166. Dobbiamo ammettere che le g parti $A((C, V^{\tau_i}))$, in cui si spezza lo spazio $S(V)$ considerato in **164**, abbiano punti comuni. C'è però un caso importante e generale, in cui quelle g parti certo sono sconnesse l'una con l'altra.

L'integrità $I(K)$ del corpo K di una varietà aritmetica prima V è base di una varietà $V(I(K))$ chiusa (ved. **83** e **118**). La sua sintesi $(V(I(K)), V)$ con V (ved. **116**) contiene dunque di ogni prospettiva appartenente alla V almeno una estensione. Essa è chiusa, quando V è chiusa (ved. **121**).

Chiameremo *integra* una varietà aritmetica prima V proprio allora che sia $V = (V(I(K)), V)$, cioè che ogni aspetto appartenente alla V contenga l'integrità del corpo della V.

In questo caso è ovvio, quelle $g =$ grado K parti $A((C, V^{\tau_i}))$ non hanno punti comuni, giacchè un elemento $x \in I(K)$ generante il corpo $I\left(\frac{K}{(1)}\right) = (\iota(K))$ (ved. **142**) assume nelle g realizzazioni analitiche di K g valori complessi distinti $x^{\tau_1}, x^{\tau_2}, \ldots, x^{\tau_g}$, sicchè $A((C, V^{\tau_i}))$, è identico con la totalità dei punti $P \in S(V)$ per i quali $x(P) = x^{\tau_i}$. Lo spazio della varietà $V(I(K))$ consiste di g punti $p_1, \ldots, p_g$ determinati da $x(p_i) = x^{\tau_i}$, e $A((C, V^{\tau_i}))$ è la totalità dei punti di $S(V)$ sovrapposti a p_i (ved. **135**). Ricordiamo che nel caso di una varietà chiusa V tutti questi spazi parziali $A((C, V^{\tau_i}))$ sono compatti (ved. **139**).

167. Concludiamo con l'osservazione che l'analisi effettuata in **150** fino a **156** si trasporta facilmente al caso di una varietà $V([C, x_1, \ldots, x_m])$ analitica e algebrica. Il polinomio $\Phi(x, y \mid u)$ corrispondente sarà irriducibile in $C[x, y, u]$ e si dimostra come in **159** III e **165**, che lo spazio analitico di una varietà prima algebrica sopra C è $2n$-dimensionalmente connesso, se il suo oggetto è corpo analitico n-dimensionale.

CAPITOLO VI

FIGURE IN UNA VARIETA

§ 1. **Il calcolo delle figure.**

168. *Un ideale* $\mathfrak{a}(s) \neq s$ *di un aspetto commutativo* s *determina un aspetto* $s/\mathfrak{a}(s)$ *con l'origine* $\mathfrak{p}/\mathfrak{a}(s)$.

Invero, da $\mathfrak{a}(s) \neq s$ segue $\mathfrak{a}(s) \subset \mathfrak{p}$, sicchè $\mathfrak{p}/\mathfrak{a}(s) = \mathfrak{p} + \mathfrak{a}(s)/\mathfrak{a}(s)$ è ideale $\neq s/\mathfrak{a}(s)$ in $s/\mathfrak{a}(s)$. Se $x + \mathfrak{a}(s)$ con $x \in s$ non appartiene a $\mathfrak{p}/\mathfrak{a}(s)$, si ha $x \not\subset \mathfrak{p}$ e quindi con $x^{-1} + \mathfrak{a}(s) \in s/\mathfrak{a}(s)$ un inverso di $x + \mathfrak{a}(s)$ in $s/\mathfrak{a}(s)$. (Ved. **68**).

169. Definizioni. – In una varietà V è data una ***figura*** $\mathfrak{a}$ allora e soltanto allora che a ogni aspetto $s \in V$ sia associato come ***ideale di*** $\mathfrak{a}$ ***in*** s (in $\mathfrak{p}$) un ideale $\mathfrak{a}(s) \subset s$ in modo tale, che sempre vale

$$(*) \qquad \mathfrak{a}(S) = \mathfrak{a}(s) \cdot S \quad \text{per} \quad s \subset S \in V,$$

(cioè che l'ideale $\mathfrak{a}(S)$ ha la base $\mathfrak{a}(s)$).

Una figura $\mathfrak{a}$ *passa* per ogni prospettiva $\mathfrak{p} \in V$, dove $\mathfrak{a}(s) \neq s$, presentandovi l'aspetto $s/\mathfrak{a}(s)$ (ved. **168**) come il ***suo aspetto***. Essa non passa per le altre prospettive $\mathfrak{p} \in V$.

170. Quanto all'applicazione della condizione $(*)$ giova rammentare, che in una varietà la situazione $s \subset S$ sempre equivale a $\mathfrak{P} \cap s \subset \mathfrak{p}$ (ved. **112**) oppure a $S \in V(s)$, cioè che S ha la base s. (Ved. **110** I). La varietà parziale $V(s)$ di V sarà talvolta chiamata la ***stella*** di s (di $\mathfrak{p}$).

Tenuto conto di $S \in V(s)$, si deduce da $(*)$ che ogni $x \in \mathfrak{a}(S)$ è quoziente

$$x = \frac{a}{m} \quad \text{con} \quad a \in \mathfrak{a}(s),\ m \in s,\ m \not\subset \mathfrak{P},$$

e che viceversa ogni tale quoziente è elemento dell'ideale $\mathfrak{a}(S)$.

171. Il calcolo degli ideali si trasporta subito alle figure esprimendo così importanti operazioni geometriche.

La *intersezione di figure* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots, \mathfrak{c}$ in V è definita come la figura

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \ldots + \mathfrak{c}$$

con gli ideali

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \ldots + \mathfrak{c})(s) = \mathfrak{a}(s) + \mathfrak{b}(s) + \ldots + \mathfrak{c}(s)$$

che di conseguenza a

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \ldots + \mathfrak{c})(S) = \mathfrak{a}(S) + \mathfrak{b}(S) + \ldots + \mathfrak{c}(S) = \mathfrak{a}(s) \cdot S + \mathfrak{b}(s) \cdot S + \ldots + \mathfrak{c}(s) \cdot S =$$
$$= (\mathfrak{a}(s) + \mathfrak{b}(s) + \ldots + \mathfrak{c}(s)) \cdot S$$

davvero soddisfano alla condizione caratteristica per le figure.

La *unione di figure* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots, \mathfrak{c}$ in V è la figura

$$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \cap \ldots \cap \mathfrak{c}$$

definita da

$$(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \cap \ldots \cap \mathfrak{c})(s) = \mathfrak{a}(s) \cap \mathfrak{b}(s) \cap \ldots \cap \mathfrak{c}(s).$$

È ovvio, che $s \subset S \in V$ induce

$$(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \cap \ldots \cap \mathfrak{c})(s) \cdot S \subset \mathfrak{a}(s) \cdot S \cap \mathfrak{b}(s) \cdot S \cap \ldots \cap \mathfrak{c}(s) \cdot S =$$
$$= \mathfrak{a}(S) \cap \mathfrak{b}(S) \cap \ldots \cap \mathfrak{c}(S) = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \cap \ldots \cap \mathfrak{c})(S).$$

Per dimostrare la situazione inversa, osserviamo che ogni elemento x di $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \cap \ldots \cap \mathfrak{c})(S) = \mathfrak{a}(S) \cap \mathfrak{b}(S) \cap \ldots \cap \mathfrak{c}(S)$ ammette (ved. **170**) le rappresentazioni $x = \frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \ldots = \frac{c}{p}$ con $a \in \mathfrak{a}(s)$, $b \in \mathfrak{b}(s), \ldots, c \in \mathfrak{c}(s)$; $m, n, \ldots, p \in s$, $\not\subset \mathfrak{p}$, le quali dànno $x = \frac{d}{m \cdot n \ldots p}$ con $m \cdot n \ldots p \not\subset \mathfrak{p}$, cioè $\frac{1}{m \cdot n \ldots p} \in S$ e $d \in \mathfrak{a}(s) \cap \mathfrak{b}(s) \cap \ldots \cap \mathfrak{c}(s)$, il che mostra $\mathfrak{a}(S) \cap \mathfrak{b}(S) \cap \ldots \cap \mathfrak{c}(S) \subset (\mathfrak{a}(s) \cap \mathfrak{b}(s) \cap \ldots \cap \mathfrak{c}(s)) \cdot S$, c. d. d.

Il *prodotto di figure* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots, \mathfrak{c}$ in V è la figura

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{c}$$

definita da

$$(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{c})(s) = \mathfrak{a}(s) \cdot \mathfrak{b}(s) \cdot \ldots \cdot \mathfrak{c}(s).$$

La condizione caratteristica per figura si verifica subito con la regola di moltiplicazione di ideali mediante le loro basi.

La figura $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{a}$ sarà scritta $\mathfrak{a}^m$, se m è il numero dei « fattori » $\mathfrak{a}$ di tale prodotto.

172. Meno importante ma utile in qualche dimostrazione è la *divisione*

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$$

di figure $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ in V, cioè l'operazione che associa a ogni aspetto $s \in V$ l'ideale

$$(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})(s) = \mathfrak{a}(s) : \mathfrak{b}(s)$$

cioè la totalità dei $c \in s$ con $c \cdot \mathfrak{b}(s) \subset \mathfrak{a}(s)$.

Non possiamo garantire in generale che si ottenga così una figura in V. Pur verificandosi subito

$$(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})(s) \cdot S \subset (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})(S)$$

come conseguenza di $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})(s) \cdot \mathfrak{b}(S) = (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})(s) \cdot \mathfrak{b}(s) \cdot S \subset \mathfrak{a}(s) \cdot S = \mathfrak{a}(S)$, dobbiamo ricorrere all'*ipotesi che ogni aspetto fra V sia noetheriano,* per poter verificare la situazione inversa di quegli ideali.

Se $b_1, b_2, \ldots, b_h$ è base dell'ideale $\mathfrak{b}(s)$, si può caratterizzare $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})(S) = \mathfrak{a}(S) : \mathfrak{b}(S)$ quale totalità dei quozienti $\frac{c}{n}$ con $c, n \in s$, $n \not\subset \mathfrak{p}$ (ved. **170**) che soddisfano a

$$\frac{c}{n} \cdot b_i \subset \mathfrak{a}(S) \ (i = 1, \ldots, h), \text{ cioè } \frac{c \cdot b_i}{n} = \frac{a_i}{m} \text{ con } a_i \in \mathfrak{a}(s),\ m \in s,\ \not\subset \mathfrak{p}.$$

Ne segue $(m \cdot c) \cdot b_i \in \mathfrak{a}(s)$, cioè $m \cdot c \in \mathfrak{a}(s) : \mathfrak{b}(s)$ e $\frac{c}{n} \in (\mathfrak{a}(s) : \mathfrak{b}(s)) \cdot \frac{1}{mn} \subset (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})(s) \cdot S$

e quindi

$$(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})(S) \subset (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})(s) \cdot S.$$

173. ***Relazioni di situazione fra figure*** in una varietà V si derivano da analoghe relazioni fra ideali.

Diremo che *la figura* $\mathfrak{a}$ *contiene la figura* $\mathfrak{b}$ e scriveremo

$$\mathfrak{a} \geq \mathfrak{b} \qquad (\text{oppure } \mathfrak{b} \leq \mathfrak{a})$$

allora e soltanto allora che sia

$$\mathfrak{a}(s) \subset \mathfrak{b}(s) \quad \text{per ogni} \quad s \in V.$$

La transitività di questa relazione è ovvia. Poichè l'uguaglianza di figure $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ equivale alla coincidenza $\mathfrak{a}(s) = \mathfrak{b}(s)$ dei loro ideali in tutte le prospettive $\mathfrak{p} \in V$, si ha $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, quando $\mathfrak{a} \geq \mathfrak{b}$ e $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$.

Scriveremo $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$, se $\mathfrak{a} \geq \mathfrak{b}$ senza che sia $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

Notiamo le relazioni generali

$$\mathfrak{a} \frown \mathfrak{b} \geq \mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \geq \mathfrak{a} \frown \mathfrak{b}, \qquad \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$$

e le relazioni

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}, \qquad (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{b} \geq \mathfrak{a}$$

valide qualora $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ sia definita come figura in V. Da $\mathfrak{a} \geq \mathfrak{b}$ segue

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} \geq \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}, \qquad \mathfrak{a} \frown \mathfrak{c} \geq \mathfrak{b} \frown \mathfrak{c}, \qquad \mathfrak{a} + \mathfrak{c} \geq \mathfrak{b} + \mathfrak{c}.$$

174. *Per ogni ideale* $\mathfrak{a}(S)$ *in un aspetto* S *di base* A *vale*

$$\mathfrak{a}(S) = [\mathfrak{a}(S) \frown A] \cdot S$$

poichè ciascun $x \in \mathfrak{a}(S)$ è quoziente $x = \dfrac{a}{m}$ con a, $m \in A$, $m \not\subset \mathfrak{P}$ e $a = x \cdot$ $\cdot\, m \subset \mathfrak{a}(S) \frown A$, $m^{-1} \subset S$.

§ 2. Figure prime e primarie.

175. *Se* $\mathfrak{q}$ *è ideale* $\mathfrak{p}$*-primario dell'anello* A, *l'ideale* $\mathfrak{q} \cdot S$ *generato da esso in un aspetto* S *di base* A *è* $\mathfrak{p} \cdot S$*-primario.*

DIMOSTRAZIONE. - Nel caso $\mathfrak{p} \not\subset \mathfrak{P}$ sarà anche $\mathfrak{q} \not\subset \mathfrak{P}$ e quindi $\mathfrak{p} \cdot S = S$, $\mathfrak{q} \cdot S = S$. Sia ora $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{P}$ e designamo con b, c, m, n, r elementi di A.

I. Da $\dfrac{b}{m} \dfrac{c}{n} = \dfrac{q}{r}$ con m, n, $r \not\subset \mathfrak{P}$, $q \in \mathfrak{q}$ segue $b \cdot c \subset \mathfrak{q}$, poichè $r \not\subset \mathfrak{p}$. Se dunque $\dfrac{c}{n} \not\subset \mathfrak{q} \cdot S$, cioè $c \not\subset \mathfrak{q}$, si avrà $b^h \subset \mathfrak{q}$ e $\left(\dfrac{b}{m}\right)^h \subset \mathfrak{q} \cdot S$ con certo h.