Allora $a \subset\!\!|\!= \mathfrak{P}'$ per tutte le prospettive $\mathfrak{P}'$ portanti punti di U_N, così che $B \subset S'$, cioè $\mathfrak{P}' \in V(B)$. Infatti, $\mathfrak{P}'$ è estensione della prospettiva $\mathfrak{P}'' \in V(B)$ individuata da $\mathfrak{P}' \cap B$ (ved. **73**) e pertanto (ved. **111**) uguale a $\mathfrak{P}''$.

Il fatto che tutti i punti $Q \in U_N$ siano portati da prospettive che appartengono alla $V(B)$, e soddisfino alle disuguaglianze (**) conduce alla conclusione

$$U_N \subset U(P, B, y_1, y_2, \ldots, y_n, r_1, r_2, \ldots, r_n)$$

che esprime proprio l'assioma da verificare.

§ 2. Sovrapposizione di punti.

135. DEFINIZIONE. - Un punto P è ***sovrapposto al punto p*** allora e soltanto allora che la prospettiva $\mathfrak{P}$ portante P sia estensione della prospettiva $\mathfrak{p}$ portante p e che valga $x(P) = x(p)$ per ogni $x \in s$.

La sovrapposizione di punti è ovviamente transitiva come l'estensione di prospettive.

Chiameremo ***prospettive aritmetiche*** quelle prospettive che ammettono una base aritmetica. Partendo dal fatto evidente che il corpo $s(p)$ dei valori complessi $z(p)$ in un punto p portato da una prospettiva aritmetica $\mathfrak{p}$ è un insieme numerabile, possiamo dimostrare:

Se la prospettiva $\mathfrak{P}$ è estensione della prospettiva aritmetica $\mathfrak{p}$ con un numero finito di elementi, ad ogni punto p portato da $\mathfrak{p}$ è sovrapposto almeno un punto P portato da $\mathfrak{P}$.

DIMOSTRAZIONE. - Risulti $\mathfrak{P}$ dall'estensione di $\mathfrak{p}$ con $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Allora $S/\mathfrak{P} \quad K = (k, u_1, u_2, \ldots, u_m)$ con $k = s + \mathfrak{P}/\mathfrak{P}$ isomorfo a $s/\mathfrak{p}$ (ved. **67**) e $u_i = x_i + \mathfrak{P}$. L'ipotesi che $s/\mathfrak{p}$ sia isomorfo al sottocorpo $s(p)$ del corpo C dei numeri complessi garantisce che $S/\mathfrak{P}$ è di caratteristica 0 e pertanto separabile sopra k. Ponendo $\dim \frac{K}{k} = h$, possiamo presupporre la numerazione degli x_i tale che sia $K = (k, u_1, u_2, \ldots, u_h, v)$ con $v = y + \mathfrak{P}$, definito sopra $K_0 = (k, u_1, u_2, \ldots, u_h)$ dall'equazione

$$f(v, u_1, u_2, \ldots, u_h) = v^n + c_1 \cdot v^{n-1} + \ldots + c_n = 0, \qquad (c_i \in K_0).$$

Per dimostrare il teorema basta realizzare gli elementi di K con numeri complessi in modo tale che ne risulti un isomorfismo di K in C estendente l'isomorfismo $k \rightarrow s(p)$ dato col punto p.

Il fatto suddetto che $s(p)$ è insieme numerabile permette di dimostrare successivamente l'esistenza di numeri complessi a_i tali che $a_1, a_2, \ldots, a_l$ siano algebricamente indipendenti sopra $s(p)$.

Invero, se sono già trovati $l (\geq 0)$ tali numeri, è chiaro che il corpo $(s(p), a_1, a_2, \ldots, a_l)$ generato da essi sopra $s(p)$ è pure un insieme numerabile. cosicchè, qualora non si potesse trovare un numero a_{l+1} algebricamente indipendente sopra quel corpo, la totalità C dei numeri complessi sarebbe numerabile.

Dopo aver scelto $a_1, a_2, \ldots, a_h$ nel modo suddetto, si definisca

$$(*) \qquad z(P) = \frac{\Sigma\, a_{i_1 \ldots i_h}(p) \cdot a_1^{i_1} \ldots a_h^{i_h}}{\Sigma\, b_{i_1 \ldots i_h}(p) \cdot a_1^{i_1} \ldots a_h^{i_h}}$$

se

$$z + \mathfrak{P} = \frac{\Sigma\,(a_{i_1 \ldots i_h} + \mathfrak{P}) \cdot u_1^{i_1} \ldots u_h^{i_h}}{\Sigma\,(b_{i_1 \ldots i_h} + \mathfrak{P}) \cdot u_1^{i_1} \ldots u_h^{i_h}} \qquad (\text{con } a_{i_1 \ldots i_h},\ b_{i_1 \ldots i_h} \in s)$$

e generalmente

$$(**) \qquad z(P) = \Sigma\, z_i(P) \cdot b^i,$$

con $b \in C$ ottenuto dalla soluzione dell'equazione

$$\bar{f}(b) = b^n + c_1(P) \cdot b^{n-1} + \ldots + c_n(P) = 0,$$

se

$$z + \mathfrak{P} = \Sigma\,(z_i + \mathfrak{P}) \cdot v^i \qquad (\text{con } z_i + \mathfrak{P} \in K_0).$$

La indipendenza algebrica dei numeri $a_1, \ldots, a_h$ sopra $s(p)$ rende possibile senza eccezione la definizione (*) che ovviamente fornisce un isomorfismo

$$(***) \qquad z + \mathfrak{P} \to z(P)$$

di K_0 in C avente in s l'effetto $z(P) = z(p)$. La scelta di b assicura quindi che l'estensione (**) di (***) al corpo K conservi il carattere di isomorfismo in C.

L'omomorfismo or ora definito $z \to z(P)$ è un punto P portato dalla prospettiva $\mathfrak{P}$ e sovrapposto al punto p.

136. *Se la prospettiva $\mathfrak{P}$ è estensione della prospettiva $\mathfrak{p}$ con un insieme finito di elementi tali che sia*

$$dim\, \frac{S/\mathfrak{P}}{s + \mathfrak{P}/\mathfrak{P}} = 0, \qquad grado\, \frac{S/\mathfrak{P}}{s + \mathfrak{P}/\mathfrak{P}} = n,$$

ad ogni punto p portato da $\mathfrak{p}$ sono sovrapposti precisamente n punti portati da $\mathfrak{P}$.

DIMOSTRAZIONE. - Possiamo riprendere la dimostrazione del teorema precedente, poichè l'ipotesi ivi fatta, che $\mathfrak{p}$ sia prospettiva aritmetica diventa irrilevante nel caso che sia $h = 0$.

Per completare la dimostrazione bisogna soltanto mostrare, che ci sono proprio n soluzioni b dell'equazione $\bar{f}(b) = 0$ di grado n.

Dall'irriducibilità del polinomio $f(v)$ in $k[v]$ consegue un'identità $f(v) \cdot g(v) + f'(v) \cdot h(v) = c \neq 0$ con $g(v)$, $h(v) \in k[v]$, $c \in k$, designando con $f'(v)$ la derivata di $f(v)$. Se si applica ai coefficienti di quei polinomi l'isomorfismo

$k \to s(p)$, si ottiene una simile identità $\bar{f}(v) \cdot \bar{g}(v) + \bar{f}'(v) \cdot \bar{h}(v) = c(p) \neq 0$ nell'anello $s(p)[v]$, la quale mostra $f'(b) \neq 0$ e con ciò la semplicità di ogni soluzione b di $\bar{f}(b) = 0$.

137. L'applicabilità del teorema precedente è ristretta dall'ipotesi che la dimensione di $S/\mathfrak{P}$ sopra $s + \mathfrak{P}/\mathfrak{P}$ sia 0. È utile perciò osservare che

Se $\mathfrak{P}$ *estende* $\mathfrak{p}$ *con* $x_1, x_2, \dots, x_m$, *esiste anche un'estensione* $\mathfrak{P}'$ di $\mathfrak{p}$ *con* $x_1, x_2, \dots, x_m$ *dentro* S (cioè $S' \subset S$) *tale che sia* $S'/\mathfrak{P}'$ 0*-dimensionale sopra* $s + \mathfrak{P}'/\mathfrak{P}'$.

DIMOSTRAZIONE. – Il teorema è vero se $K = S/\mathfrak{P}$ è 0-dimensionale sopra $k = s + \mathfrak{P}/\mathfrak{P}$. Supponiamolo dimostrato per $\dim \frac{K}{k} < n$ e consideriamo il caso $\dim \frac{K}{k} = n > 0$.

La numerazione degli x_i può essere presupposta tale che $u_i = x_i + \mathfrak{P}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ siano algebricamente indipendenti sopra k. Designando con h il grado di K sopra $K_0 = (k, u_1, \dots, u_n)$ si può scrivere

$$K = \sum_{i=1}^{h} K_0 \cdot v_i \quad \text{con} \quad v_i = y_i + \mathfrak{P}, \quad y_i \in A = [s, x_1, x_2, \dots, x_m], \quad y_1 = 1.$$

Esiste $c \in A_0 = [s, x_1, \dots, x_n]$, $c \not\subset \mathfrak{P}$ tale che

$$c \cdot x_i \subset \sum_{l=1}^{h} A_0 \cdot y_l + \mathfrak{P} \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$c \cdot y_i \cdot y_j \subset \sum_{l=1}^{h} A_0 \cdot y_l + \mathfrak{P} \qquad (i, j = 1, 2, \dots, h).$$

Per ogni $g \in A$ vale allora una relazione

$$(*) \qquad c^N \cdot g \subset \sum_{l=1}^{h} A_0 \cdot y_l + \mathfrak{P} \qquad \text{con } N \text{ abbastanza grande.}$$

Si scelga ora $f \in A_0$ tale che i polinomi $\bar{f}(u_1, \dots, u_n) = f + \mathfrak{P}$ e $\bar{c}(u_1, \dots, u_n) = c + \mathfrak{P}$ siano relativamente primi in $k[u_1, \dots, u_n]$, $\bar{f}$ essendo $\not\subset k$.

Vale allora $c^L \not\subset f \cdot A + \mathfrak{P}$ per ogni esponente $L \geq 0$. Invero, se fosse $c^L \subset f \cdot g + \mathfrak{P}$ con $g \in A$, si troverebbe, ponendo secondo $(*)$, con N abbastanza grande, $c^N \cdot g \subset \sum_{i=1}^{h} f_i \cdot y_i + \mathfrak{P}$, una relazione

$$c^{L+N} \subset \sum_{i=1}^{h} f \cdot f_i \cdot y_i + \mathfrak{P}, \quad \text{oppure} \quad \bar{c}^{L+N} = \sum_{i=1}^{h} \bar{f} \cdot \bar{f}_i \cdot v_i$$

con $\bar{f}_i \in k[u_1, \dots, u_n]$. Per l'indipendenza lineare dei v_i sopra K_0 dovrebbe essere allora $\bar{c}^{L+N} = \bar{f} \cdot \bar{f}_1$, il che è escluso dall'ipotesi che $\bar{f}$ sia primo rispetto a $\bar{c}$.

È dimostrato in particolare che l'ideale $\mathfrak{a} = f \cdot A + \mathfrak{P} \cap A$ è diverso dall'anello intero A.

Poichè l'anello $A/\mathfrak{a}$, in quanto omomorfo a $A/\mathfrak{P} \cap A \simeq A + \mathfrak{P}/\mathfrak{P} = k[u_1, \ldots, u_m]$, è noetheriano, si può parlare dei divisori primi di $\mathfrak{a}$ (ved. **91**). Se questi, tutti quanti contenessero c, si avrebbe per L abbastanza grande $c^L \subset f \cdot A + \mathfrak{P}$, il che abbiamo visto non può accadere.

Sia dunque $\mathfrak{c}$ divisore primo di $\mathfrak{a}$ non contenente c. Dato che $\mathfrak{P} \cap A \subset \mathfrak{c}$ e che $\mathfrak{P} \cap A$ individua una prospettiva $\mathfrak{P}$, quell'ideale primo $\mathfrak{c}$ comprende tutti gli elementi di A inattivi in A e individua pertanto una prospettiva $\mathfrak{P}''$ di base A (ved. **72**).

Da $\mathfrak{P}'' \cap A = \mathfrak{c} \supset \mathfrak{a} \supset \mathfrak{P} \cap A$ segue $S'' \subset S$. Ponendo $S''/\mathfrak{P}'' = K''$, $s + \mathfrak{P}''/\mathfrak{P}'' = k''$, $x_i + \mathfrak{P}'' = u_i''$, $(k'', u_1'', \ldots, u_n'') = K_0''$, $y_i + \mathfrak{P}'' = v_i''$, e tenendo conto di (*) e di $c \not\subset \mathfrak{P}''$, si può scrivere

$$A + \mathfrak{P}''/\mathfrak{P}'' = \sum_{i=1}^{h} K_0'' \cdot v_i'', \text{ cioè } K'' = \sum_{i=1}^{h} K_0'' \cdot v_i'',$$

essendo $A + \mathfrak{P}''/\mathfrak{P}''$ anello e K'' il suo corpo quoziente. Dunque K'' è 0-dimensionale sopra K_0'', che, essendo $f \subset \mathfrak{P}''$, è al più $(n-1)$-dimensionale sopra k''. Il fatto che sia $\dim \frac{K''}{k''} < n$, permette di applicare un procedimento di induzione e di derivarne l'esistenza di una estensione $\mathfrak{P}'$ di $\mathfrak{p}$ con $x_1, x_2, \ldots, x_m$ soddisfacente alle condizioni $S' \subset S'' \subset S$, $\dim \frac{K'}{k'} = 0$ per $K' = S'/\mathfrak{P}'$ e $k' = s + \mathfrak{P}'/\mathfrak{P}'$, c. d. d.

138. Ogni aspetto capace di portare un punto contiene il corpo primo (1). Se dunque si tratta solamente dello spazio di una varietà V, basta sostituire alla V il sistema parziale $(V, (1))$ di V costituito dalle prospettive $\mathfrak{P} \in V$ che presentano aspetti contenenti il corpo (1). Designamolo con $(V, (1))$, poichè esso si verifica subito essere la sintesi di V e della varietà (1), che consiste soltanto dell'aspetto totale del corpo (1).

Dato che i valori degli elementi del corpo primo in un punto P non dipendono da P, si può dire, che lo spazio di una varietà, cioè ogni punto di questo spazio, è sovrapposto all'unico punto portato dal corpo primo.

§ 3. Lo spazio di una varietà algebrica chiusa.

139. *La totalità dei punti dello spazio di una varietà algebrica e chiusa sopra un corpo k che sono sovrapposti a un medesimo punto p portato da k. è **spazio compatto** di Hausdorff, purchè si definisca la topologia con intorni di base algebrica sopra k.*