Da I e II segue $x \cdot [\mathfrak{a}(s) \frown s'] \subset \bigcap_{S_i = \supset s} \mathfrak{q}_i \bigcap_{S_k \supset s} \mathfrak{q}_k = \mathfrak{a}(s')$ o piuttosto $x \cdot [\mathfrak{a}(s) \frown s'] \subset \mathfrak{a}(s') \frown \mathfrak{a}(s)$ e pertanto $\mathfrak{a}(s) \frown s' \subset [\mathfrak{a}(s') \frown \mathfrak{a}(s)] \cdot s$, il che mostra

$$\mathfrak{a}(s) = [\mathfrak{a}(s) \frown s'] \cdot s \subset [\mathfrak{a}(s) \frown \mathfrak{a}(s')] \cdot s \subset \mathfrak{a}(s).$$

Nel caso $\mathfrak{a}(s') = s'$ si osservi $\mathfrak{a}(s) = [\mathfrak{a}(s) \frown s'] \cdot s$ (ved. **174**).

184. *Se ciascun aspetto in una varietà primaria V è noetheriano, la figura $(\mathfrak{a}_0)$ individuata da un suo ideale $(\mathfrak{a}_0)(s_0) = \mathfrak{a}_0$ è minima fra tutte le figure $\mathfrak{a}$ con $\mathfrak{a}(s_0) = \mathfrak{a}_0$.*

Invero, tenuto conto del teorema precedente, si conclude da $\mathfrak{a}(s_0) = \mathfrak{a}_0$ che $\mathfrak{a}(s) = [\mathfrak{a}(s_0) \frown \mathfrak{a}(s)] \cdot s \subset [\mathfrak{a}_0 \frown s] \cdot s = (\mathfrak{a}_0)(s)$ per ogni $s \in V$, il che significa $\mathfrak{a} \geq (\mathfrak{a}_0)$.

185. *Se ciascun aspetto in una varietà primaria V è noetheriano, per le figure $(\mathfrak{a}_0)$, $(\mathfrak{b}_0)$ individuate da ideali $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0$ di un medesimo aspetto $s_0 \in V$ valgono le relazioni*

$$(\mathfrak{a}_0) \geq (\mathfrak{b}_0), \quad \textit{se} \quad \mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{b}_0, \quad \textit{e} \quad (\mathfrak{a}_0) \frown (\mathfrak{b}_0) = (\mathfrak{a}_0 \frown \mathfrak{b}_0) \quad \textit{sempre.}$$

Dimostrazione. - I. Da $\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{b}_0$ segue (ved. 181)

$$(\mathfrak{a}_0)(s) = [\mathfrak{a}_0 \frown s] \cdot s \subset [\mathfrak{b}_0 \frown s] \cdot s = (\mathfrak{b}_0)(s)$$

cioè $(\mathfrak{a}_0) \geq (\mathfrak{b}_0)$.

II. - Siano $\mathfrak{a}_0$. $\mathfrak{b}_0$ ideali qualunque di s_0. Applicando il risultato I si trova $(\mathfrak{a}_0 \frown \mathfrak{b}_0) \geq (\mathfrak{a}_0)$, $(\mathfrak{a}_0 \frown \mathfrak{b}_0) \geq (\mathfrak{b}_0)$ e pertanto $(\mathfrak{a}_0 \frown \mathfrak{b}_0) \geq (\mathfrak{a}_0) \frown (\mathfrak{b}_0)$. Ma $(\mathfrak{a}_0 \frown \mathfrak{b}_0)(s_0) = \mathfrak{a}_0 \frown \mathfrak{b}_0 = (\mathfrak{a}_0)(s_0) \frown (\mathfrak{b}_0)(s_0)$ mostra $(\mathfrak{a}_0 \frown \mathfrak{b}_0) \leq (\mathfrak{a}_0) \frown (\mathfrak{b}_0)$, poichè $(\mathfrak{a}_0 \frown \mathfrak{b}_0)$ è minima fra le figure aventi in s_0 lo stesso ideale (ved. **184**).

Osserveremo che la conclusione:

$$\textit{da } \mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{b}_0 \textit{ segue } (\mathfrak{a}_0) \geq (\mathfrak{b}_0)$$

è indipendente da qualsiasi ipotesi sulla varietà.

§ 4. Prospettive essenziali di una figura.

186. Ogni prospettiva $\mathfrak{p} \in V$ in cui una data figura $\mathfrak{a}$ presenta un suo aspetto (ved. **169**), sarà detta *prospettiva di* $\mathfrak{a}$. Le altre prospettive, cioè quelle $\mathfrak{p}$ con $\mathfrak{a}(s) = s$, non sono prospettive di $\mathfrak{a}$.

La figura prima $(\mathfrak{p})$ individuata (ved. 178 e **182**) dall'origine $\mathfrak{p}$ di una prospettiva $\mathfrak{p}$ di $\mathfrak{a}$ si chiamerà *figura prima di* $\mathfrak{a}$. Tale figura $(\mathfrak{p})$ è contenuta in $\mathfrak{a}$, poichè $(\mathfrak{p})(s') = \mathfrak{p} \frown s' \supset \mathfrak{a}(s) \frown s' \supset \mathfrak{a}(s')$, se $s' \subset s$, e $(\mathfrak{p})(s') = s' \supset \mathfrak{a}(s')$ se $s' \not\subset s$. Viceversa, se una figura prima $(\mathfrak{p})$ è contenuta in $\mathfrak{a}$, l'ideale $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p})(s) \supset \mathfrak{a}(s)$ è origine di una prospettiva $\mathfrak{p}$ di $\mathfrak{a}$. Le figure prime $(\mathfrak{p})$ di una figura $\mathfrak{a}$ sono dunque caratterizzate da $\mathfrak{a} \geq (\mathfrak{p})$.

187. Scriveremo $S \geq s$ per esprimere $S \in V(s)$, mentre $S > s$ significhi $S \in V(s)$, $S \neq s$.

L'ideale $\mathfrak{a}(s)$ di una figura $\mathfrak{a}$ è contenuto in tutti gli ideali $\mathfrak{a}(S)$ di $\mathfrak{a}$ nella stella $V(s)$ di s. Allora e soltanto allora che

$$s \bigcap_{S>s} \mathfrak{a}(S) \quad \supset \mathfrak{a}(s)$$

sia diverso da $\mathfrak{a}(s)$, diremo, che la prospettiva $\mathfrak{p}$ è *prospettiva essenziale di* $\mathfrak{a}$ (che l'aspetto s è essenziale per $\mathfrak{a}$).

Sono essenziali per es. le *prospettive estreme* $\mathfrak{p}$ di una figura $\mathfrak{a}$ caratterizzate da

$$\mathfrak{a}(s) \neq s, \quad \mathfrak{a}(S) = S \quad \text{per} \quad S \in V(s), \quad S \neq s.$$

Gli aspetti s corrispondenti e cioè solamente essi saranno detti estremi per $\mathfrak{a}$.

188. *La sola prospettiva essenziale di una figura $\mathfrak{P}$-primaria $\mathfrak{Q}$ è la sua sola prospettiva estrema $\mathfrak{P}$.*

Difatti, si trova (ved. 177)

$$\text{per } s \subset S,\ s \neq S: \quad \mathfrak{Q}(s) \subset s \bigcap_{S'>s} \mathfrak{Q}(S') \quad \subset s \cap \mathfrak{Q}(S) = \mathfrak{Q}(s),$$

$$\text{per } s \subset\!\!|\!\!= S \quad : \quad \mathfrak{Q}(s) = s = s \bigcap_{S'>s} \mathfrak{Q}(S'),$$

$$\text{per } s = S \quad : \quad \mathfrak{Q}(s) \neq s \bigcap_{S'>s} \mathfrak{Q}(S') = s.$$

189. *La condizione necessaria e sufficiente perchè un aspetto s noetheriano e primario sia essenziale per una figura $\mathfrak{a}$ è che $\mathfrak{p}$ sia divisore primo dell'ideale $\mathfrak{a}(s)$.*

DIMOSTRAZIONE. - Sia $\mathfrak{a}(s) = \bigcap_i \mathfrak{q}_i$ una decomposizione noetheriana r i d o t t a di $\mathfrak{a}(s)$, e designi $\mathfrak{Q}_i = (\mathfrak{q}_i)$ la figura $\mathfrak{P}_i$-primaria individuata dall'ideale $\mathfrak{q}_i$. Avendo le figure $\mathfrak{a}$ e $\bigcap_i \mathfrak{Q}_i$ in s lo stesso ideale, esse coincidono in tutta la stella $V(s)$, cioè

$$\mathfrak{a}(S) = \bigcap_i \mathfrak{Q}_i(S) \quad \text{per} \quad S \in V(s).$$

Ora

$$s \bigcap_{S>s} \mathfrak{Q}_i(S) = \mathfrak{Q}_i(s) = \mathfrak{q}_i \quad \text{o} \quad = s,$$

secondo che $\mathfrak{P}_i$ sia $\neq \mathfrak{p}$ o $\mathfrak{p}$ (ved. 188), epperò

$$s \bigcap_{S>s} \mathfrak{a}(S) \neq \mathfrak{a}(s) \quad \text{o} \quad = \mathfrak{a}(s)$$

secondo che $\mathfrak{p}$ si trovi fra i divisori primi $\mathfrak{P}_i \frown s$ di $\mathfrak{a}(s)$ o no.

190. *Le prospettive essenziali di* $\mathfrak{a}$ *appartenenti alla stella* $V(s)$ *di un aspetto noetheriano e primario* s *sono appunto quelle individuate dai divisori primi di* $\mathfrak{a}(s)$.

Dimostrazione. - Riprendiamo le notazioni di 189.

Dalla decomposizione noetheriana ridotta

$$(*) \qquad \mathfrak{a}(s) = \bigcap_i \mathfrak{q}_i = \bigcap_i \mathfrak{Q}_i(s),$$

segue, tenuto conto di $\mathfrak{Q}_i(S) = S$ per $S \subset\!\!\!\!\mid\; S_i$. la decomposizione

$$\mathfrak{a}(S) = \bigcap_{S_i \supset S} \mathfrak{Q}_i(S)$$

noetheriana, poichè $\mathfrak{Q}_i(S) = \mathfrak{q}_i \cdot S_i \frown S$ è $[\mathfrak{P}_i \frown S]$-primario, ridotta, perchè una riduzione

$$\bigcap_{S_i \supset S} \mathfrak{Q}_i(S) = \bigcap{}' \mathfrak{Q}_i(S)$$

(il membro destro contenendo meno termini del membro sinistro) indurrebbe una riduzione

$$\bigcap_{S_i \supset S} \mathfrak{q}_i = s \bigcap_{S_i \supset S} \mathfrak{Q}_i(S) = s \bigcap{}' \mathfrak{Q}_i(S) = \bigcap{}' \mathfrak{q}_i$$

applicabile in $(*)$.

Nel caso di $S = S_k$ si trova $\mathfrak{P}_k$ fra i divisori primi $\mathfrak{P}_i \frown S_k$ di $\mathfrak{a}(S_k)$, sicchè la prospettiva $\mathfrak{P}_k$ è essenziale per $\mathfrak{a}$ (ved. 189). Se S differisce da ogni S_i, nessuno degli ideali $\mathfrak{P}_i \frown S$ è $\mathfrak{P}$, e la prospettiva $\mathfrak{P}$ è inessenziale per la figura $\mathfrak{a}$ (ved. 189).

191. *Tutte le prospettive essenziali di una figura* $(\mathfrak{a}_0)$ *individuata da un ideale* $\mathfrak{a}_0$ *di un aspetto noetheriano e primario* s_0 *trovansi nella stella* $V(s_0)$.

Da $\mathfrak{a}_0 = \bigcap \mathfrak{q}_i$ segue (ved. 185) $(\mathfrak{a}_0 = \bigcap (\mathfrak{q}_i)$. Se $\mathfrak{q}_i$ è $[\mathfrak{P}_i \frown s_0]$-primario, la figura $(\mathfrak{q}_i)$ è $\mathfrak{P}_i$-primaria e

$$s \bigcap_{S > s} (\mathfrak{q}_i)(S) = (\mathfrak{q}_i)(s) \quad \text{per} \quad s \neq S_i \in V(s_0),$$

donde si deduce per $s \subset\!\!\!\!\mid\; V(s_0)$:

$$s \bigcap_{S > s} (\mathfrak{a}_0)(S) = \bigcap_i s \bigcap_{S > s} (\mathfrak{q}_i)(S) = \bigcap_i (\mathfrak{q}_i)(s) = (\mathfrak{a}_0)(s),$$

c. d. d.

192. *Se l'ideale in s di una figura $\mathfrak{a}$ è $\mathfrak{p}$-primario, la prospettiva $\mathfrak{p}$ è estrema per $\mathfrak{a}$.*

L'ideale $\mathfrak{a}(s)$ individua una figura $\mathfrak{p}$-primaria $(\mathfrak{a}(s)) = \mathfrak{q}$, la cui sola prospettiva estrema è $\mathfrak{p}$, e, avendo le figure $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{q}$ in $V(s)$ gli stessi ideali, quella prospettiva è estrema anche per $\mathfrak{a}$ (ved. **188** e **187**).

193. *La condizione necessaria e sufficiente perchè un aspetto noetheriano e primario s sia estremo per la figura $\mathfrak{a}$, è il sussistere di una relazione*

$$(*) \qquad \mathfrak{p}^l \subset \mathfrak{a}(s) \subset \mathfrak{p} \qquad \textit{con certo } l$$

oppure il carattere $\mathfrak{p}$-primario dell'ideale $\mathfrak{a}(s)$.

DIMOSTRAZIONE. - Dall'osservazione precedente segue che il carattere $\mathfrak{p}$-primario di $\mathfrak{a}(s)$ è sufficiente.

Supponiamo, viceversa, che $\mathfrak{p}$ sia prospettiva estrema di $\mathfrak{a}$. Se $\mathfrak{a}(s)$ non fosse $\mathfrak{p}$-primario, esso avrebbe un divisore primo $\mathfrak{P} \frown s \neq \mathfrak{p}$ e l'ideale $\mathfrak{a}(S) = \mathfrak{a}(s) \cdot S$ sarebbe contenuto in $[\mathfrak{P} \frown s] \cdot S = \mathfrak{P}$, contrario all'ipotesi che $\mathfrak{p}$ sia estrema per $\mathfrak{a}$ (ved. **187**).

Il sussistere di una relazione $(*)$ equivale al carattere $\mathfrak{p}$-primario di $\mathfrak{a}(s)$. Difatti, sia $x \cdot y \subset \mathfrak{a}(s)$, $y \not\subseteq \mathfrak{a}(s)$, x, $y \in s$. Allora $x \subset \mathfrak{p}$ epperò $x^l \subset \mathfrak{a}(s)$, perchè altrimenti $y = x^{-1} \cdot x \cdot y \subset \mathfrak{a}(s)$. Dunque $\mathfrak{a}(s)$ è primario in conseguenza di $(*)$. La stessa relazione mostra immediatamente che $\mathfrak{p}$ è l'ideale primo associato all'ideale primario $\mathfrak{a}(s)$.

194. *Le prospettive estreme di $\mathfrak{a} \frown \mathfrak{b}$ coincidono con quelle di $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ e trovansi fra quelle di $\mathfrak{a}$ e di $\mathfrak{b}$. Ogni prospettiva estrema di una di queste che è estrema o non prospettiva dell'altra, è estrema per $\mathfrak{a} \frown \mathfrak{b}$. Le altre prospettive estreme di $\mathfrak{a}$ o di $\mathfrak{b}$ non sono estreme per $\mathfrak{a} \frown \mathfrak{b}$.*

DIMOSTRAZIONE. - I. Se $\mathfrak{p}$ è prospettiva estrema di $\mathfrak{a} \frown \mathfrak{b}$, si ha $(\mathfrak{a} \frown \mathfrak{b})(s) = \mathfrak{a}(s) \frown \mathfrak{b}(s) \subset \mathfrak{p}$ e quindi $\mathfrak{a}(s) \subset \mathfrak{p}$ o $\mathfrak{b}(s) \subset \mathfrak{p}$, sicchè $\mathfrak{p}$ è prospettiva di $\mathfrak{a}$ o di $\mathfrak{b}$, e cioè estrema, poichè da $\mathfrak{a}(S) \frown \mathfrak{b}(S) = S$ per $S \in V(s)$ segue $\mathfrak{a}(S) = \mathfrak{b}(S) = S$.

II. - Supposta $\mathfrak{p}$ prospettiva estrema di tutte e due le figure $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ o estrema per l'una, sia $\mathfrak{a}$, e non prospettiva dell'altra, si avrà $\mathfrak{a}(s) \subset \mathfrak{p}$, $\mathfrak{a}(S) = \mathfrak{b}(S) = S$ e pertanto $\mathfrak{a}(s) \cap \mathfrak{b}(s) \subset \mathfrak{p}$, $\mathfrak{a}(S) \cap \mathfrak{b}(S) = S$, il che caratterizza $\mathfrak{p}$ come prospettiva estrema di $\mathfrak{a} \frown \mathfrak{b}$.

III. - Applicando lo stesso ragionamento alla figura $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$, si trova altresì che appunto le prospettive nominate in II sono estreme per $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$. C. d. d.