80. Il teorema precedente si semplifica nel caso di anelli primari caratterizzati dal fatto, che in essi tutti gli elementi inattivi sono infinitesimali (ved. 2).

Perchè una prospettiva $\mathfrak{p}$ possa essere estesa con dati elementi x, y, ... di un anello primario contenente s, è necessario e sufficiente, che l'ideale $\mathfrak{p} \cdot A$ generato dall'origine $\mathfrak{p}$ in $A = [s, x, y, ...]$ sia diverso da A.

DIMOSTRAZIONE. - I. La condizione è necessaria in quanto contenuta in quella del teorema precedente.

II. Per mostrare la sua sufficienza osserviamo anzitutto che l'elemento uno e di s è anche elemento uno di A. Infatti, per z qualunque di A segue da $e \cdot (z - e \cdot z) = 0$ che $z - e \cdot z = 0$, giacché $e = e^m$, in quanto non infinitesimale, è attivo in A.

Dall'ipotesi $\mathfrak{p} \cdot A \neq A$ deduciamo come in 79 l'esistenza di un ideale primo $\mathfrak{c} \neq A$ contenente $\mathfrak{p} \cdot A \supset \mathfrak{p}$. Soddisfacendo ogni elemento i di A inattivo in A ad una equazione $i^m = 0$, tale i sarà contenuto in $\mathfrak{c}$. Di nuovo sono verificate le premesse del teorema 72, il quale mostra che esiste una prospettiva $\mathfrak{P}$ di base A con $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{c} \supset \mathfrak{p}$ e quindi $\mathfrak{P} \cap s \supset \mathfrak{p}$, mentre $\mathfrak{P} \cap s \subset \mathfrak{p}$ si verifica come alla fine della dimostrazione precedente.

§ 4. Integrità relativa.

81. Ricordiamo che la totalità degli elementi infinitesimali di un anello commutativo A è un ideale chiamato il *radicale* di A.

È chiaro che fra il radicale $\mathfrak{v}_0$ di un sottoanello A_0 di un anello commutativo A e quello $\mathfrak{v}$ di A stesso sussiste la relazione

$$(*) \qquad \mathfrak{v} \cap A_0 = \mathfrak{v}_0 .$$

Dal fatto evidente che il radicale di un anello primario è ideale primo deduciamo subito che *ogni oggetto primario è aspetto presentato da una prospettiva la cui origine è il radicale dell'oggetto.* Infatti, ogni elemento x di un oggetto primario R non appartenente al radicale di R ammette, essendo esso attivo in R, un inverso $x^{-1} \in R$. Verificate le premesse del teorema 68, si deduce subito la osservazione suddetta.

Tenendo conto della relazione (*) si può dire ormai che *ogni oggetto primario, in quanto aspetto, è estensione di ogni suo sotto-oggetto.*

Le considerazioni seguenti che mirano ad inquadrare la nozione aritmetica di « integrità » nel prospettivismo, si limitano al caso di anelli primari. Giova ricordare, a proposito, che nel caso di tali anelli A_0, A si può sempre concludere da $A_0 \subset A$ il fatto $(A_0) \subset (A)$ per gli oggetti corrispondenti (A_0), (A).

82. DEFINIZIONE. - Un elemento x di un'oggetto primario R contenente l'anello A è detto *integro in R sopra A* allora e soltanto allora che ogni aspetto intermedio fra A ed R possa essere esteso con x.

La totalità $I\left(\frac{R}{A}\right)$ *degli elementi integri in* R *sopra* A *è anello* che diciamo *la integrità di* R *sopra* A.

DIMOSTRAZIONE. - Sia s un aspetto intermedio fra A e R qualsiasi.

Da $x,\ y \in I\left(\frac{R}{A}\right)$ segue tanto l'esistenza di una estensione S di s con x quanto l'esistenza di una estensione S' di S con y. Essendo S' anche estensione di s, e valendo $x-y \in S'$, $x \cdot y \in S'$ esiste (ved. **76**) una estensione di s con $x - y$ ed una estensione di s con $x \cdot y$. Tenuto conto dell'arbitrarietà della scelta di s, ne segue $x-y$ e $x \cdot y$ essere elementi di $I\left(\frac{R}{A}\right)$.

83. *Ogni aspetto intermedio tra* A *ed* R *può essere esteso con l'integrità* $I\left(\frac{R}{A}\right)$ *di* R *sopra* A. (R supposto primario).

DIMOSTRAZIONE. - Supponiamo che l'aspetto s, intermedio tra A ed R, non possa essere esteso con $I = I\left(\frac{R}{A}\right)$. Vale allora $1 \in \mathfrak{p} \cdot [s,\ I]$ (ved. **80**, 1 designa l'elemento uno di R e pertanto di s), il che corrisponde ad una equazione

$$(*) \qquad 1 = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i \quad \text{con } p_i \in \mathfrak{p}, \quad x_i \in I,$$

dato che ogni elemento di $[s,\ I]$ è della forma $\Sigma\, a \cdot y$ (con $a \in s,\ y \in I$).

Ora da $x_1 \in I\left(\frac{R}{A}\right)$ segue l'esistenza di una estensione S_1 di s con x_1, e di nuovo si conclude da $x_2 \in I\left(\frac{R}{A}\right)$ l'esistenza di una estensione S_2 di S_1 (e quindi di s) con x_2, ecc. finchè si ottiene un aspetto S_n, estensione di s con $x_1,\ x_2, \dots,\ x_n$ (ved. **77**), il che contraddice all'equazione (*) esprimente proprio l'impossibilità di estendere s con $x_1,\ x_2, \dots,\ x_n$ (ved. **80**). Questa contraddizione dimostra il teorema.

84. *L'integrità di* R *sopra l'integrità di* R *sopra* A *è l'integrità di* R *sopra* A. (R supposto primario).

DIMOSTRAZIONE. - I. Dal fatto generale evidente $I\left(\frac{R}{A}\right) \supset A$ segue

$$I' = I\left(\frac{R}{I\left(\frac{R}{A}\right)}\right) \supset I\left(\frac{R}{A}\right).$$

II. Siano x elemento qualunque di I' e s aspetto intermedio fra A ed R qualsiasi.

Secondo il teorema precedente esiste una estensione S di s con $I\left(\frac{R}{A}\right)$. L'ipotesi $x \in I'$ garantisce poi l'esistenza di un'estensione S' di S (e perciò di s) contenente x, cosicchè esiste anche (ved. 76) una estensione di s con x. Dato l'arbitrarietà della scelta di x e di s se ne deduce $I' \subset I\left(\frac{R}{A}\right)$. Con I e II è dimostrato il teorema.

85. Notiamo che l'integrità $I\left(\frac{R}{A}\right)$ coincide sempre con l'integrità di R sopra l'anello $[1, A]$, perchè ogni aspetto intermedio fra A ed R è anche intermedio tra $[1, A]$ e R, essendo l'elemento 1 di R necessariamente anche elemento di s. È opportuno dunque limitarsi al caso che 1 sia contenuto in A.

86. *Perchè un elemento x di un oggetto primario $R \supset A \supset 1$ sia integro in R sopra A è necessario e sufficiente che x soddisfi ad un'equazione del tipo*

$$(*) \qquad x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \qquad \textit{con } a_i \in A$$

DIMOSTRAZIONE. - I. Supponiamo x integro in R sopra A e attivo in R, e ricerchiamo, se sia possibile

$$x^{-1} \cdot [x^{-1}, A] \neq [x^{-1}, A].$$

Ci sarebbe allora in $[x^{-1}, A]$ un ideale primo $\mathfrak{c} \neq [x^{-1}, A]$ tale che $x^{-1} \cdot [x^{-1}, A] \subset \mathfrak{c}$, e questo ideale, che ovviamente contiene tutti gli elementi inattivi, cioè infinitesimali, individuerebbe, secondo 72, una prospettiva $\mathfrak{p}$ di base $[x^{-1}, A]$ con origine $\mathfrak{p}$ contenente x^{-1}. Ma $\mathfrak{p} \supset x^{-1}$ contraddirebbe (ved. 78) l'ipotesi che x sia integro in R sopra A. Vale dunque

$$x^{-1} \cdot [x^{-1}, A] = [x^{-1}, A]$$

ed in particolare $1 \in x^{-1} \cdot [x^{-1}, A]$, donde si deduce un'equazione del tipo (*).

Se l'elemento x supposto integro in R sopra A è inattivo in R, cioè infinitesimale, esso soddisfa ad un'equazione $x^m = 0$ che è del tipo suddetto.

II. Supponiamo viceversa che x soddisfi ad un'equazione del tipo (*) e sia s un qualunque aspetto intermedio fra A ed R.

Da (*) segue che $[s, x] = \sum_{i=0}^{n-1} s \cdot x^i$. Scegliamo x_i $(i = 1, 2, \dots, h)$ fra $x^0 (= 1), x, \dots, x^{n-1}$ di modo che sia

$$(**) \qquad [s, x] = \sum_{i=1}^{h} s \cdot x_i \quad \text{e} \quad x_1 \not\subset \sum_{i=2}^{h} s \cdot x_i \,.$$

Se non si potesse estendere s con x, si avrebbe (ved. **80**) $[s, x]' = \mathfrak{p} \cdot [s, x]$ e perciò, tenuto conto di (**), per es.

$$x_1 = \sum_{i=1}^{h} p_i \cdot x_i \quad (p_i \in \mathfrak{p}) \quad \text{cioè} \quad x_1 = \sum_{i=2}^{h} \frac{p_i}{1 - p_1} \cdot x_i$$

contro l'ipotesi (**), perchè $\frac{p_i}{1 - p_1} \in s$.

Con ciò è dimostrato che x, soddisfacente a (*), è integro in R sopra A.

87. *Supponendo che R_0 sia sotto-oggetto dell'oggetto primario R, mentre $A \supset A_0$ siano sottoanelli di R_0, si ottengono le relazioni*

$$I\left(\frac{R}{A}\right) \supset I\left(\frac{R_0}{A}\right) = I\left(\frac{R}{A}\right) \cap R_0 \text{ come conseguenza di } R \supset R_0 \supset A \supset 1,$$

$$I\left(\frac{R}{A}\right) \supset I\left(\frac{R}{A_0}\right) \text{ come conseguenza di } R \supset A \supset A_0 \supset 1.$$

Infatti, dal teorema precedente risulta che l'equazione che caratterizza un elemento di R_0 (di R) come integro in R_0 (in R) sopra A (sopra A_0) lo caratterizza altresì come integro in R sopra A.

88. DEFINIZIONE. - Un anello A è detto ***integrità in R*** (integralmente chiuso in R) allora e soltanto allora, che R sia un'oggetto primario contenente A tale che

$$I\left(\frac{R}{A}\right) = A.$$

Dal teorema 84 segue che l'integrità di R sopra un qualsiasi sotto-anello di R è integrità in R.

L'integrità di un oggetto primario R sopra l'anello [1] generato dall'elemento 1 sarà detta semplicemente l'***integrità di R*** e designata con $I(R)$ invece di $I\left(\frac{R}{[1]}\right)$. Essa è sottoanello di ogni integrità in R.

§ 5. Estensioni proiettive.

89. *Se un aspetto s, contenuto in un oggetto primario R, non può essere esteso con l'elemento x di R, l'inverso x^{-1} di x è integro sopra s e si ha $x^{-1} \in \mathfrak{P}$ per ogni estensione S di s che contiene x^{-1}.*

DIMOSTRAZIONE. - Dall'ipotesi segue (ved. **80**) $1 \subset \mathfrak{p} \cdot [s, x]$ equivalente ad un'equazione del tipo

$$1 = p_0 + p_1 \cdot x + \dots + p_n \cdot x^n \qquad (\text{con } p_i \in \mathfrak{p}).$$