Da $\mathfrak{P}_0 \frown A = \mathfrak{P} \frown A$ segue $S_0 \subset S$ e perciò (ved. 65) $\mathfrak{P} \frown S_0 \subset \mathfrak{P}_0$, perché l'altra possibilità ammessa in 65, cioè $S_0 \subset \mathfrak{P}$, darebbe $A = S_0 \frown A \subset \mathfrak{P} \frown A \neq A$. Confrontando questo risultato con $\mathfrak{P}_0 = [\mathfrak{P} \frown A] \cdot S_0 \subset \mathfrak{P} \frown S_0$ si ottengono le relazioni $\mathfrak{P} \frown S_0 = \mathfrak{P}_0$, $S \supset S_0$ qualificanti S come estensione di S_0. $\mathfrak{P}_0$ è l'unica prospettiva di base A che ammetta $\mathfrak{P}$ come estensione, poiché la condizione $\mathfrak{P} \frown S_0 = \mathfrak{P}_0$, $S \supset S_0 \supset A$ determina l'ideale $\mathfrak{P}_0 \frown A = \mathfrak{P} \frown S_0 \frown A = = \mathfrak{P} \frown A$ individuante $\mathfrak{P}_0$ in A.

74. *Ogni anello A intermedio fra un aspetto s e una estensione S di s è base di una sola prospettiva $\mathfrak{P}_0$ intermedia fra $\mathfrak{p}$ e $\mathfrak{P}$ nel senso, che $\mathfrak{P}_0$ sia estensione di $\mathfrak{p}$, mentre $\mathfrak{P}$ sia estensione di $\mathfrak{P}_0$. $\mathfrak{P}_0$ è individuata dall'ideale $\mathfrak{P} \frown A$.*

Dimostrazione. - Da $A \supset s$ e $\mathfrak{P} \frown s = \mathfrak{p} \neq s$ segue $A \not\subset \mathfrak{P}$, cosicché esiste (ved. 73) $\mathfrak{P}_0$ di base A, unica in quanto estensibile a $\mathfrak{P}$. Allora $\mathfrak{P}_0 \frown A = \mathfrak{P} \frown A$ induce $\mathfrak{P}_0 \frown s = \mathfrak{P} \frown s = \mathfrak{p}$, cioè che $\mathfrak{P}_0$ è estensione di $\mathfrak{p}$.

75. *Se $A_0 \subset A$ sono sottoanelli di un aspetto S tali che ogni elemento di A sia quoziente $\frac{a}{b}$ con a, $b \in A_0$, $b \not\subset \mathfrak{P}$, mentre A è base di $\mathfrak{P}$, allora l'anello A_0 è anche esso base di $\mathfrak{P}$.*

Dimostrazione. - Ogni $x \in S$ è quoziente $x = \frac{a}{b}$ con a, $b \in A$, $b \not\subset \mathfrak{P}$. Siano $a = \frac{a_0'}{a_0}$, $b = \frac{b_0'}{b_0}$ con a_0, a_0', b_0, $b_0' \in A_0$, a_0, $b_0 \not\subset \mathfrak{P}$. Allora $a_0 \cdot b_0' = a_0 \cdot b \cdot b_0$ non appartiene all'origine $\mathfrak{P}$, essendo questa ideale primo. Dunque $x = \frac{a_0' \cdot b_0}{a_0 \cdot b_0'}$ con $a_0' \cdot b_0$, $a_0 \cdot b_0' \in A_0$, $a_0 \cdot b_0' \not\subset \mathfrak{P}$, c. d. d.

§ 3. Estensione di una prospettiva con dati elementi.

76. *Estendere* una prospettiva $\mathfrak{p}$ (un aspetto s) *con dati elementi* x, y, ... di un anello A contenente s, significa: estendere $\mathfrak{p}$ (risp. s) in modo tale, che il sottoanello $[s, x, y, ...]$ di A generato da s, x, y, ... sia base dell'estensione.

Per poter affermare che una prospettiva $\mathfrak{p}$ può essere estesa con dati elementi x, y, ... basta constatare l'esistenza di una estensione S di s contenente gli elementi x, y, ... Infatti tale S conterrà l'anello $A = [s, x, y, ...]$, che individua, secondo 74, una estensione di s con x, y, ...

77. *Se la prospettiva $\mathfrak{P}'$ è estensione della prospettiva $\mathfrak{P}$ con l'insieme E', mentre $\mathfrak{P}$ è estensione di una prospettiva $\mathfrak{p}$ con l'insieme E, allora $\mathfrak{P}'$ è estensione di $\mathfrak{p}$ con $E \smile E'$.*

DIMOSTRAZIONE. - L'anello $[S, E']$, base di $\mathfrak{P}'$, è la totalità delle somme

$$(*) \qquad a + \Sigma\, e' \cdot b \quad \text{con} \quad a,\, b \in S, \quad e' \in [E'].$$

Poiché $\mathfrak{P}$ estende $\mathfrak{p}$ con E, ogni elemento di S è quoziente $\frac{x}{y}$ con x, y appartenenti a $[s, E]$, $y \not\subset \mathfrak{P}$. Ne risulta per (*) un'espressione come quoziente il cui numeratore è elemento di $[s, E, E']$, mentre il denominatore giace in $[s, E]$ senza appartenere a $\mathfrak{P}$ oppure a $\mathfrak{P}'$, valendo $\mathfrak{P}' \cap S = \mathfrak{P}$. Siccome ogni elemento z di S' è quoziente di espressioni del tipo (*) con denominatori non appartenenti a $\mathfrak{P}'$, risulta ormai per z una espressione $\frac{x}{y}$ con $x, y \in [s, E, E']$, $y \not\subset \mathfrak{P}'$, c. d. d.

78. *Non è mai possibile estendere una prospettiva $\mathfrak{p}$ con l'inverso x^{-1} di un elemento dell'origine $\mathfrak{p}$ di $\mathfrak{p}$.*

Infatti, se fosse S una estensione di s con x^{-1}, si avrebbe, designando con 1 l'elemento uno comune (ved. **70**) a s e S,

$$1 = x \cdot x^{-1} \subset \mathfrak{p} \cdot S \subset \mathfrak{P},$$

il che è impossibile.

79. *Perché una prospettiva $\mathfrak{p}$ possa essere estesa con dati elementi $x, y, \ldots$ è necessario e sufficiente, che l'elemento uno di s sia pure elemento uno di $A = [s, x, y, \ldots]$ e che l'ideale $\mathfrak{p} \cdot A + A' \cdot A$ generato in A dall'origine $\mathfrak{p}$ e dall'insieme A' degli elementi di A inattivi in A sia diverso da A.*

DIMOSTRAZIONE. - I. Se $\mathfrak{P}$ estende $\mathfrak{p}$ con $x, y, \ldots$, l'elemento uno di $S \supset A$ coincide (ved. **70**) con quello di s. Gl'insiemi $\mathfrak{p}$ e A' generano dunque in A l'ideale $\mathfrak{p} \cdot A + A' \cdot A$, il quale a causa di $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap s$, $A' \subset \mathfrak{P}$ (ved. **69**) è contenuto in $\mathfrak{P}$ e pertanto è diverso da A.

II. Supponiamo, viceversa, che l'elemento uno di s sia l'elemento 1 di A e sia anche $\mathfrak{p} \cdot A + A' \cdot A \neq A$.

Un teorema generale di KRULL (fondato sul postulato di selezione ed immediato, se si sostituisce a quel postulato il lemma di ZORN) insegna, che ogni ideale diverso dall'anello totale è contenuto in un ideale primo altresì diverso dall'anello totale. Esiste dunque in A un ideale primo $\mathfrak{c} \neq A$ contenente $\mathfrak{p} \cdot A + A' \cdot A \supset A'$. Soddisfacendo $\mathfrak{c}$ alle premesse del teorema **72**, si ottiene una prospettiva $\mathfrak{P}$ di base A individuata da $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{c}$ cosicché $\mathfrak{P} \cap s = \mathfrak{c} \cap s \supset \mathfrak{p}$ mentre si ha $\mathfrak{P} \cap s \subset \mathfrak{p}$ in conseguenza di $s \subset S$ (ved. **65**), poiché $s \subset \mathfrak{P}$ si esclude, essendo $1 \in s$ anche elemento uno di $A \subset S$. Abbiamo quindi $\mathfrak{P} \cap s = \mathfrak{p}$, $S \supset s$, e ciò mostra che la prospettiva $\mathfrak{P}$ di base $A = [s, x, y, \ldots]$ è estensione di $\mathfrak{p}$.

80. Il teorema precedente si semplifica nel caso di anelli primari caratterizzati dal fatto, che in essi tutti gli elementi inattivi sono infinitesimali (ved. 2).

Perchè una prospettiva $\mathfrak{p}$ possa essere estesa con dati elementi x, y, ... di un anello primario contenente s, è necessario e sufficiente, che l'ideale $\mathfrak{p} \cdot A$ generato dall'origine $\mathfrak{p}$ in $A = [s, x, y, \ldots]$ sia diverso da A.

Dimostrazione. - I. La condizione è necessaria in quanto contenuta in quella del teorema precedente.

II. Per mostrare la sua sufficienza osserviamo anzitutto che l'elemento uno e di s è anche elemento uno di A. Infatti, per z qualunque di A segue da $e \cdot (z - e \cdot z) = 0$ che $z - e \cdot z = 0$, giacché $e = e^m$, in quanto non infinitesimale, è attivo in A.

Dall'ipotesi $\mathfrak{p} \cdot A \neq A$ deduciamo come in 79 l'esistenza di un ideale primo $\mathfrak{c} \neq A$ contenente $\mathfrak{p} \cdot A \supset \mathfrak{p}$. Soddisfacendo ogni elemento i di A inattivo in A ad una equazione $i^m = 0$, tale i sarà contenuto in $\mathfrak{c}$. Di nuovo sono verificate le premesse del teorema 72, il quale mostra che esiste una prospettiva $\mathfrak{P}$ di base A con $\mathfrak{P} \frown A = \mathfrak{c} \supset \mathfrak{p}$ e quindi $\mathfrak{P} \frown s \supset \mathfrak{p}$, mentre $\mathfrak{P} \frown s \subset \mathfrak{p}$ si verifica come alla fine della dimostrazione precedente.

§ 4. Integrità relativa.

81. Ricordiamo che la totalità degli elementi infinitesimali di un anello commutativo A è un ideale chiamato il *radicale* di A.

È chiaro che fra il radicale $\mathfrak{v}_0$ di un sottoanello A_0 di un anello commutativo A e quello $\mathfrak{v}$ di A stesso sussiste la relazione

$$(*) \qquad \mathfrak{v} \frown A_0 = \mathfrak{v}_0 .$$

Dal fatto evidente che il radicale di un anello primario è ideale primo deduciamo subito che *ogni oggetto primario è aspetto presentato da una prospettiva la cui origine è il radicale dell'oggetto.* Infatti, ogni elemento x di un oggetto primario R non appartenente al radicale di R ammette, essendo esso attivo in R, un inverso $x^{-1} \in R$. Verificate le premesse del teorema 68, si deduce subito la osservazione suddetta.

Tenendo conto della relazione (*) si può dire ormai che *ogni oggetto primario, in quanto aspetto, è estensione di ogni suo sotto-oggetto.*

Le considerazioni seguenti che mirano ad inquadrare la nozione aritmetica di « integrità » nel prospettivismo, si limitano al caso di anelli primari. Giova ricordare, a proposito, che nel caso di tali anelli A_0, A si può sempre concludere da $A_0 \subset A$ il fatto $(A_0) \subset (A)$ per gli oggetti corrispondenti (A_0), (A).

82. Definizione. - Un elemento x di un'oggetto primario R contenente l'anello A è detto *integro in R sopra A* allora e soltanto allora che ogni aspetto intermedio fra A ed R possa essere esteso con x.