Dimostrazione. – L'ideale $\mathfrak{q} \cdot S$ è $\mathfrak{P}$-primario in S (ved. **175**) di seguito a $[\mathfrak{P} \cap s] \cdot S = \mathfrak{P}$ (ved. **72** o **174**). Esso individua pertanto (ved. **177**) una figura $\mathfrak{P}$-primaria $\mathfrak{Q}$ con $\mathfrak{Q}(s) = \mathfrak{q} \cdot S \cap s$.

Ogni $x \in \mathfrak{q} \cdot S$ è quoziente $\dfrac{q}{m}$ con $q \in \mathfrak{q}$, $m \in s$, $m \not\subset \mathfrak{P} \cap s$. Se di più $x \in s$, si conclude da $m \cdot x \subset \mathfrak{q}$, $m \not\subset \mathfrak{P} \cap s$, che $x \subset \mathfrak{q}$, poichè $\mathfrak{q}$ è $[\mathfrak{P} \cap s]$-primario. Dunque $\mathfrak{q} \cdot S \cap s \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{q} \cdot S \cap s$ e quindi $\mathfrak{Q}(s) = \mathfrak{q}$.

Se una figura $\mathfrak{a}$ in V soddisfa inoltre a $\mathfrak{a}(s) = \mathfrak{q}$, si ha $\mathfrak{a}(S) = \mathfrak{a}(s) \cdot S = \mathfrak{q} \cdot S$ e perciò

$$\mathfrak{a}(S') \subset \mathfrak{a}(S) \cap S' = \mathfrak{q} \cdot S \cap S' = \mathfrak{Q}(S') \quad \text{se} \quad S' \subset S,$$

$$\mathfrak{a}(S') \subset S' = \mathfrak{Q}(S') \quad \text{se} \quad S' \not\subset S,$$

il che mostra $\mathfrak{a} \geq \mathfrak{Q}$.

179. *Una figura $\mathfrak{P}$-primaria $\mathfrak{Q}$ è individuata da un qualsiasi suo ideale* $\mathfrak{Q}(s) \neq s$.

Sia $\mathfrak{Q}(s') \neq s'$, cioè $s' \subset S$ e $\mathfrak{Q}(s') = \mathfrak{Q}(S) \cap s'$. La figura $\mathfrak{Q}'$ individuata da questo ideale $[\mathfrak{P} \cap s']$-primario (ved. **176**) è $\mathfrak{P}$-primaria (ved. **178**) con $\mathfrak{Q}'(S) = \mathfrak{Q}(s') \cdot S = \mathfrak{Q}(S)$, donde segue $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q}$.

§ 3. Figura individuata da un suo ideale.

180. *Da $s \in V(A)$, $S \in V(s)$ segue $S \in V(A)$.*

Invero, ogni $x \in s$ è quoziente $\dfrac{a}{b}$ con a, $b \in A$, $b \not\subset \mathfrak{p}$ e quindi $\mathfrak{b} \not\subset \mathfrak{P} \cap s \subset \mathfrak{p}$. Applicando l'osservazione **75**, si trova A essere base di $\mathfrak{P}$.

181. *Ogni ideale $\mathfrak{a}_0$ di un singolo aspetto $s_0 \in V$ individua una figura* $(\mathfrak{a}_0)$ *in V definita da*

$$(\mathfrak{a}_0)(s) = [\mathfrak{a}_0 \cap s] \cdot s$$

Dimostrazione. – Dobbiamo verificare $[\mathfrak{a}_0 \cap s] \cdot S = [\mathfrak{a}_0 \cap S] \cdot S$ per $S \in V(s) \subset V$. Siccome $s \cap s_0$ è base di s (ved. **110**) e quindi di S (ved. **180**) ogni $a_0 \in \mathfrak{a}_0 \cap S$ è quoziente $a_0 = \dfrac{a}{b}$ con a, $b \in s \cap s_0$, $a = a_0 \cdot b \subset \mathfrak{a}_0 \cap s$, $b^{-1} \subset S$, il che mostra $\mathfrak{a}_0 \cap S \subset [\mathfrak{a}_0 \cap s] \cdot S$, mentre $[\mathfrak{a}_0 \cap s] \cdot S \subset [\mathfrak{a}_0 \cap S] \cdot S$ è chiaro da se.

182. *La figura* $(\mathfrak{q})$ *individuata* secondo **181** *da un ideale* $[\mathfrak{P} \cap s]$*-primario $\mathfrak{q}$ di $s \in V$ coincide con la figura $\mathfrak{P}$-primaria $\mathfrak{Q}$ definita in* **178**.

DIMOSTRAZIONE. - I. Per $S' \subset S$ si ha (ved. **177** e **178**) $\mathfrak{Q}(S') = \mathfrak{q} \cdot S \frown S'$, $\mathfrak{Q}(s) = \mathfrak{q} \cdot S \frown s = \mathfrak{q}$, $\mathfrak{Q}(S') \frown s = \mathfrak{q} \cdot S \frown S' \frown s = \mathfrak{q} \frown S'$, sicchè (ved. **174**)

$$\mathfrak{Q}(S') = [\mathfrak{Q}(S') \frown s] \cdot S' = [\mathfrak{q} \frown S'] \cdot S' = (\mathfrak{q})(S'),$$

perchè $S' \frown s$ è base di S'.

II. Per $S' \subset\!\!|\!\!= S$ si deduce da $\mathfrak{P} \frown S' \subset\!\!|\!\!= \mathfrak{P}'$ (ved. **112**), che vi è $x \in \mathfrak{P} \frown S'$ non appartenente a $\mathfrak{P}'$. Scrivendo $x = \dfrac{a}{b}$ con $a, b \in S' \frown s$, $b \subset\!\!|\!\!= \mathfrak{P}'$, anche $a = b \cdot x \subset\!\!|\!\!= \mathfrak{P}'$, ma $a \in \mathfrak{P} \frown s$, poichè $b \in s \subset S$. Con L abbastanza grande avremo $a^L \subset \mathfrak{q} \frown S'$, pur essendo $a^L \subset\!\!|\!\!= \mathfrak{P}'$, donde segue $1 = a^L \cdot a^{-L} \subset [\mathfrak{q} \frown S'] \cdot$ $\cdot S' = (\mathfrak{q})(S')$, cioè $(\mathfrak{q})(S') = S'$ come $\mathfrak{Q}(S') = S'$.

183. *Se ciascun aspetto in una varieta* ***p r i m a r i a*** *V è* ***n o e t h e r i a n o***, *si ha*

$$\mathfrak{a}(s) = [\mathfrak{a}(s) \frown \mathfrak{a}(s')] \cdot s$$

per ogni figura $\mathfrak{a}$ *in* V *e* s, s' *qualunque* $\in V$ (ved. **110**).

DIMOSTRAZIONE. - Siccome s' è noetheriano e primario, ogni divisore primo $\neq s'$ di $\mathfrak{a}(s')$ (ved. **91**) individua una prospettiva $\in V(s') \subset V$. Sia

$$\mathfrak{a}(s') = \bigcap_j \mathfrak{q}_j$$

la decomposizione noetheriana di $\mathfrak{a}(s')$ supposto $\neq s'$, e designi $\mathfrak{P}_j$ la prospettiva individuata dall'ideale primo corrispondente all'ideale primario $\mathfrak{q}_j$.

I. Se $S_i =\!\!|\!\!\supset s$, anche $\mathfrak{p} =\!\!|\!\!\supset \mathfrak{P}_i \frown s$ (ved. **112**), sicchè esiste $p_i \in \mathfrak{P}_i \frown s$, $p_i \subset\!\!|\!\!= \mathfrak{p}$. Scrivendo, il che è lecito a causa di $s \in V(s \frown s')$, $p_i = \dfrac{a_i}{b_i}$ con a_i, $b_i \in s' \frown s$, $b_i \subset\!\!|\!\!= \mathfrak{p}$, anche $a_i = b_i \cdot p_i \subset\!\!|\!\!= \mathfrak{p}$, ma $\in \mathfrak{P}_i \frown s'$. Con L abbastanza grande sarà

$$x = (\prod_{S_i =|\supset s} a_i)^L \subset \bigcap_{S_i =|\supset s} \mathfrak{q}_i, \quad x \subset\!\!|\!\!= \mathfrak{p}.$$

II. Se $S_k \supset s$, avremo $S_k \in V(s \frown s')$ (ved. **180**) in conseguenza a $S_k \in V(s)$, $s \in V(s \frown s')$ (ved. **110**). Allora (ved. **174**)

$$[\mathfrak{a}(s) \frown s'] \cdot s \cdot S_k = \mathfrak{a}(s) \cdot S_k = \mathfrak{a}(S_k) = \mathfrak{a}(s') \cdot S_k \subset \mathfrak{q}_k \cdot S_k$$

e quindi

$$\mathfrak{a}(s) \frown s' \subset \mathfrak{q}_k \cdot S_k \frown s' = \mathfrak{q}_k,$$

essendo $\mathfrak{q}_k \cdot S_k \frown s'$ l'ideale in s' della figura primaria individuata da $\mathfrak{q}_k$ (ved. **178**).

Da I e II segue $x \cdot [\mathfrak{a}(s) \frown s'] \subset \bigcap_{S_i \supsetneq s} \mathfrak{q}_i \bigcap_{S_k \supset s} \mathfrak{q}_k = \mathfrak{a}(s')$ o piuttosto $x \cdot [\mathfrak{a}(s) \frown s'] \subset \mathfrak{a}(s') \frown \mathfrak{a}(s)$ e pertanto $\mathfrak{a}(s) \frown s' \subset [\mathfrak{a}(s') \frown \mathfrak{a}(s)] \cdot s$, il che mostra

$$\mathfrak{a}(s) = [\mathfrak{a}(s) \frown s'] \cdot s \subset [\mathfrak{a}(s) \frown \mathfrak{a}(s')] \cdot s \subset \mathfrak{a}(s).$$

Nel caso $\mathfrak{a}(s') = s'$ si osservi $\mathfrak{a}(s) = [\mathfrak{a}(s) \frown s'] \cdot s$ (ved. **174**).

184. *Se ciascun aspetto in una varietà* p r i m a r i a *V è* n o e t h e r i a n o, *la figura* $(\mathfrak{a}_0)$ *individuata da un suo ideale* $(\mathfrak{a}_0)(s_0) = \mathfrak{a}_0$ *è minima fra tutte le figure* $\mathfrak{a}$ *con* $\mathfrak{a}(s_0) = \mathfrak{a}_0$.

Invero, tenuto conto del teorema precedente, si conclude da $\mathfrak{a}(s_0) = \mathfrak{a}_0$ che $\mathfrak{a}(s) = [\mathfrak{a}(s_0) \frown \mathfrak{a}(s)] \cdot s \subset [\mathfrak{a}_0 \frown s] \cdot s = (\mathfrak{a}_0)(s)$ per ogni $s \in V$, il che significa $\mathfrak{a} \geq (\mathfrak{a}_0)$.

185. *Se ciascun aspetto in una varietà* p r i m a r i a *V è* n o e t h e r i a n o, *per le figure* $(\mathfrak{a}_0)$, $(\mathfrak{b}_0)$ *individuate da ideali* $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0$ *di un medesimo aspetto* $s_0 \in V$ *valgono le relazioni*

$$(\mathfrak{a}_0) \geq (\mathfrak{b}_0), \quad \textit{se} \quad \mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{b}_0, \quad \textit{e} \quad (\mathfrak{a}_0) \frown (\mathfrak{b}_0) = (\mathfrak{a}_0 \frown \mathfrak{b}_0) \quad \textit{sempre.}$$

DIMOSTRAZIONE. - I. Da $\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{b}_0$ segue (ved. **181**)

$$(\mathfrak{a}_0)(s) = [\mathfrak{a}_0 \frown s] \cdot s \subset [\mathfrak{b}_0 \frown s] \cdot s = (\mathfrak{b}_0)(s)$$

cioè $(\mathfrak{a}_0) \geq (\mathfrak{b}_0)$.

II. - Siano $\mathfrak{a}_0$. $\mathfrak{b}_0$ ideali qualunque di s_0. Applicando il risultato I si trova $(\mathfrak{a}_0 \frown \mathfrak{b}_0) \geq (\mathfrak{a}_0)$, $(\mathfrak{a}_0 \frown \mathfrak{b}_0) \geq (\mathfrak{b}_0)$ e pertanto $(\mathfrak{a}_0 \frown \mathfrak{b}_0) \geq (\mathfrak{a}_0) \frown (\mathfrak{b}_0)$. Ma $(\mathfrak{a}_0 \frown \mathfrak{b}_0)(s_0) = \mathfrak{a}_0 \frown \mathfrak{b}_0 = (\mathfrak{a}_0)(s_0) \frown (\mathfrak{b}_0)(s_0)$ mostra $(\mathfrak{a}_0 \frown \mathfrak{b}_0) \leq (\mathfrak{a}_0) \frown (\mathfrak{b}_0)$, poichè $(\mathfrak{a}_0 \frown \mathfrak{b}_0)$ è minima fra le figure aventi in s_0 lo stesso ideale (ved. **184**).

Osserveremo che la conclusione:

$$\textit{da } \mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{b}_0 \textit{ segue } (\mathfrak{a}_0) \geq (\mathfrak{b}_0)$$

è indipendente da qualsiasi ipotesi sulla varietà.

§ 4. Prospettive essenziali di una figura.

186. Ogni prospettiva $\mathfrak{p} \in V$ in cui una data figura $\mathfrak{a}$ presenta un suo aspetto (ved. **169**), sarà detta *prospettiva di* $\mathfrak{a}$. Le altre prospettive, cioè quelle $\mathfrak{p}$ con $\mathfrak{a}(s) = s$, non sono prospettive di $\mathfrak{a}$.

La figura prima $(\mathfrak{p})$ individuata (ved. **178** e **182**) dall'origine $\mathfrak{p}$ di una prospettiva $\mathfrak{p}$ di $\mathfrak{a}$ si chiamerà *figura prima di* $\mathfrak{a}$. Tale figura $(\mathfrak{p})$ è contenuta in $\mathfrak{a}$, poichè $(\mathfrak{p})(s') = \mathfrak{p} \frown s' \supset \mathfrak{a}(s) \frown s' \supset \mathfrak{a}(s')$, se $s' \subset s$, e $(\mathfrak{p})(s') = s' \supset \mathfrak{a}(s')$ se $s' \not\subseteq s$. Viceversa, se una figura prima $(\mathfrak{p})$ è contenuta in $\mathfrak{a}$, l'ideale $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p})(s) \supset \mathfrak{a}(s)$ è origine di una prospettiva $\mathfrak{p}$ di $\mathfrak{a}$. Le figure prime $(\mathfrak{p})$ di una figura $\mathfrak{a}$ sono dunque caratterizzate da $\mathfrak{a} \geq (\mathfrak{p})$.