e quindi

$$(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})(S) \subset (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})(s) \cdot S.$$

173. *Relazioni di situazione fra figure* in una varietà V si derivano da analoghe relazioni fra ideali.

Diremo che *la figura* $\mathfrak{a}$ *contiene la figura* $\mathfrak{b}$ e scriveremo

$$\mathfrak{a} \geq \mathfrak{b} \qquad (\text{oppure } \mathfrak{b} \leq \mathfrak{a})$$

allora e soltanto allora che sia

$$\mathfrak{a}(s) \subset \mathfrak{b}(s) \quad \text{per ogni} \quad s \in V.$$

La transitività di questa relazione è ovvia. Poichè l'uguaglianza di figure $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ equivale alla coincidenza $\mathfrak{a}(s) = \mathfrak{b}(s)$ dei loro ideali in tutte le prospettive $\mathfrak{p} \in V$, si ha $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, quando $\mathfrak{a} \geq \mathfrak{b}$ e $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$.

Scriveremo $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$, se $\mathfrak{a} \geq \mathfrak{b}$ senza che sia $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

Notiamo le relazioni generali

$$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \geq \mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \geq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}, \qquad \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$$

e le relazioni

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}, \qquad (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{b} \geq \mathfrak{a}$$

valide qualora $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ sia definita come figura in V. Da $\mathfrak{a} \geq \mathfrak{b}$ segue

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} \geq \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}, \qquad \mathfrak{a} \cap \mathfrak{c} \geq \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}, \qquad \mathfrak{a} + \mathfrak{c} \geq \mathfrak{b} + \mathfrak{c}.$$

174. *Per ogni ideale* $\mathfrak{a}(S)$ *in un aspetto* S *di base* A *vale*

$$\mathfrak{a}(S) = [\mathfrak{a}(S) \cap A] \cdot S$$

poichè ciascun $x \in \mathfrak{a}(S)$ è quoziente $x = \frac{a}{m}$ con $a, m \in A$, $m \not\subset \mathfrak{P}$ e $a = x \cdot$ $\cdot\, m \subset \mathfrak{a}(S) \cap A$, $m^{-1} \subset S$.

§ 2. Figure prime e primarie.

175. *Se* $\mathfrak{q}$ *è ideale* $\mathfrak{p}$*-primario dell'anello* A*, l'ideale* $\mathfrak{q} \cdot S$ *generato da esso in un aspetto* S *di base* A *è* $\mathfrak{p} \cdot S$*-primario.*

Dimostrazione. - Nel caso $\mathfrak{p} \not\subset \mathfrak{P}$ sarà anche $\mathfrak{q} \not\subset \mathfrak{P}$ e quindi $\mathfrak{p} \cdot S = S$, $\mathfrak{q} \cdot S = S$. Sia ora $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{P}$ e designamo con b, c, m, n, r elementi di A.

I. Da $\frac{b}{m} \frac{c}{n} = \frac{q}{r}$ con m, n, $r \not\subset \mathfrak{P}$, $q \in \mathfrak{q}$ segue $b \cdot c \subset \mathfrak{q}$, poichè $r \not\subset \mathfrak{p}$. Se dunque $\frac{c}{n} \not\subset \mathfrak{q} \cdot S$, cioè $c \not\subset \mathfrak{q}$, si avrà $b^h \subset \mathfrak{q}$ e $\left(\frac{b}{m}\right)^h \subset \mathfrak{q} \cdot S$ con certo h.

II. $\left(\frac{b}{m}\right)^h \subset \mathfrak{q} \cdot S$ con $m \subset\!\!\!|\!= \mathfrak{P}$, equivale a $b^h \cdot r \subset \mathfrak{q}$ con $r \subset\!\!\!|\!= \mathfrak{P}$ epperò $r \subset\!\!\!|\!= \mathfrak{p}$, cioè a $b^h \subset \mathfrak{q}$.

176. ***Se $\mathfrak{Q}$ è ideale $\mathfrak{P}$-primario in un sopra-anello di A, l'ideale $\mathfrak{Q} \frown A$ è $[\mathfrak{P} \frown A]$-primario in A.***

I. Da $b \cdot c \subset \mathfrak{Q} \frown A$, $c \subset\!\!\!|\!= \mathfrak{Q} \frown A$, $b, c \in A$ segue $b \cdot c \subset \mathfrak{Q}$, $c \subset\!\!\!|\!= \mathfrak{Q}$ e quindi $b^h \subset \mathfrak{Q} \frown A$ con certo h.

II. $b^h \subset \mathfrak{Q} \frown A$, $b \in A$, equivale a $b^h \subset \mathfrak{Q}$, $b \in A$ cioè $b \subset \mathfrak{P} \frown A$.

177. DEFINIZIONE. – Una figura $\mathfrak{a}$ nella varietà V è detta *figura primaria* o piuttosto *figura $\mathfrak{P}$-primaria* allora e soltanto allora, che ci sia un aspetto $S \in V$ e un ideale $\mathfrak{P}$-primario $\mathfrak{Q} \subset S$ tale che

$$\mathfrak{a}(s) = \mathfrak{Q} \frown s \quad \text{per} \quad s \subset S, \qquad \mathfrak{a}(s) = s \quad \text{per} \quad s \subset\!\!\!|\!= S.$$

Questa definizione si giustifica con la verifica di

$$(*) \qquad \mathfrak{a}(S') = \mathfrak{a}(s) \cdot S' \quad \text{per} \quad s \subset S' \in V.$$

I. Se $S' \subset S$, si ha $\mathfrak{a}(S') = \mathfrak{Q} \frown S'$. $\mathfrak{a}(s) = \mathfrak{Q} \frown s$ e quindi (ved. **174**) la relazione $\mathfrak{Q} \frown S' = [\mathfrak{Q} \frown s] \cdot S'$ equivalente a $(*)$.

II. Se $S' \subset\!\!\!|\!= S$, si ha $\mathfrak{a}(S') = S'$ e per $s \subset\!\!\!|\!= S$ anche $\mathfrak{a}(s) \cdot S' = S'$.

Per $s \subset S$ osserviamo che da $S' \subset\!\!\!|\!= S$ segue $\mathfrak{P} \frown s \subset\!\!\!|\!= \mathfrak{P}' \frown s$, poichè s è base di S e S'. Se fosse $\mathfrak{Q} \frown s \subset \mathfrak{P}' \frown s$, anche $\mathfrak{P} \frown s$ sarebbe $\subset \mathfrak{P}' \frown s$. Esiste dunque $q \in \mathfrak{Q} \frown s$, $q \subset\!\!\!|\!= \mathfrak{P}'$ e quindi $1 = q \cdot \frac{1}{q} \subset [\mathfrak{Q} \frown s] \cdot S'$, cioè $\mathfrak{a}(s) \cdot S' = S'$. C. d. d.

Quando $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}$ e soltanto nel caso di tale figura primaria parleremo di una *figura prima*.

Figure primarie saranno spesso designate con lo stesso segno come l'ideale primario che serve alla loro definizione.

178. Per riservare, a quanto sia possibile, i segni $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{P}'$ ecc. come simboli di prospettive e delle loro origini, passeremo ogni volta che un ideale primo di un anello A sia diverso da A e contenga tutti gli elementi inattivi di A alla prospettiva $\mathfrak{P}$ individuata da esso (ved. 72) e lo scriveremo come intersezione $\mathfrak{P} \frown A$ dell'origine di quella prospettiva con l'anello A.

Un ideale $[\mathfrak{P} \frown s]$-primario $\mathfrak{q}$ di un aspetto $s \in V$ individua una figura $\mathfrak{P}$-primaria $\mathfrak{Q}$ con $\mathfrak{Q}(S) = \mathfrak{q} \cdot S$, che fra tutte le figure $\mathfrak{a}$ soddisfacenti alla condizione $\mathfrak{a}(s) = \mathfrak{q}$ è minima.

175 — 178

Dimostrazione. - L'ideale $\mathfrak{q} \cdot S$ è $\mathfrak{P}$-primario in S (ved. **175**) di seguito a $[\mathfrak{P} \frown s] \cdot S = \mathfrak{P}$ (ved. **72** o **174**). Esso individua pertanto (ved. **177**) una figura $\mathfrak{P}$-primaria $\mathfrak{Q}$ con $\mathfrak{Q}(s) = \mathfrak{q} \cdot S \frown s$.

Ogni $x \in \mathfrak{q} \cdot S$ è quoziente $\frac{q}{m}$ con $q \in \mathfrak{q}$, $m \in s$, $m \not\subset \mathfrak{P} \frown s$. Se di più $x \in s$. si conclude da $m \cdot x \subset \mathfrak{q}$, $m \not\subset \mathfrak{P} \frown s$, che $x \subset \mathfrak{q}$, poichè $\mathfrak{q}$ è $[\mathfrak{P} \frown s]$-primario. Dunque $\mathfrak{q} \cdot S \frown s \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{q} \cdot S \frown s$ e quindi $\mathfrak{Q}(s) = \mathfrak{q}$.

Se una figura $\mathfrak{a}$ in V soddisfa inoltre a $\mathfrak{a}(s) = \mathfrak{q}$, si ha $\mathfrak{a}(S) = \mathfrak{a}(s) \cdot S = \mathfrak{q} \cdot S$ e perciò

$$\mathfrak{a}(S') \subset \mathfrak{a}(S) \frown S' = \mathfrak{q} \cdot S \frown S' = \mathfrak{Q}(S') \quad \text{se} \quad S' \subset S,$$

$$\mathfrak{a}(S') \subset S' = \mathfrak{Q}(S') \quad \text{se} \quad S' \not\subset S,$$

il che mostra $\mathfrak{a} \geq \mathfrak{Q}$.

179. *Una figura $\mathfrak{P}$-primaria $\mathfrak{Q}$ è individuata da un qualsiasi suo ideale $\mathfrak{Q}(s) \neq s$.*

Sia $\mathfrak{Q}(s') \neq s'$, cioè $s' \subset S$ e $\mathfrak{Q}(s') = \mathfrak{Q}(S) \frown s'$. La figura $\mathfrak{Q}'$ individuata da questo ideale $[\mathfrak{P} \frown s']$-primario (ved. **176**) è $\mathfrak{P}$-primaria (ved. **178**) con $\mathfrak{Q}'(S) = \mathfrak{Q}(s') \cdot S = \mathfrak{Q}(S)$, donde segue $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q}$.

§ 3. Figura individuata da un suo ideale.

180. *Da $s \in V(A)$, $S \in V(s)$ segue $S \in V(A)$.*

Invero, ogni $x \in s$ è quoziente $\frac{a}{b}$ con a, $b \in A$, $b \not\subset \mathfrak{p}$ e quindi $\mathfrak{b} \not\subset \mathfrak{P} \frown s \subset \mathfrak{p}$. Applicando l'osservazione **75**, si trova A essere base di $\mathfrak{P}$.

181. *Ogni ideale $\mathfrak{a}_0$ di un singolo aspetto $s_0 \in V$ individua una figura $(\mathfrak{a}_0)$ in V definita da*

$$(\mathfrak{a}_0)(s) = [\mathfrak{a}_0 \frown s] \cdot s$$

Dimostrazione. - Dobbiamo verificare $[\mathfrak{a}_0 \frown s] \cdot S = [\mathfrak{a}_0 \frown S] \cdot S$ per $S \in V(s) \subset V$. Siccome $s \frown s_0$ è base di s (ved. **110**) e quindi di S (ved. **180**) ogni $a_0 \in \mathfrak{a}_0 \frown S$ è quoziente $a_0 = \frac{a}{b}$ con a, $b \in s \frown s_0$, $a = a_0 \cdot b \subset \mathfrak{a}_0 \frown s$, $b^{-1} \subset S$, il che mostra $\mathfrak{a}_0 \frown S \subset [\mathfrak{a}_0 \frown s] \cdot S$, mentre $[\mathfrak{a}_0 \frown s] \cdot S \subset [\mathfrak{a}_0 \frown S] \cdot S$ è chiaro da se.

182. *La figura* $(\mathfrak{q})$ *individuata* secondo 181 *da un ideale* $[\mathfrak{P} \frown s]$-*primario* $\mathfrak{q}$ *di* $s \in V$ *coincide con la figura* $\mathfrak{P}$-*primaria* $\mathfrak{Q}$ *definita in* **178.**