§ 4. Varietà algebriche.

123. DEFINIZIONE. - Una varietà V chiamasi *algebrica* (sopra A) allora e soltanto allora che essa sia la riunione

$$V = \bigcup_i V(A_i)$$

di un numero finito di varietà $V(A_i)$ di basi $A_i \supset 1$ algebriche (sopra A).

Per mettere in rilievo l'importanza aritmetica delle varietà che sono algebriche senza riferimento ad un anello, chiameremo tali varietà anche *varietà aritmetiche.*

Risulta subito da quella definizione e dal teorema **117** che *la sintesi di varietà algebriche (sopra A) è varietà algebrica (sopra A).*

Varietà algebriche importantissime sono le varietà proiettive definite nel teorema che segue:

124. *Se l'anello $A \supset 1$ e gli elementi $x_1, x_2, \dots, x_m$ sono attivi in un medesimo oggetto primario, l'insieme*

$$\bigcup_{i=1,2,\dots,m} V\left(\left[A, \frac{x_1}{x_i}, \frac{x_2}{x_i}, \dots, \frac{x_m}{x_i}\right]\right)$$

è una varietà algebrica chiusa sopra A, che chiamasi *la varietà proiettiva generata da $x_1, x_2, \dots, x_m$ sopra A.*

DIMOSTRAZIONE. - Essendo l'anello A attivo e primario, esso è base di una varietà $V_1 = V(A)$, chiusa sopra A, perchè ogni aspetto $S \supset A$ compatibile con (A) è da sè stesso estensione di un aspetto $s \in V(A)$ e cioè di quello individuato da $\mathfrak{P}$ in A.

D'altro canto il teorema **122** dice che

$$V_2 = \bigcup_i V\left(\left[\frac{x_1}{x_i}, \frac{x_2}{x_i}, \dots, \frac{x_m}{x_i}\right]\right)$$

è varietà semplicemente chiusa e quindi, a maggior ragione, chiusa sopra l'anello A. Siccome esistono aspetti che contengono A. la chiusura della V_2 sopra A garantisce l'esistenza della sintesi (V_1, V_2), la quale secondo **117** coincide con l'insieme menzionato nel teorema da dimostrare. Dall'osservazione **121** segue poi la chiusura della varietà (V_1, V_2), mentre la sua algebricità è ovvia.

125. Per preparare lo studio di importanti varietà algebriche classiche dobbiamo premettere la nota dimostrazione di un teorema con cui EMMY NOETHER ha posto nuovo fondamento alla teoria degli ideali nell'integrità dei corpi aritmetici classici.

DEFINIZIONE. - Un aspetto S è detto *immediato* allora e soltanto allora che la varietà $V(S)$ di base S non contenga che S e l'oggetto di S supposto diverso da S. Una prospettiva è immediata se essa presenta un aspetto immediato.

Se un sottoanello noetheriano A di un corpo è integrità, ogni prospettiva immediata di base A è perfetta.

DIMOSTRAZIONE. - Sia $\mathfrak{p} \in V(A)$ prospettiva immediata e sia $p \neq 0$ elemento qualunque dell'ideale primo $\mathfrak{p} \frown A$.

L'ideale $p \cdot A$ generato da questo p in A è intersezione

$$p \cdot A = \mathfrak{q}_1 \frown \mathfrak{q}_2 \frown \ldots \frown \mathfrak{q}_h$$

di ideali primari. Se nessuno dei divisori primi di $p \cdot A$ fosse contenuto in $\mathfrak{p}$, essi conterrebbero ciascuno un elemento $x_i \not\subset \mathfrak{p}$ e ne deriverebbe $(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_h)^L \not\subset \mathfrak{p}$, mentre invece per L abbastanza grande vale $(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_h)^L \subset \subset p \cdot A \subset \mathfrak{p}$. Si può dunque assumere che, p. es., il divisore primo associato a $\mathfrak{q}_1$ sia contenuto in $\mathfrak{p}$ e perciò uguale a $\mathfrak{p} \frown A$, essendo s immediato e $p \cdot A \neq 0$. (Se $\mathfrak{p} \frown A$ contenesse un altro ideale primo $\mathfrak{c}$ oltre che $\mathfrak{p} \frown A$ o 0, questo $\mathfrak{c}$ individuerebbe un aspetto $s' \in V(s)$ intermedio fra s e (s) e diverso da questi). Vale allora $[\mathfrak{p} \frown A]^L \subset \mathfrak{q}_1$ per L abbastanza grande.

Supponendo, il che è lecito, che sia $\mathfrak{q}_2 \frown \ldots \frown \mathfrak{q}_h \neq p \cdot A$, possiamo scegliere $m > 0$ tale che sia $[\mathfrak{p} \frown A]^m \cdot [\mathfrak{q}_2 \frown \ldots \frown \mathfrak{q}_h] \subset p \cdot A$ ed esista un elemento $q \in [\mathfrak{p} \frown A]^{m-1} \cdot [\mathfrak{q}_2 \frown \ldots \frown \mathfrak{q}_h]$ non contenuto in $p \cdot A$. Per il quoziente $\frac{q}{p} \in (A)$ vale allora

$$(*) \qquad \frac{q}{p} \cdot [\mathfrak{p} \frown A] \subset A, \quad \text{ma } \frac{q}{p} \not\subset A.$$

II. Consideriamo A-moduli in (A) e designamo, se $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ denotano tali moduli, con $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ l'A-modulo costituito da tutte le somme $\Sigma a \cdot b$ con $a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$. Evidentemente, tutti gli ideali di A sono A-moduli in (A) e se $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ sono ideali in A, la definizione suddetta di $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ coincide con quella di moltiplicazione di ideali.

L'insieme $\mathfrak{x}$ di tutti gli elementi x di (A) soddisfacenti alla condizione $x \cdot [\mathfrak{p} \frown A] \subset A$ è ovviamente un A-modulo in (A) contenente l'anello $A \supset 1$. Dunque l'A-modulo $\mathfrak{x} \cdot [\mathfrak{p} \frown A]$ è ideale contenente $\mathfrak{p} \frown A$. Dall'ipotesi che questo ideale coincida con $\mathfrak{p} \frown A$, risulterebbe, mediante una base p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ di $\mathfrak{p} \frown A$, per ogni $x \in \mathfrak{x}$ un sistema di equazioni

$$x \cdot p_i = \sum_j c_{ij} p_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ c_{ij} \in A)$$

dal quale si dedurrebbe l'annullarsi del determinante $|x \cdot \delta_{ij} - c_{ij}|$, il che qualificherebbe x come integro sopra A e perciò come elemento di A, essendo A integrità. Ma $\mathfrak{x} \subset A$ contraddirebbe al fatto $\frac{q}{p} \subset \mathfrak{x}$, $\frac{q}{p} \subset\!\!|\!\!= A$ prima constatato in (*).

III. Sappiamo dunque

$$\mathfrak{p} \cap A \subset \mathfrak{x} \cdot [\mathfrak{p} \cap A] \subset A, \qquad \mathfrak{p} \cap A \neq \mathfrak{x} \cdot [\mathfrak{p} \cap A].$$

Passando dagli A-moduli agli s-moduli generati da loro otteniamo

$$[\mathfrak{p} \cap A] \cdot s = \mathfrak{p} \text{ (ved. 72)}; \quad \mathfrak{x} \cdot s = \mathfrak{y} \supset s \text{ perchè } \mathfrak{x} \supset A;\ \mathfrak{y} \cdot \mathfrak{p} \subset s.$$

L'esistenza di un elemento z di $\mathfrak{x} \cdot [\mathfrak{p} \cap A] \subset A$ non contenuto in $\mathfrak{p} \cap A$ garantisce che l'ideale $\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{p}$ contiene $z \cdot z^{-1} = 1$ e coincide perciò con s. Ora da $\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{p} = s$ segue $\mathfrak{p}^2 \neq \mathfrak{p}$, perchè $\mathfrak{p}^2 = \mathfrak{p}$ darebbe $\mathfrak{p} = \mathfrak{y} \cdot \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{y} \cdot \mathfrak{p} = s$. Esiste dunque $p \in \mathfrak{p}$ tale che sia $p \subset\!\!|\!\!= \mathfrak{p}^2$. Allora $p \cdot \mathfrak{y} \subset \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{y} = s$, cosicchè $p \cdot \mathfrak{y}$ è ideale in s. Se fosse $p \cdot \mathfrak{y} \neq s$ risulterebbe $p \cdot \mathfrak{y} \subset \mathfrak{p}$ e pertanto $p \cdot s = p \cdot \mathfrak{y} \cdot \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}^2$ contro l'ipotesi $p \subset\!\!|\!\!= \mathfrak{p}^2$. Si ha dunque $p \cdot \mathfrak{y} = s$ e quindi $p \cdot \mathfrak{y} \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{p}$, cioè $p \cdot s = \mathfrak{p}$, il che mostra (ved. 93) che l'aspetto s, noetheriano come A, è chiuso e in quanto aspetto non totale di un corpo, perfetto.

126. *Se un aspetto S di un corpo K algebrico e 0-dimensionale sopra il corpo K_0 contiene questo sottocorpo K_0, esso è totale.*

Infatti, $x \in \mathfrak{P}$ soddisfa, come ogni elemento di K, ad una equazione $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + x^n = 0$ (con $a_i \in K_0$) irriducibile sopra K_0. Da $K_0 \subset S$, $x \subset \mathfrak{P}$ risulta $a_0 \subset \mathfrak{P}$ e quindi $a_0 = 0$, perchè altrimenti $1 = a_0 \cdot a_0^{-1}$ sarebbe contenuto in $\mathfrak{P} \cdot K_0 \subset \mathfrak{P}$. Ma $a_0 = 0$ e l'irriducibilità della equazione suddetta esigono $n = 1$, cioè $x = 0$.

127. *Se un aspetto non totale S di un corpo K algebrico e 0-dimensionale sopra un corpo k contiene un aspetto perfetto s di questo sottocorpo, esso è* ***immediato.***

DIMOSTRAZIONE. - Sia S_1 aspetto qualunque $\in V(S)$. Allora $\mathfrak{P}_1 \cap s$ e ideale primo $\neq s$ in s e pertanto o 0 o $\mathfrak{p}$ (ved. 94).

I. Se $\mathfrak{P}_1 \cap s = 0$, l'oggetto $(s) = k$ di s è contenuto in S_1 e per l'osservazione precedente S_1 non può essere che totale: $S_1 = K$.

II. Se $\mathfrak{P}_1 \cap s = \mathfrak{p} = p \cdot s$, consideriamo per $x \in \mathfrak{P}$ una delle equazioni $a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n = 0$ (con $a_i \in s$, $a_n \neq 0$) soddisfatte da x. Possiamo supporre che non tutti i coefficienti a_i siano contenuti in $p \cdot s$. Sia dunque $a_i \subset p \cdot s$ per $i > h$, però $a_h \subset\!\!|\!\!= p \cdot s$. Allora

$$x^h + \frac{a_{h-1}}{a_h} \cdot x^{h-1} + \ldots + \frac{a_0}{a_h} \subset \mathfrak{P}_1 \qquad \left(\frac{a_i}{a_h} \in s\right)$$

e pertanto $h > 0$.

Sia $x^m + c_1 x^{m-1} + \ldots + c_m \equiv 0$ in $S_1/\mathfrak{P}_1$ (con $c_i \in s$) equazione di grado minimo cui soddisfa x in $S_1/\mathfrak{P}_1$. Da $S \subset S_1$ segue $\mathfrak{P}_1 \cap S \subset \mathfrak{P}$ e quindi $c_m \subset \subset \mathfrak{P}_1 \cap S + \mathfrak{P} \subset \mathfrak{P}$, cioè $c_m \subset \mathfrak{P} \cap s \subset \mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1 \cap s \subset \mathfrak{P}_1$. Si deriva dunque da quella equazione $(x^{m-1} + \ldots) \cdot x \subset \mathfrak{P}_1$. Ma, essendo supposto m minimo, si ha $x^{m-1} \ldots \subset\!\!\!\!|\;\mathfrak{P}_1$, cosicchè deve essere $x \subset \mathfrak{P}_1$, cioè $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{P}_1 \cap S$ data l'arbitrarietà nella scelta di $x \in \mathfrak{P}$.

Tenuto conto del fatto $\mathfrak{P}_1 \cap S \subset \mathfrak{P}$, si conclude $\mathfrak{P}_1 \cap S = \mathfrak{P}$, cioè $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}$, c. d. d.

128. *Ogni insieme di prospettive perfette di uno stesso corpo K, preso insieme con la prospettiva totale di K è varietà di K.*

DIMOSTRAZIONE. - Siano $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ prospettive perfette di K e z elemento qualunque di S_1. Secondo 97 esiste $p_2 \in S_1 \cap S_2$ tale che $p_2 \equiv 1$ in $S_1/\mathfrak{P}_1$, $p_2 \equiv 0$ in $S_2/\mathfrak{P}_2$. Scelto m così grande che $z \cdot p_2{}^m \subset S_2$, si ha $z \cdot p_2{}^m \subset S_1 \cap S_2$ e quindi $z = \frac{a}{b}$ con a, $b \in S_1 \cap S_2$, $b = p_2{}^m \subset\!\!\!\!|\;\mathfrak{P}_1$. Dunque $S_1 \cap S_2$ è base comune a $\mathfrak{P}_1$ e a $\mathfrak{P}_2$. Il resto del teorema è chiaro.

129 *Gli aspetti chiusi di un corpo K algebrico e 1-dimensionale sopra k, che contengono k, sono perfetti o K, e la loro totalità è varietà algebrica chiusa sopra k.*

DIMOSTRAZIONE. - I. Sia $x \in K$ algebricamente indipendente sopra k. Allora le integrità

$$A = I\left(\frac{K}{A_0}\right), \quad B = I\left(\frac{K}{B_0}\right) \text{ con } A_0 = [k,\, x], \quad B_0 = [k,\, x^{-1}]$$

sono basi di varietà $V(A)$, $V(B)$ di K, algebriche sopra k per il teorema **108**.

Dimostriamo in primo luogo che queste varietà sono costituite soltanto da prospettive chiuse di K.

Ogni $\mathfrak{P} \in V(A)$ individua in A_0 una prospettiva $\mathfrak{P}_0$ perfetta o totale, perchè l'ideale $\mathfrak{P}_0 = [\mathfrak{P} \cap A_0] \cdot S_0$ è principale (ved. **93**), essendo ogni ideale in $A_0 = [k,\, x]$ di tale carattere. Dal teorema **127** segue poi che $S \supset S_0$, se non totale, è immediato e pertanto (ved. **125**) perfetto.

Lo stesso vale di $V(B)$.

II. Sia $S \supset k$ aspetto qualunque compatibile con K. Esiste allora una estensione S' di S con x o con x^{-1}. (Ved. 89).

Nel primo caso si può estendere $S' \supset A_0$ con $A = I\left(\frac{K}{A_0}\right) \subset I\left(\frac{(K,\, S)}{A_0}\right)$ (ved. **83**, **76**, **87**), e tale estensione S'' estende pure (ved. **73**) l'aspetto S''' individuato da $\mathfrak{P}''$ in A. Dunque $\mathfrak{P}$ ammette estensione $\mathfrak{P}''$ comune ad una prospettiva $\mathfrak{P}'''$ appartenente alla $V(A)$.

Nel secondo caso $\mathfrak{P}$ ammette estensione comune ad una prospettiva dell'insieme $V(B)$.

Se in particolare $\mathfrak{P}$ è prospettiva chiusa qualsiasi di K con $S \supset k$, si ha nel primo caso $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}' = \mathfrak{P}''$ e $\mathfrak{P}'' = \mathfrak{P}'''$, perchè secondo I tutte le prospettive appartenenti alla $V(A)$ sono chiuse.

Valendo lo stesso nel secondo caso, è dimostrato ormai che

$$V = V(A) \cup V(B)$$

è la totalità delle prospettive chiuse di K in quanto sono totali rispetto a k.

III. Questo insieme V è varietà (ved. **128**), algebrica sopra k secondo I, e chiusa sopra k secondo II.

C. d. d.

130. *La totalità delle prospettive chiuse di un corpo aritmetico K di dimensione e caratteristica* 0 *è varietà algebrica chiusa la cui base è l'integrità di K.*

DIMOSTRAZIONE. - I. L'integrità $I = I(K) = I\left(\frac{K}{[1]}\right)$ di K è anello algebrico. (Ved. **105**).

II. Ogni $\mathfrak{P} \in V(I)$ è estensione della prospettiva $\mathfrak{P}_0$ individuata da $\mathfrak{P}$ nell'anello [1] dei numeri interi razionali. Siccome l'ideale $\mathfrak{P} \cap [1]$ è principale, lo stesso vale di $\mathfrak{P}_0 = [\mathfrak{P}_c \cap [1]] \cdot S_0$ cosicchè la prospettiva $\mathfrak{P}_0$ è perfetta o totale. Nel primo caso si conclude con **127** che $\mathfrak{P}$ è immediata e quindi (ved. **125**) perfetta. Nel secondo caso risulta dal teorema **126** che $\mathfrak{P}$ è totale. Ad ogni modo tutte le prospettive appartenenti alla $V(I)$ sono chiuse.

III. Viceversa ogni aspetto chiuso S di K contiene I, perchè S può estendersi (ved. **83**) con I. La prospettiva $\mathfrak{P}$ individua dunque in I una prospettiva $\mathfrak{P}' \in V(I)$, della quale $\mathfrak{P}$ è estensione (ved. **73**), ma, per II, quella prospettiva $\mathfrak{P}'$ è chiusa e pertanto uguale alla data $\mathfrak{P}$.

La chiusura della varietà $V(I)$ consegue dal teorema **119**.

131. *L'integrità di un corpo aritmetico K di dimensione* 0 *è la totalità degli elementi comuni a tutti gli aspetti chiusi di K.*

DIMOSTRAZIONE. - Ogni aspetto S di un corpo K di caratteristica $p \neq 0$ contiene il corpo primo $(1) = [1]$. Se dunque K è aritmetico di dimensione 0, concludiamo con l'osservazione **126** che S deve essere totale. Ma $S = K$ è anche l'integrità di tale corpo.

Nel caso di caratteristica 0 ricaviamo dal teorema precedente che gli elementi dell'integrità $I(K)$ sono comuni a tutti gli aspetti chiusi di K, e il teorema **120** ci dice che non ci sono altri elementi comuni a quegli aspetti.

CAPITOLO V

LO SPAZIO DI UNA VARIETÀ

§ 1. **Punti e i loro intorni.**

132. DEFINIZIONE. - Un *punto di un'oggetto* è un omomorfismo di un aspetto S di questo oggetto nel corpo C dei numeri complessi. Esso continua la prospettiva $S \rightarrow S/\mathfrak{p}$ con un isomorfismo del soggetto $S/\mathfrak{p}$ nel corpo C. Ogni omomorfismo di S in C risultante nel modo suddetto dalla prospettiva $\mathfrak{p}$ sarà chiamato un punto dell'oggetto (S) *portato dalla prospettiva* $\mathfrak{p}$ (oppure: portato dall'aspetto S).

Aspetti S che si presentano a soggetti $S/\mathfrak{p}$ di caratteristica $p \neq 0$ non portano punti. Gli altri ne portano tanti quanti ne porta il soggetto $S/\mathfrak{p}$ stesso, considerato come aspetto totale.

Ogni omomorfismo σ di un anello A nel corpo C determina un punto, purchè esso riduca a zero tutti gli elementi inattivi in A senza annullare tutto l'anello. Invero, l'insieme $\mathfrak{c}$ degli elementi annullati da σ è ideale primo soddisfacente alle premesse del teorema **72**, il quale mostra che A è base di una prospettiva $\mathfrak{p}$. Estendendo quell'omomorfismo σ all'aspetto S con la formula evidentemente univoca

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\sigma = \frac{a^\sigma}{b^\sigma} \qquad (a,\ b \in A,\ b \subset\!\!|\!\!\!= \mathfrak{c}),$$

si ottiene un punto portato dalla prospettiva $\mathfrak{p}$.

Colla frase « *base di un punto* P » intenderemo « base di una prospettiva portante il punto P ».

I punti saranno designati con lettere latine P, Q, p, q, ecc. Benchè rappresentino omomorfismi scriveremo

$$z(P)$$

(invece di z^P come sarebbe in accordo con la convenzione fatta in 1) per *il valore dell'elemento* z *nel punto* P, cioè per il numero complesso risultante dall'applicazione dell'omomorfismo P all'elemento z che si deve supporre appartenga all'aspetto S portante il punto P.