$

È ovvio che il sussistere di tale relazione è indipendente dalla scelta della forma $f(u)$ di grado m rappresentante la forma $\varphi(u)$.

Si constata subito: Se $\varphi(u)$ di grado m tange x. $\psi(u)$ di grado n tange y, allora $\varphi(u) \cdot \psi(u)$ tange $x \cdot y$ e, nel caso di $m = n$, $\varphi(u) \pm \psi(u)$ tange $x \pm y$. Infatti, ponendo $\varphi(u) = f(u) + \mathfrak{p}[u]$, $\psi(u) = g(u) + \mathfrak{p}[u]$, si deduce da $f(p) \subset \subset x + \mathfrak{p}^{m+1}$, $g(p) \subset y + \mathfrak{p}^{n+1}$, che $f(p) \cdot g(p) \subset x \cdot y + \mathfrak{p}^{m+n+1}$, $f(p) \pm g(p) \subset \subset x \pm y + \mathfrak{p}^{m+1}$.

197. L'ideale $\overline{\mathfrak{a}(s)}$ generato in $s/\mathfrak{p}[u]$ dalle forme che tangono elementi di un dato ideale $\mathfrak{a}(s)$ in s, è omogeneo nel senso, che i componenti omogenei $f^{(m)}(u)$ di un polinomio qualunque $f(u) = \sum\limits_m f^{(m)}(u)$ appartenente all'ideale sono essi pure elementi dell'ideale. Ora, da una rappresentazione $f^{(m)}(u) = \sum\limits_i a_i(u) \cdot b_i(u)$ con $a_i(u)$ di grado n_i tangente $a_i \in \mathfrak{a}(s)$, $b_i(u)$ di grado $m - n_i$ tangente $b_i \in s$, segue (ved. **196**) che $f^{(m)}(u)$ tange $\sum\limits_i a_i \cdot b_i \in \mathfrak{a}(s)$, il che mostra:

Tutte le forme contenute nell'ideale $\overline{\mathfrak{a}(s)}$ generato dalle forme tangenti elementi di un dato ideale $\mathfrak{a}(s)$ tangono elementi di $\mathfrak{a}(s)$.

Come ogni ideale $\mathfrak{a}$ di un anello A individua nella varietà $V(A)$ di base A una figura $(\mathfrak{a})$ definita da

$$(\mathfrak{a})(S) = \mathfrak{a} \cdot S \quad \text{per ogni} \quad \mathfrak{P} \in V(A),$$

così quell'ideale $\overline{\mathfrak{a}(s)}$ individua nella *varietà affine*

$$V(s/\mathfrak{p}[u_1, \dots, u_h])$$

una figura $(\overline{\mathfrak{a}(s)})$ che chiameremo *il cono tangente della figura* $\mathfrak{a}$ *in* $\mathfrak{p}$, se $\mathfrak{a}(s)$ è l'ideale in s di una figura $\mathfrak{a}$ (come sempre può supporsi secondo **181**).

198. La definizione del cono tangente dipende dalla scelta della base minima $p_1, \dots, p_h$ di $\mathfrak{p}$. Sia $q_1, \dots, q_h$ un'altra base minima di $\mathfrak{p}$ legata a quella mediante le relazioni $p_i = \sum\limits_k a_{ik} \cdot q_k$, $q_i = \sum\limits_k b_{ik} \cdot p_k$, a_{ik}, $b_{ik} \in s$. Fra gli anelli

$$s/\mathfrak{p}[u_1, \dots, u_h] \quad \text{e} \quad s/\mathfrak{p}[v_1, \dots, v_h]$$

associati a quelle due basi si può stabilire una corrispondenza affine ponendo

$$(*) \qquad u_i = \sum_k \alpha_{ik} \cdot v_k, \qquad\qquad (**) \qquad v_i = \sum_k \beta_{ik} \cdot u_k$$

con $\alpha_{ik} = a_{ik} + \mathfrak{p}$, $\beta_{ik} = b_{ik} + \mathfrak{p}$, e $\sum_l \alpha_{il} \cdot \beta_{lk} = \delta_{ik}$, dato che secondo **195** vale $\sum_l a_{il} \cdot b_{lk} - d_{ik} \subset \mathfrak{p}$, con $d_{ik} = 0$ o 1, secondochè $i \neq k$ o $= k$.

Ogni forma di grado m $\varphi(u_1, \dots, u_h) = f(u_1, \dots, u_h) + \mathfrak{p}[u_1, \dots, u_h]$ tangente $x \in s$ mutasi dopo la sostituzione $(*)$ in una forma

$$\psi(v_1, \dots, v_h) = \varphi(\sum_k \alpha_{1k} \cdot v_k, \dots, \sum_k \alpha_{hk} \cdot v_k)$$

tangente x, poichè

$$\psi(v_1, \dots, v_h) = f(\sum_k a_{1k} \cdot v_k, \dots, \sum_k a_{hk} \cdot v_k) + \mathfrak{p}[v_1, \dots, v_h]$$

e

$$f(\sum_k a_{1k} \cdot q_k, \dots, \sum_k a_{hk} \cdot q_k) = f(p_1, \dots, p_h) \subset x + \mathfrak{p}^{m+1}.$$

Viceversa, dal fatto che $(**)$ è l'inversione di $(*)$ risulta che ogni forma $\psi(v_1, \dots, v_h)$ tangente x si ottiene da una forma $\varphi(u_1, \dots, u_h)$ tangente x mediante la sostituzione $(*)$, sicchè possiamo dire:

Il cono tangente $\overline{\mathfrak{a}(s)}$ di una figura $\mathfrak{a}$ in una prospettiva $\mathfrak{p}$ subisce la trasformazione affine biunivoca $u_i = \sum_k (a_{ik} + \mathfrak{p}) \cdot v_k$, se si passa, ponendo $p_i = \sum_k a_{ik} \cdot q_k$, da una base minima p_i dell'ideale $\mathfrak{p}$ a un altra q_i.

§ 6. Ideali omogenei.

199. Il presentarsi di ideali omogenei nella definizione dei coni tangenti ci induce a richiamare talune proprietà di siffatti ideali.

Designeremo in quel che segue con $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{q}$, ecc. ideali (omogenei o no) in un anello $A = k[u_1, \dots, u_h]$ di polinomi sopra un corpo k, che subito estendiamo a un corpo $K = (k, t)$ 1-dimensionale sopra k. L'estensione di A all'anello $A \cdot K = K[u_1, \dots, u_h]$ conduce a estensioni $\mathfrak{a} \cdot K$ degli ideali $\mathfrak{a}$ dalle quali si ritrovano questi nel modo $\mathfrak{a} \cdot K \frown A = \mathfrak{a}$ (ved. **40**). Notiamo che gli elementi di $\mathfrak{a} \cdot K$ possono si scrivere nella forma $\frac{1}{f(t)} \sum a_i \cdot t^i$ con $f(t) \in [k, t]$, $a_i \in \mathfrak{a}$. Ne segue subito, che sempre $\mathfrak{b} \cdot K \frown \mathfrak{c} \cdot K = [\mathfrak{b} \frown \mathfrak{c}] \cdot K$. Invero, ogni $x \in \mathfrak{b} \cdot K \frown \mathfrak{c} \cdot K$ ammette le rappresentazioni $x = \frac{1}{f(t)} \sum_i b_i \cdot t^i = \frac{1}{f(t)} \sum_i c_i \cdot t^i$, dalle quali si trae $b_i = c_i \in \mathfrak{b} \frown \mathfrak{c}$.

Se $\mathfrak{q}$ è $\mathfrak{p}$-primario, $\mathfrak{q} \cdot K$ è $\mathfrak{p} \cdot K$-primario.