modo (*) definito in **93**, si verificano subito le equazioni

$$\frac{x_2}{x_1+x_2} \equiv 1 \text{ in } s_1/\mathfrak{p}_1, \qquad \frac{x_2}{x_1+x_2} \equiv 0 \text{ in } s_2/\mathfrak{p}_2$$

che dimostrano il teorema nel caso speciale $h = 2$.

Supponendo che sia già provato quel teorema speciale per meno di h prospettive, possiamo affermare l'esistenza di elementi x_i $(i = 1, 2, \ldots, h-1)$ con le proprietà

$$x_i \in s_1 \cap s_2 \cap \ldots \cap s_{h-1}, \qquad x_i \equiv \delta_{ij} \text{ in } s_j/\mathfrak{p}_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, h-1).$$

Se $x_1 \not\subset s_h$, l'ordine di

$$x = \frac{x_1}{x_1^L + x_2 + \ldots + x_{h-1}} \qquad (\text{con } 1 < L > \text{ ordine di } x_i^{-1} \text{ in } \mathfrak{p}_h,\ i \neq 1)$$

in $\mathfrak{p}_h$ sarà positivo, cosicché x soddisfa alle condizioni proposte

$$(*) \qquad x \equiv 1 \text{ in } s_1/\mathfrak{p}_1, \qquad x \equiv 0 \text{ in } s_i/\mathfrak{p}_i \qquad (i = 2, \ldots, h).$$

Se però $x_1 \subset s_h$, si prenda $z \in s_1 \cap s_3 \cap s_4 \cap \ldots \cap s_h$ con $z \equiv 1$ in $s_1/\mathfrak{p}_1$, $z \equiv 0$ in $s_i/\mathfrak{p}_i$ $(i = 3, 4, \ldots, h)$ e si formi $x = z \cdot x_1^L$. Scegliendo L in modo tale che sia $(L + \text{ordine di } z \text{ in } \mathfrak{p}_2) > 0$, si ottiene anche in questo caso una soluzione delle equazioni (*).

II. Siano ora $a_i \in s_i$ qualunque. Secondo I esistono elementi x_i appartenenti a $s_1 \cap s_2 \cap \ldots \cap s_h$ tali che valgono le equazioni $x_i \equiv \delta_{ij}$ in $s_j/\mathfrak{p}_j$. Scegliendo allora l'esponente L in

$$x = \sum_{i=1}^{h} a_i \cdot (1 - (1 - x_i)^L)^L$$

in modo che siano soddisfatte le disuguaglianze

$$L \geq n_j, \quad (L + \text{ordine di } a_i \text{ in } \mathfrak{p}_j) \geq n_j \quad (i \neq j)$$

questo x sarà la soluzione alla quale allude il teorema da dimostrare.

§ 7. Integrità di corpi.

98. *Se A è anello noetheriano con elemento* 1, *ogni sotto-A-modulo di un A-modulo algebrico è algebrico.*

DIMOSTRAZIONE. - Ricordiamo che secondo 16 l'algebricità di un A-modulo M significa l'esistenza di una A-base finita di M. Sia dunque $M = \sum_{i=1}^{n} A \cdot u_i$. L'insieme $\mathfrak{a}_h$ dei coefficienti a_h nelle somme $\sum_{i=h}^{n} a_i \cdot u_i$ (con $a_i \in A$) appartenenti a un dato sotto-A-modulo M_0 di M è ideale in A e pertanto A-modulo algebrico: $\mathfrak{a}_h = \sum_{i=1}^{n_h} a_{hi} \cdot A$. Esistono allora elementi $v_{hi} = a_{hi} \cdot \cdot u_h + \ldots$ di M_0, la cui totalità costituisce evidentemente una A-base di M_0.

99. *Se S_0 è aspetto perfetto, ogni S_0-modulo algebrico di un sopracorpo di S_0 ammette una S_0-base linearmente indipendente.*

DIMOSTRAZIONE. - Sia $M = \sum_{i=1}^{n} S_0 \cdot u_i$ un S_0-modulo contenuto nel corpo K e supponiamo $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot u_i = 0$ $(a_i \in S_0)$ senza che siano zero tutti i coefficienti a_i. Ponendo $\mathfrak{p}_0 = p_0 \cdot S_0$ e scegliendo p_0^{m} con esponente massimo tale che $p_0^{-m} \cdot a_i = b_i \in S_0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, si avrà anche $\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot u_i = 0$, poiché M è contenuto in un corpo. Possiamo supporre per es. $b_1 \subset\!\!|\; \mathfrak{p}_0$. Allora $u_1 = \sum_{i=2}^{n} - b_i \cdot b_1^{-1} \cdot u_i \subset \sum_{i=2}^{n} S_0 \cdot u_i$ è superfluo nella base di M. Ecco un procedimento per trovare una S_0-base linearmente indipendente di M.

100. *Se il corpo $K = (A, x)$ definito da $f(x) = x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ $(a_i \in A)$ sopra il corpo $k = (A)$ generato dall'anello $A \supset 1$ è separabile sopra k, per $z \in K$ le due affermazioni*

$$T_{\substack{K\\k}}(z \cdot [A, x]) \subset A \qquad \text{e} \qquad z \in \frac{[A, x]}{f_x(x)}$$

sono equivalenti.

DIMOSTRAZIONE. - Trattandosi in quel che segue sempre dello stesso tipo di traccia, scriveremo semplicemente T invece di $T_{\substack{K\\k}}$.

Notiamo anzitutto che

$$(*) \qquad T(z \cdot [A, x]) \subset A \text{ equivale a } T(z \cdot x^i) = c_i \in A \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Infatti, da $[A, x] = \sum_{i=0}^{n-1} A \cdot x^i$ segue $T(z \cdot [A, x]) = \sum_{i=0}^{n-1} A \cdot T(z \cdot x^i)$.

I. Scegliendo gli automorfismi σ_i del corpo galoisiano K^* determinato da K sopra k come in **62**, le condizioni (*) si traducono nelle

$$(**) \qquad \sum_{j=1}^{n} z^{\sigma_j} \cdot x_j^i = c_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

dove $x_j = x^{\sigma_j}$.

Ora, dall'identità in $K^*[X]$

$$\frac{f(X) - f(x)}{X - x} = \sum_{i=0}^{n-1} g_i(x) \cdot X^i, \qquad (g_i(x) \in [A, x])$$

si trae

$$\sum_{i=0}^{n-1} g_i(x)\cdot x_j^{\,i} = \begin{cases} f_x(x) & \text{per } x_j = x, \\ 0 & \text{per } x_j \neq x, \end{cases}$$

cosicché da (**) risulta

$$z\cdot f_x(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot g_i(x) \in [A,\ x].$$

II. Avendo il polinomio

$$X^r - \sum_{j=1}^{n} \frac{f(X)}{X - x_j}\cdot\frac{x_j^{\,r}}{f_x(x_j)} \in K^*[X],$$

gli zeri $X = x_j$ $(j = 1, 2, \dots, n)$, esso è identicamente zero per $r < n$.
Il suo coefficiente di X^{n-1} fornisce dunque le relazioni

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^{\,r}}{f_x(x_j)} = T\left(\frac{x^r}{f_x(x)}\right) = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 \leq r < n-1, \\ 1 & \text{per } r = n-1. \end{cases}$$

Se ora

$$z \in \frac{[A,\ x]}{f_x(x)},$$

si deduce da $z\cdot x^i \cdot f_x(x) = \sum_{r=0}^{n-1} b_r \cdot x^r$ (con $b_r \in A$) che $T(z\cdot x^i) = b_{n-1}$ cioè $T(z\cdot x^i) \in A$ e ciò per la (*), dimostra che $T(z\cdot[A,\ x]) \subset A$.

101. *Ogni isomorfismo σ di un oggetto R muta un aspetto S di R in un aspetto S^σ di R^σ, un aspetto chiuso in un aspetto chiuso, l'integrità $I\left(\frac{R}{A}\right)$ di R (supposto primario) sopra un sottoanello $A \supset 1$ nell'integrità di R^σ sopra A^σ.*

Ciò risulta subito dal carattere invariantivo di fronte a isomorfismi delle definizioni alle quali si riferisce questo teorema.

102. *Sia $A \supset 1$ integrità in $k = (A)$ e $K = (A,\ x)$ definito sopra k da $f(x) = x^n + a_1\cdot x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ $(a_i \in A)$, separabile sopra k. Allora*

$$I\left(\frac{K}{A}\right) \subset \frac{[A,\ x]}{f_x(x)}. \tag{*}$$

DIMOSTRAZIONE. - Riprendiamo le notazioni usate nella dimostrazione del teorema **100**.

Se $z \in I\left(\frac{K}{A}\right)$, anche $z\cdot y \in I\left(\frac{K}{A}\right)$ per ogni $y \in [A,\ x]$, essendo x integro sopra A. Da $z\cdot y \in I\left(\frac{K^*}{A}\right)$ (ved. **87**) deduciamo allora (ved. **101**) $z^{\sigma_i}\cdot y^{\sigma_i} \in I\left(\frac{K^*}{A}\right)$ e quindi $T(z \cdot y) \subset I\left(\frac{K^*}{A}\right) \cap k = A$. Invero, $I\left(\frac{K^*}{A}\right) \cap k$, che secondo **87** coincide con $I\left(\frac{k}{A}\right)$, è l'integrità A stessa. Avendo dimostrato $T(z \cdot [A, x]) \subset A$, basta tener conto di **100**, per trovare (*).

103. *Se il corpo K è algebrico, 0-dimensionale e separabile sopra K_0, l'integrità di K sopra un qualsiasi aspetto perfetto S_0 di K_0 ha una S_0-base costituita da $n = \text{grado}\,\frac{K}{K_0}$ elementi linearmente indipendenti sopra K_0.*

DIMOSTRAZIONE. - L'anello S_0 è integrità in K_0, perchè S_0 non ammette (ved **91**, **96**) estensione interna oltre S_0 (ved **82**).

Applicando poi il teorema precedente, dopo aver generato il corpo K nel modo $K = (S_0, x)$ con $f(x) = x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ $(a_i \in S_0)$, il che sempre è possibile, troviamo

$$I\left(\frac{K}{S_0}\right) \subset \sum_{i=0}^{n-1} S_0 \cdot \frac{x^i}{f_x(x)}.$$

Ma $I\left(\frac{K}{S_0}\right)$, che ovviamente è sotto-S_0-modulo del membro destro, ha una S_0-base linearmente indipendente (ved. **98**, **99**). Il numero di questi elementi base non può essere minore di n, poichè ogni elemento z di K diventa integro sopra S_0 per moltiplicazione con coefficiente $c_0 \neq 0$ di un'equazione $c_0 \cdot z^m + c_1 \cdot z^{m-1} + \ldots + c_m = 0$ (con $c_i \in S_0$) soddisfatta da z.

104. *Sotto l'ipotesi che il corpo K di caratteristica $p \neq 0$ sia algebrico e 0-dimensionale sopra l'oggetto (S_0) dell'aspetto perfetto S_0 e che l' S_0-modulo $S_0^{p^{-1}}$ sia algebrico, l'integrità di K sopra S_0 ha una S_0-base costituita da $n = \text{grado}\,\frac{K}{(S_0)}$ elementi linearmente indipendenti.*

DIMOSTRAZIONE. - Sia K_1 il massimo corpo intermedio separabile di K sopra (S_0). Esiste allora (ved. **26**) una potenza p^m tale che $K^{p^m} \subset K_1$ e quindi

$$I\left(\frac{K}{S_0}\right)^{p^m} \subset I\left(\frac{K}{S_0}\right) \cap K_1 = I\left(\frac{K_1}{S_0}\right), \quad \text{cioè} \quad I\left(\frac{K}{S_0}\right) \subset I\left(\frac{K_1}{S_0}\right)^{p^{-m}}.$$

Secondo l'ipotesi sia $S_0^{p^{-1}} = \Sigma\, S_0 \cdot v_i$. Da ciò si deduce successivamente $S_0^{p^{-2}} = \Sigma\, S_0^{p^{-1}} \cdot v_i^{p^{-1}} = \Sigma\, S_0 \cdot v_i \cdot v_j^{p^{-1}}$, ecc. finchè si ottiene

$$S_0^{p^{-m}} = \Sigma\, S_0 \cdot v_i \cdot v_j^{p^{-1}} \ldots v_k^{p^{-(m-1)}},$$

mentre la separabilità di K_1 sopra (S_0) permette di supporre

$$I\left(\frac{K_1}{S_0}\right) = \Sigma\, S_0 \cdot u_l, \quad \text{cioè} \quad I\left(\frac{K_1}{S_0}\right)^{p^{-m}} = \Sigma\, S_0^{p^{-m}} \cdot u_l^{p^{-m}}.$$

Essendo dunque

$$I\left(\frac{K}{S_0}\right) \subset \Sigma\, S_0 \cdot v_i \cdot v_j^{p^{-1}} \cdot \ldots \cdot v_k^{p^{-(m-1)}} \cdot u_l^{p^{-m}}$$

anche l'S_0-modulo a sinistra sarà (ved. 98) algebrico. La sua S_0-base, resa indipendente secondo **99**, è costituita da n elementi, poichè $S_0 \cdot z \cap I\left(\frac{K}{S_0}\right) \neq 0$ per ogni $z \in K$ (ved. la fine di **103**). C. d. d.

105. *L'integrità assoluta $I(K)$ di un corpo K algebrico 0-**dimensionale** di caratteristica 0 e grado assoluto n è modulo generato da n elementi linearmente indipendenti sopra il corpo primo.*

DIMOSTRAZIONE. - Possiamo supporre $K = (x)$ definito da $x^n + \ldots + a_n = f(x) = 0$ con $a_i \in [1]$ (ved. **33**). Allora (ved. **102**)

$$I(K) \subset \sum_{m=0}^{n-1} [1] \cdot \frac{x^m}{f_x(x)}.$$

La dimostrazione del teorema **98** fornisce una base del modulo $I(K)$ costituita da n elementi, mentre il fatto: $z \cdot [1] \cap I(K) \neq 0$ (per $z \neq 0$ qualunque di K), mostra che quegli elementi base sono linearmente indipendenti sopra (1).

106. Per ogni prospettiva perfetta $\mathfrak{P}$ definiamo, qualunque sia il numero intero n, la potenza $\mathfrak{P}^n$ della sua origine $\mathfrak{P} = p \cdot S$ stabilendo, che $\mathfrak{P}^n$ significhi l'S-modulo $p^n \cdot S$ generato in K da p^n, il che ovviamente non dipende dalla scelta dell'elemento base p di $\mathfrak{P}$. Per conformità con $\bigcap_{n=1,\ldots\infty} \mathfrak{P}^n = 0$ (ved. **92**) poniamo $\mathfrak{P}^{+\infty} = 0$.

107. *Se il corpo K è algebrico e 0-**dimensionale** sopra l'**oggetto** (S_0) **dell'aspetto perfetto** S_0, **si definisca per** ogni $z \in K$ l'**ordine** $n = n(z)$ **di** z **in** $\mathfrak{P}_0$ **postulando** $n(0) = +\infty$ e **per** $z \neq 0$:*

$$(*) \qquad z \subset \mathfrak{P}_0^{\,n} \cdot I\left(\frac{K}{S_0}\right), \qquad z \not\subset \mathfrak{P}_0^{\,n+1} \cdot I\left(\frac{K}{S_0}\right).$$

Questo ordine coincide per** $z \neq 0$, $z \in (S_0)$ **con quello definito in 93** e **soddisfa

alle relazioni

$$n(z_1 + z_2) \geq min\,(n(z_1),\ n(z_2)) \quad per \quad z_1,\ z_2 \in K,$$
$$n(z \cdot z_0) = n(z) + n(z_0) \quad per \quad z \in K,\ z_0 \in (S_0).$$

DIMOSTRAZIONE. - Siccome in ogni aspetto perfetto S_0 vale il teorema dell'unicità, a meno di unità, della decomposizione degli elementi $\neq 0$ in fattori primi, un noto teorema afferma la medesima unicità per l'anello $S_0[X]$ dei polinomi sopra S_0.

Supponendo dunque come in (*) $z \cdot p_0^{-n} \subset I\left(\frac{K}{S_0}\right)$ (con $p_0 \cdot S_0 = \mathfrak{P}_0$), si trova un'unica equazione

$$(z \cdot p_0^{-n})^m + b_1 \cdot (z \cdot p_0^{-n})^{m-1} + \ldots + b_m = 0 \quad (\text{con } b_i \in S_0)$$

con $X^m + b_1 \cdot X^{m-1} + \ldots + b_m$ irriducibile in $S_0[X]$ e quindi in $(S_0)[X]$. Allora

$$z^m + b_1 \cdot p_0^n \cdot z^{m-1} + \ldots + b_m \cdot p_0^{mn} = 0$$

è l'equazione irriducibile a cui soddisfa z sopra il corpo (S_0), donde segue che gli elementi $b_h \cdot p_0^{hn}$ di (S_0) sono determinati da z. Uno almeno di questi, sia $b_h \cdot p_0^{hn}$, è diverso da 0 se $z \neq 0$. Designando il suo ordine, calcolato secondo **93**, con m_h, si ha $n \cdot h \leq m_h$, dato che l'ordine di $b_h \in S_0$ è 0 o positivo. Con ciò è dimostrato l'esistenza di un numero n soddisfacente alle condizioni (*) nel caso $z \neq 0$.

I. Se in particolare $z \in (S_0)$, si deduce da

$$p_0^{-n} \cdot z \subset I\left(\frac{K}{S_0}\right) \frown (S_0) = I\left(\frac{(S_0)}{S_0}\right) = S_0, \quad p_0^{-n-1} \cdot z \not\subset S_0$$

che in tale caso n coincide con l'ordine di z introdotto in **93**.

II. Sia $n(z_1) = n_1 \geq n_2 = n(z_2)$ (supposto $z_1 \cdot z_2 \neq 0$). Da

$$z_1 \subset \mathfrak{P}_0^{n_1} \cdot I\left(\frac{K}{S_0}\right) \subset \mathfrak{P}_0^{n_2} \cdot I\left(\frac{K}{S_0}\right), \quad z_2 \subset \mathfrak{P}_0^{n_2} \cdot I\left(\frac{K}{S_0}\right)$$

segue

$$z_1 + z_2 \subset \mathfrak{P}_0^{n_2} \cdot I\left(\frac{K}{S_0}\right)$$

e quindi $n(z_1 + z_2) \geq n_2 = \min\,(n(z_1),\ n(z_2))$.

III. Sia $n(z) = n$ e $n(z_0) = m$ Allora

$$z \cdot z_0 \subset \mathfrak{P}_0^{n+m} \cdot I\left(\frac{K}{S_0}\right).$$

Se fosse

$$z \cdot z_0 \subset \mathfrak{P}_0^{n+m+1} \cdot I\left(\frac{K}{S_0}\right),$$

si avrebbe

$$z \subset z_0^{-1} \cdot \mathfrak{P}_0^{n+m+1} \cdot I\left(\frac{K}{S_0}\right) = \mathfrak{P}_0^{n+1} \cdot I\left(\frac{K}{S_0}\right)$$

contrariamente al significato di n Dunque $n(z \cdot z_0) = n + m$.
C. d. d.

108. *Se il corpo K è algebrico e 1-dimensionale sopra k mentre $x \in K$ è algebricamente indipendente sopra k, si ha*

$$I\left(\frac{K}{[k,\, x]}\right) = \sum_{i=1}^{g} [k,\, x] \cdot z_i \qquad \textit{con } g = \textit{grado}\, \frac{K}{(k,\, x)}.$$

(Teorema di F. K. SCHMIDT).

DIMOSTRAZIONE. – Sia $\mathfrak{P}_0$ la prospettiva perfetta di base $[k,\, x^{-1}]$ individuata dall'ideale $x^{-1} \cdot [k,\, x^{-1}]$, e si indichi con $n(z)$ l'ordine di $z \in K$ in $\mathfrak{P}_0$.

I. Dimostriamo dapprima che per ogni $z \in I\left(\frac{K}{[k,\, x]}\right)$ quest'ordine non supera 0, purchè non sia $z = 0$.

Infatti, se $n(z) > 0$, si ha (ved. **107**) $z \subset x^{-1} \cdot I\left(\frac{K}{S_0}\right)$ cosicchè vale una equazione

$$(*) \qquad (z \cdot x)^m + a_1 \cdot (z \cdot x)^{m-1} + \dots + a_m = 0 \qquad (a_i \in S_0)$$

con $X^m + a_1 \cdot X^{m-1} + \dots + a_m$ irriducibile in $S_0[X]$ e quindi irriducibile in $K_0[X]$, dove K_0 designa il corpo $(k,\, x)$. Ma d'altra parte si deduce dall'ipotesi fatta su z l'esistenza di un'equazione irriducibile in $K_0[X]$

$$z^m + b_1 \cdot z^{m-1} + \dots + b_m = 0 \quad \text{con } b_i \in [k,\, x]$$

la quale fornisce dal confronto con (*) le relazioni $b_i = a_i \cdot x^{-i}$ che, essendo $n(a_i) \geq 0$, mostrano $n(b_i) = n(a_i) + i \geq i \geq 1$, cioè $b_i \subset \mathfrak{P}_0$. Basta ora osservare che $\mathfrak{P}_0 \cap [k,\, x] = 0$ per provare che $z = 0$.

II. Come alla fine di **103** si assicura l'esistenza di g elementi di $I\left(\frac{K}{[k,\, x]}\right)$ linearmente indipendenti sopra K_0.

Si scelgono ora successivamente gli elementi $z_1, z_2, \dots, z_g$ di $I\left(\frac{K}{[k,\, x]}\right)$ di modo che essi siano linearmente indipendenti sopra K_0 e valga la

$$(**) \qquad n(z_i) \geq n(z) \text{ per ogni } z \in I\left(\frac{K}{[k,\, x]}\right),\; z \not\subset \sum_{j=1}^{i-1} K_0 \cdot z_j,$$

il che evidentemente riesce finchè i sia $\leq g$. Invero per $i < g$ esiste uno z_{i+1}

linearmente indipendente da $z_1, \ldots, z_i$ soddisfacente la (**), perchè gli ordini $n(z)$ degli elementi di $I\left(\frac{K}{[k,\ x]}\right)$ diversi da 0 hanno secondo I un limite superiore ≤ 0.

Risulta subito

$$(+) \qquad n(z_1) \geq n(z_2) \geq \ldots \geq n(z_g).$$

III. Ogni $z \in I\left(\frac{K}{[k,\ x]}\right)$ determina univocamente $a_i \in K_0$ tali che $z = \sum_{i=1}^{g} a_i \cdot z_i$. Allora $a_i = b_i + c_i$ con $b_i \in [k,\ x]$, $c_i \in \mathfrak{P}_0$, e quindi anche $\Sigma\, b_i \cdot z_i \in I\left(\frac{K}{[k,\ x]}\right)$. Se fosse $\Sigma\, c_i \cdot z_i \neq 0$, potremmo supporre $c_h \neq 0$, $c_i = 0$ per $i > h$ e pertanto (ved. **107**), tenuto conto di (+),

$$n\left(\sum_{i=1}^{h} c_i \cdot z_i\right) \geq \min n(c_i \cdot z_i) \geq 1 + n(z_h),$$

essendo $n(c_i \cdot z_i) = n(c_i) + n(z_i)$ (ved. **107**) e $n(c_i) \geq 1$ a causa di $c_i \subset \mathfrak{P}_0$. Ma ciò contraddirebbe alla scelta di z_h, il quale deve realizzare il massimo ordine fra gli elementi non appartenenti a $\sum_{j=1}^{h-1} K_0 \cdot z_j$. Vale dunque $\sum_i c_i \cdot z_i = 0$, cioè $z = \Sigma\, b_i \cdot z_i$, il che mostra $I\left(\frac{K}{[k,\ x]}\right) \subset \sum_i [k,\ x] \cdot z_i$, mentre l'inverso di questa situazione è ovvio.

Il teorema or ora dimostrato ammette la seguente generalizzazione pure trovata da F. K. SCHMIDT:

Se K e $K_0 = (k,\ x_1, \ldots, x_n) \subset K$ sono algebrici e n-dimensionali sopra k, l'integrità di K relativa a $[k,\ x_1, \ldots, x_n]$ ha $[k,\ x_1, \ldots, x_n]$-base finita.

DIMOSTRAZIONE. - Supponendo il teorema dimostrato per dimensioni minori di n, possiamo affermare, data una qualunque K_0-base indipendente $z_1, \ldots, z_m$ di $K = \sum_{i=1}^{m} K_0 \cdot z_i$, l'esistenza di polinomi $f,\ g \neq 0$, $\in [k,\ x_1, \ldots, x_n]$ con le proprietà

$$f \cdot I\left(\frac{K}{[(k,\ x_1),\ x_2, \ldots,\ x_n]}\right) \subset \sum_{i=1}^{m} [(k,\ x_1),\ x_2, \ldots, x_n] \cdot z_i,$$

$$g \cdot I\left(\frac{K}{[(k,\ x_2, \ldots,\ x_n),\ x_1]}\right) \subset \sum_{i=1}^{m} [(k,\ x_2, \ldots, x_n),\ x_1] \cdot z_i,$$

dalle quali segue per ogni elemento y di

$$I\left(\frac{K}{[k,\ x_1, \ldots,\ x_n]}\right) \subset I\left(\frac{K}{[(k,\ x_1),\ x_2, \ldots,\ x_n]}\right) \cap I\left(\frac{K}{[(k,\ x_2, \ldots,\ x_n),\ x_1]}\right)$$

una relazione

$$f \cdot g \cdot y = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot z_i \qquad \text{con } a_i \in [k,\ x_1, \ldots,\ x_n],$$

perchè $[(k,\ x_1),\ x_2, \ldots,\ x_n] \frown [(k,\ x_2, \ldots,\ x_n),\ x_1] = [k,\ x_1, \ldots,\ x_n]$.

Essendo quindi l'integrità di K relativa a $[k, x_1, \ldots, x_n]$ un sotto-$[k, x_1, \ldots, x_n]$-modulo di

$$\sum_{i=1}^{m} [k,\ x_1, \ldots,\ x_n] \cdot \frac{z_i}{f \cdot g},$$

avrà anche essa una $[k,\ x_1, \ldots,\ x\ ]$-base finita (ved. **98**).

CAPITOLO IV

VARIETÀ

§ 1. Varietà in generale.

109. *Se A è base della prospettiva $\mathfrak{P}$, ogni elemento di A attivo in A è attivo anche in S e l'oggetto di A può essere identificato con quello di S,* (identificazione, che sempre supponiamo eseguita).

Dimostrazione. - I. Sia $a \in A$ attivo in A e $a \cdot x = 0$ con $x \in S$. Essendo A base di $\mathfrak{P}$, esiste $a' \in A$ tale che $a' \subset\!|\!: \mathfrak{P}$ e $x \cdot a' = a'' \in A$. Allora $a \cdot a'' = 0$ e quindi $a'' = 0$, il che implica $x = 0$, poichè $a' \subset\!|\!: \mathfrak{P}$ garantisce che a' è attivo in S (ved. **69**).

Da ciò segue che ogni elemento $\frac{a}{b}$ ($a,\ b \in A,\ b$ attivo in A) dell'oggetto (A) di A rappresenta anche un elemento dell'oggetto (S) di S. Identificando l'elemento $\frac{a}{b}$ di (A) con l'elemento $\frac{a}{b}$ di (S), si definisce (A) come sottoanello di (S).

II. Ogni elemento x di (S) è quoziente $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ con $a,\ b,\ c,\ d \in A;\ b,\ d \subset\!|\!: \mathfrak{P}$, $\frac{c}{d}$ attivo in S. Allora anche $b \cdot c = b \cdot d \cdot \frac{c}{d}$ è attivo in S, cosicchè esiste un elemento $y = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ di $(A) \subset (S)$ soddisfacente in (S) all'equazione $y \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \cdot c}{b \cdot c \cdot d} = \frac{a}{b}$ e perciò uguale a x.

Con questo è dimostrato che il sottoanello (A) di (S) riempie tutto l'oggetto (S).

110. Definizione. - Una *varietà* è un insieme di prospettive (oppure di aspetti) soddisfacente alle condizioni seguenti: