Nel caso di caratteristica 0 ricaviamo dal teorema precedente che gli elementi dell'integrità $I(K)$ sono comuni a tutti gli aspetti chiusi di K, e il teorema **120** ci dice che non ci sono altri elementi comuni a quegli aspetti.

CAPITOLO V

LO SPAZIO DI UNA VARIETÀ

§ 1. **Punti e i loro intorni.**

132. DEFINIZIONE. – Un *punto di un'oggetto* è un omomorfismo di un aspetto S di questo oggetto nel corpo C dei numeri complessi. Esso continua la prospettiva $S \to S/\mathfrak{P}$ con un isomorfismo del soggetto $S/\mathfrak{P}$ nel corpo C. Ogni omomorfismo di S in C risultante nel modo suddetto dalla prospettiva $\mathfrak{P}$ sarà chiamato un punto dell'oggetto (S) *portato dalla prospettiva* $\mathfrak{P}$ (oppure: portato dall'aspetto S).

Aspetti S che si presentano a soggetti $S/\mathfrak{P}$ di caratteristica $p \neq 0$ non portano punti. Gli altri ne portano tanti quanti ne porta il soggetto $S/\mathfrak{P}$ stesso, considerato come aspetto totale.

Ogni omomorfismo σ di un anello A nel corpo C determina un punto, purchè esso riduca a zero tutti gli elementi inattivi in A senza annullare tutto l'anello. Invero, l'insieme $\mathfrak{c}$ degli elementi annullati da σ è ideale primo soddisfacente alle premesse del teorema **72**, il quale mostra che A è base di una prospettiva $\mathfrak{P}$. Estendendo quell'omomorfismo σ all'aspetto S con la formula evidentemente univoca

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\sigma} = \frac{a^{\sigma}}{b^{\sigma}} \qquad (a,\ b \in A,\ b \not\subset \mathfrak{c}),$$

si ottiene un punto portato dalla prospettiva $\mathfrak{P}$.

Colla frase « *base di un punto* P » intenderemo « base di una prospettiva portante il punto P ».

I punti saranno designati con lettere latine P, Q, p, q, ecc. Benchè rappresentino omomorfismi scriveremo

$$z(P)$$

(invece di z^P come sarebbe in accordo con la convenzione fatta in 1) per *il valore dell'elemento z nel punto P*, cioè per il numero complesso risultante dall'applicazione dell'omomorfismo P all'elemento z che si deve supporre appartenga all'aspetto S portante il punto P.

Conformemente a questa convenzione denoteremo un punto P più precisamente con $A(P)$, se importa sapere che A è base del punto P.

La totalità dei punti portati dalle prospettive costituenti una varietà è *lo spazio della varietà*.

Abbreviamo il termine « punto dello spazio della varietà V » dicendo semplicemente « *punto della varietà* V ».

133. Lo spazio di una varietà V diventa topologico con la

DEFINIZIONE. - Un *intorno del punto* P si definisce, mediante una base $A \supset 1$ del punto P sottomessa alla condizione $V(A) \subset V$, quale insieme dei punti $A(Q)$ soddisfacenti a un sistema finito di disuguaglianze

$$(*) \qquad | x_i(Q) - x_i(P) | < r_i \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

formato con elementi qualunque $x_1, x_2, \dots, x_m$ di A e numeri positivi r_1 $r_2, \dots, r_m$ qualsiasi.

Questo intorno sarà designato con

$$U(P, A, x_1, x_2, \dots, x_m, r_1, r_2, \dots, r_m)$$

qualora si debbano conoscere, oltre l'anello A, che chiameremo *la base dell'intorno*, anche le disuguaglianze (*).

Parlando d'intorno di un punto intendiamo sempre un insieme del tipo suddetto.

L'esistenza di un intorno per un dato punto P segue dal fatto che l'aspetto S portante il punto P soddisfa alla condizione $V(S) \subset V$ e può pertanto servire di base per un intorno di P. Comunque sia l'intorno di un punto P, sempre questo vi appartiene.

Se U, U' sono intorni di uno stesso punto P, l'uno definito da (*), l'altro definito con la base B e le disuguaglianze

$$(**) \qquad | y_j(Q) - y_j(P) | < r_j' \qquad (j = 1, 2, \dots, n),$$

formiamo l'anello $[A, B]$ generato da A e B entro all'oggetto $(A) = (B)$ della varietà V. Esso è base di una varietà $V([A, B])$ che secondo **117** coincide con la sintesi delle varietà $V(A)$, $V(B)$. Ogni prospettiva $\mathfrak{P}$ appartenente a questa sintesi estende una prospettiva $\mathfrak{p}_1 \in V(A) \subset V$ e una prospettiva $\mathfrak{p}_2 \in V(B) \subset V$, il che esige $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$, perchè si tratta di prospettive appartenenti alla medesima varietà V (ved. **111**). Essendo $[s_1, s_2]$ base di $\mathfrak{P}$, si ha $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$, cioè $V([A, B]) \subset V(A) \cap V(B) \subset V$. Questa situazione e il fatto che $[A, B]$ è base di P come A e B, permettono di definire un intorno U''

di P mediante la base $[A, B]$ riunendo le disuguaglianze (*), (**) in un solo sistema

$$| x_i(Q) - x_i(P) | < r_i, \quad | y_j(Q) - y_j(P) | < r_j' \quad (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$$

il quale preso insieme con $V([A, B]) \subset V(A) \cap V(B)$ garantisce evidentemente che sia $U'' \subset U \cap U'$.

È soddisfatto dunque anche il secondo dei cinque assiomi stabiliti da Hausdorff per la nozione di intorno.

Per verificare anche il terzo di questi assioni basta osservare che per ogni punto $P' \subset U(P, A, x_1, x_2, \ldots, x_m, r_1, r_2, \ldots, r_m)$ si ha

$$U(P', A, x_1, x_2, \ldots, x_m, r_1', \ldots, r'_m) \subset U(P, A, x_1, x_2, \ldots, x_m, r_1, \ldots, r_m)$$

purchè si scelgano $r_i' < r_i - | x_i(P') - x_i(P) | \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$.

Volendo verificare il quarto assioma, cioè quello che esprime la separabilità nello spazio, supporremo che siano P, Q punti diversi dello spazio della varietà V.

Poichè l'intersezione $S_1 \cap S_2$ degli aspetti S_1, S_2 (uguali o no) portanti i punti P, Q è base comune a questi punti, esiste $z \in S_1 \cap S_2$ tale che sia $| z(P) - z(Q) | = 2r > 0$. È ovvio che gli intorni $U(P, S_1, z, r)$ e $U(Q, S_2, z, r)$ allora non hanno punti in comune.

Quanto al quinto assioma di Hausdorff, il cosidetto primo assioma della numerabilità, dobbiamo, per poterlo verificare introdurre un'ipotesi ulteriore riguardo agli intorni considerati.

134. Concentrandoci sullo scopo proprio della geometria aritmetica, cioè sullo studio delle varietà aritmetiche, distingueremo quali *intorni aritmetici* appunto quegli intorni di un punto, la cui base è anello aritmetico.

Lo spazio di una varietà aritmetica soddisfa a tutti i cinque assiomi di Hausdorff, purchè lo si renda topologico con intorni aritmetici.

Dimostrazione. - Sia

$$V = \bigcup_{i=1, 2, \ldots, h} V(A_i) \qquad (A_i \supset 1)$$

varietà aritmetica, essendo aritmetiche le basi A_i delle varietà parziali $V(A_i)$.

I. Ogni punto P della V ha come base uno degli anelli A_i che pure può servire di base per un intorno aritmetico di P.

II. La dimostrazione data in 133 per il secondo assioma rimane valida nel caso presente, dato che l'anello $[A, B]$ è aritmetico se lo sono A e B.

III. Si trasporta subito altresì la verifica data in **133** del terzo assioma di Hausdorff.

IV. Ci vuole tuttavia un facile complemento alla dimostrazione dell'assiome della separabilità.

Siano A base aritmetica di P portato da S_1, B base aritmetica di Q $(\neq P)$ portato da S_2. Scelto $z \in S_1 \cap S_2$ con $|z(P) - z(Q)| = 2r > 0$, scriviamolo come quoziente $z = \frac{c}{a}$ con $a, c \in A$, $a \sqsubset\!\!|\!\!= \mathfrak{p}_1$. Per $A' = [A, a^{-1}]$ vale allora $\mathfrak{p}_1 \in V(A') \subset V(A) \subset V$, perchè da $\mathfrak{p}' \in V(A')$ segue $a^{-1} \subset S'$, cioè $a \sqsubset\!\!|\!\!= \mathfrak{p}'$, il che mostra secondo **75** che anche A è base di $\mathfrak{p}'$. Poichè inoltre $z \in A'$, si può costruire l'intorno aritmetico

$$(*) \qquad U(P, A', z, r).$$

Applicando un simile ragionamento alla base B del punto Q si ottiene mediante un anello aritmetico $B' \supset B \supset z$ con $V(B') \subset V$ un intorno

$$U(Q, B', z, r),$$

il quale per la scelta di r non ha punti comuni coll'intorno (*).

V. Per un punto qualunque P portato dall'aspetto $S \in V$ si costruisca mediante una base $A = [1, x_1, x_2, \ldots, x_m]$ con $V(A) \subset V$ la successione numerabile d'intorni

$$U_N = U\left(P, A, x_1, x_2, \ldots, x_m, \frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \ldots, \frac{1}{N}\right) \quad (N = 1, 2, \ldots).$$

Se ora

$$U = U(P, B, y_1, y_2, \ldots, y_n, r_1, r_2, \ldots, r_n),$$

con $B = [1, z_1, z_2, \ldots, z_h]$, è intorno aritmetico qualsiasi di P, si ponga

$$y_i = \frac{b_i}{a}, \ z_j = \frac{c_j}{a} \quad \text{con } a, b_i, c_j \in A, \ a \sqsubset\!\!|\!\!= \mathfrak{p}.$$

Essendo gli elementi di A polinomi nelle $x_1, x_2, \ldots, x_m$, che intervengono nelle disuguaglianze

$$|x_i(Q) - x_i(P)| < \frac{1}{N}, \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

descriventi l'intorno U_N, dalla continuità delle funzioni razionali segue la possibilità di scegliere N così grande, che sia

$$(**) \qquad |a(Q)| > \frac{1}{2} \cdot |a(P)| \, (\neq 0), \quad |y_i(Q) - y_i(P)| < r_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

per ogni $Q \in U_N$.

Allora a c|= $\mathfrak{P}'$ per tutte le prospettive $\mathfrak{P}'$ portanti punti di U_N, così che $B \subset S'$, cioè $\mathfrak{P}' \in V(B)$. Infatti, $\mathfrak{P}'$ è estensione della prospettiva $\mathfrak{P}'' \in V(B)$ individuata da $\mathfrak{P}' \cap B$ (ved. **73**) e pertanto (ved. **111**) uguale a $\mathfrak{P}''$.

Il fatto che tutti i punti $Q \in U_N$ siano portati da prospettive che appartengono alla $V(B)$, e soddisfino alle disuguaglianze (**) conduce alla conclusione

$$U_N \subset U(P,\ B,\ y_1,\ y_2, \dots,\ y_n,\ r_1,\ r_2, \dots,\ r_n)$$

che esprime proprio l'assioma da verificare.

§ 2. Sovrapposizione di punti.

135. DEFINIZIONE. - Un punto P è *sovrapposto al punto* p allora e soltanto allora che la prospettiva $\mathfrak{P}$ portante P sia estensione della prospettiva $\mathfrak{p}$ portante p e che valga $x(P) = x(p)$ per ogni $x \in s$.

La sovrapposizione di punti è ovviamente transitiva come l'estensione di prospettive.

Chiameremo ***prospettive aritmetiche*** quelle prospettive che ammettono una base aritmetica. Partendo dal fatto evidente che il corpo $s(p)$ dei valori complessi $z(p)$ in un punto p portato da una prospettiva aritmetica $\mathfrak{p}$ è un insieme numerabile, possiamo dimostrare:

Se la prospettiva $\mathfrak{P}$ è estensione della prospettiva aritmetica $\mathfrak{p}$ con un numero finito di elementi, ad ogni punto p portato da $\mathfrak{p}$ è sovrapposto almeno un punto P portato da $\mathfrak{P}$.

DIMOSTRAZIONE. - Risulti $\mathfrak{P}$ dall'estensione di $\mathfrak{p}$ con $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Allora $S/\mathfrak{P}$ $K = (k.\ u_1,\ u_2, \dots,\ u_m)$ con $k = s + \mathfrak{P}/\mathfrak{P}$ isomorfo a $s/\mathfrak{p}$ (ved. **67**) e $u_i = x_i + \mathfrak{P}$. L'ipotesi che $s/\mathfrak{p}$ sia isomorfo al sottocorpo $s(p)$ del corpo C dei numeri complessi garantisce che $S/\mathfrak{P}$ è di caratteristica 0 e pertanto separabile sopra k. Ponendo $\dim \frac{K}{k} = h$, possiamo presupporre la numerazione degli x_i tale che sia $K = (k,\ u_1,\ u_2, \dots,\ u_h,\ v)$ con $v = y + \mathfrak{P}$, definito sopra $K_0 = (k.\ u_1.\ u_2, \dots,\ u_h)$ dall'equazione

$$f(v,\ u_1,\ u_2, \dots .\ u_h) = v^n + c_1 \cdot v^{n-1} + \dots + c_n = 0, \qquad (c_i \in K_0).$$

Per dimostrare il teorema basta realizzare gli elementi di K con numeri complessi in modo tale che ne risulti un isomorfismo di K in C estendente l'isomorfismo $k \to s(p)$ dato col punto p.

Il fatto suddetto che $s(p)$ è insieme numerabile permette di dimostrare successivamente l'esistenza di numeri complessi a_i tali che $a_1, a_2, \dots, a_l$ siano algebricamente indipendenti sopra $s(p)$.

Invero, se sono già trovati $l (\geq 0)$ tali numeri, è chiaro che il corpo $(s(p),\ a_1,\ a_2, \dots,\ a_l)$ generato da essi sopra $s(p)$ è pure un insieme numerabile. cosicchè, qualora non si potesse trovare un numero a_{l+1} algebricamente