§ 2. Aspetti commutativi.

Se non è detto altro, limiteremo le considerazioni ulteriori al caso di aspetti commutativi.

68. *Perché un anello commutativo A sia aspetto, è necessario e sufficiente, che esso ammetta una percezione $A/\mathfrak{o}$ tale, che da $x \in A$, $x \not\subset \mathfrak{o}$ segua sempre l'esistenza di $x^{-1} \in A$: L'ideale $\mathfrak{o}$ è allora l'origine della prospettiva presentante l'aspetto A.*

Dimostrazione. – I. Siano S aspetto commutativo e $x \in S$, $x \not\subset \mathfrak{P}$. L'ideale $x \cdot S$ generato da x in S coincide allora con S, poiché esso non è contenuto in $\mathfrak{P}$. Esiste dunque $y \in S$ soddisfacente a $x \cdot y = 1 \in S$.

II. Supponiamo, viceversa, che ogni $x \in A \neq \mathfrak{o}$ non appartenente a $\mathfrak{o}$ ammetta $x^{-1} \in A$. Siccome allora tale x genera sempre l'ideale $x \cdot A = A$, si conclude che ogni ideale diverso da A è contenuto in $\mathfrak{o}$. Mentre ciò significa che $A \to A/\mathfrak{o}$ è percezione centrale, l'ipotesi $\mathfrak{o} \neq A$ implica l'esistenza dell'elemento $1 = x \cdot x^{-1}$ in A.

69. *Ogni elemento x di un aspetto commutativo S, attivo nel soggetto $S/\mathfrak{P}$, cioè $x \not\subset \mathfrak{P}$ è attivo anche in S.*

Difatti, l'ipotesi che x sia attivo in $S/\mathfrak{P}$, significa $x \not\subset \mathfrak{P}$, poiché nel caso commutativo $S/\mathfrak{P}$ è corpo (ved. **64**). Il teorema precedente mostra allora che $x \cdot y = 0$ con $y \in S$ induce $y = x^{-1} \cdot x \cdot y = 0$, c. d. d.

70. *Se l'aspetto commutativo S contiene l'aspetto s, l'elemento uno E di S coincide con quello e di s, purché non sia $s \subset \mathfrak{P}^m$ per m qualunque. Vale in particolare $E = e$ nel caso di S estensione di s.*

Invero, le relazioni $E \cdot e = e$, $e \cdot e = e$ inducono $(E - e) \cdot e = 0$ e quindi (ved. **69**) $E - e = 0$ qualora non sia $e \subset \mathfrak{P}$, cioè $s \subset \mathfrak{P}^m$ con m qualunque. Nel caso di S estensione di s la possibilità $e \subset \mathfrak{P}$ si esclude a causa di $e \not\subset \mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap s$.

71. Definizione. – Un anello commutativo A è detto *base dell'aspetto* S oppure *base della prospettiva* $\mathfrak{P}$ allora e soltanto allora che

1) A sia sottoanello di S,

2) Ogni elemento di S sia quoziente $\frac{a}{b}$ con a, $b \in A$, $b \not\subset \mathfrak{P}$.

L'ideale intersezione $\mathfrak{P} \cap A$ sarà chiamato *l'ideale individuante S (o $\mathfrak{P}$) in A.*

Questo insieme $\mathfrak{P} \cap A$ è base dell'ideale $\mathfrak{P}$, il che esprimiamo scrivendo

$$[\mathfrak{P} \cap A] \cdot S = \mathfrak{P}.$$

Notiamo a proposito il fatto generale

$$[\mathfrak{C} \frown A] \cdot S = \mathfrak{C}$$

valido per ogni ideale $\mathfrak{C}$ in S. Invero, ogni $x \in \mathfrak{C}$ è quoziente $\frac{a}{b}$ con a, $b \in A$, $b \not\subset \mathfrak{P}$, cioè $b^{-1} \in S$, mentre $a = b \cdot x \subset \mathfrak{C} \frown A$.

72. *Perché un ideale $\mathfrak{c}$ di un anello commutativo A individui una prospettiva di base A è necessario e sufficiente, che esso sia primo $\neq A$ e contenga tutti gli elementi di A inattivi in A. Per la prospettiva $\mathfrak{P}$ individuata da $\mathfrak{c}$ valgono le relazioni*

$$\mathfrak{P} \frown A = \mathfrak{c}, \qquad \mathfrak{P} = \mathfrak{c} \cdot S.$$

Dimostrazione. - I. L'intersezione $\mathfrak{P} \frown A$ dell'origine $\mathfrak{P}$ di una prospettiva $\mathfrak{P}$ di base A con A è ideale primo (ved. **64**) in $A \subset S$, diverso da A perché (ved. **71**) $A \cdot S = [S \frown A] \cdot S = S \neq \mathfrak{P} = [\mathfrak{P} \frown A] \cdot S$. Gli elementi di A inattivi in A sono inattivi in S e pertanto (ved. **69**) elementi di $\mathfrak{P}$ o anche di $\mathfrak{P} \frown A$. L'ideale $\mathfrak{P} \frown A$ soddisfa dunque alle condizioni chiamate necessarie nel teorema suddetto.

II. Sia, viceversa, $\mathfrak{c} \neq A$ un ideale primo di A contenente tutti gli elementi inattivi in A. Esiste allora l'oggetto (A) di A, il quale comprende l'insieme S di tutti i quozienti $\frac{a}{b}$ con a, $b \in A$, $b \not\subset \mathfrak{c}$. Essendo $\mathfrak{c}$ primo, questo S risulta anello e la totalità $\mathfrak{P}$ dei quozienti $\frac{c}{b}$ con $b \in A$, $c \in \mathfrak{c}$, $b \not\subset \mathfrak{c}$ è ideale in S diverso da S, poiché $\mathfrak{c} \neq A$ e $\frac{a}{b} \subset \mathfrak{P}$ (a, $b \in A$, $b \not\subset \mathfrak{c}$) induce $\frac{a}{b} = \frac{c}{b'}$ con $c \in \mathfrak{c}$, $b' \in A$, $b' \not\subset \mathfrak{c}$ e quindi $b' \cdot a \subset \mathfrak{c}$ cioè $a \in \mathfrak{c}$. Oltre la conseguenza $\mathfrak{P} = \mathfrak{c} \cdot S$ ne ricavamo, che da $\frac{a}{b} \not\subset \mathfrak{P}$ segue $\frac{b}{a} \in S$. Soddisfatte le premesse del teorema **68**, si conclude ormai che $\mathfrak{P}$ è l'origine di una prospettiva $\mathfrak{P}$ presentante l'aspetto S. Abbiamo già notato $\mathfrak{P} = \mathfrak{c} \cdot S$. Siccome da $\frac{c}{b} = a \in A$ ($b \in A$, $b \not\subset \mathfrak{c}$, $c \in \mathfrak{c}$) si trae $a \cdot b \subset \mathfrak{c}$, cioè $a \subset \mathfrak{c}$, vale $\mathfrak{P} \frown A = \mathfrak{c}$, il che mostra che l'anello A è base della prospettiva $\mathfrak{P}$, mentre $\mathfrak{c}$ è l'ideale individuante $\mathfrak{P}$.

73. *Ogni sottoanello $A \not\subset \mathfrak{P}$ di un aspetto S è base di una prospettiva $\mathfrak{P}_0$ individuata da $\mathfrak{P}_0 \frown A = \mathfrak{P} \frown A$, la quale è la sola prospettiva di base A di cui $\mathfrak{P}$ sia estensione.*

Dimostrazione. - $\mathfrak{P} \frown A \neq A$ è ideale primo in $A \subset S$. Essendo ogni elemento inattivo in A pure inattivo in S e pertanto (ved. **69**) contenuto in $\mathfrak{P} \frown A$, questo ideale individua (ved. **72**) una prospettiva $\mathfrak{P}_0$ di base A.

Da $\mathfrak{P}_0 \frown A = \mathfrak{P} \frown A$ segue $S_0 \subset S$ e perciò (ved. 65) $\mathfrak{P} \frown S_0 \subset \mathfrak{P}_0$, perché l'altra possibilità ammessa in 65, cioè $S_0 \subset \mathfrak{P}$, darebbe $A = S_0 \frown A \subset \mathfrak{P} \frown A \neq A$. Confrontando questo risultato con $\mathfrak{P}_0 = [\mathfrak{P} \frown A] \cdot S_0 \subset \mathfrak{P} \frown S_0$ si ottengono le relazioni $\mathfrak{P} \frown S_0 = \mathfrak{P}_0$, $S \supset S_0$ qualificanti S come estensione di S_0. $\mathfrak{P}_0$ è l'unica prospettiva di base A che ammetta $\mathfrak{P}$ come estensione, poiché la condizione $\mathfrak{P} \frown S_0 = \mathfrak{P}_0$, $S \supset S_0 \supset A$ determina l'ideale $\mathfrak{P}_0 \frown A = \mathfrak{P} \frown S_0 \frown A = = \mathfrak{P} \frown A$ individuante $\mathfrak{P}_0$ in A.

74. *Ogni anello A intermedio fra un aspetto s e una estensione S di s è base di una sola prospettiva $\mathfrak{P}_0$ intermedia fra $\mathfrak{p}$ e $\mathfrak{P}$ nel senso, che $\mathfrak{P}_0$ sia estensione di $\mathfrak{p}$, mentre $\mathfrak{P}$ sia estensione di $\mathfrak{P}_0$. $\mathfrak{P}_0$ è individuata dall'ideale $\mathfrak{P} \frown A$.*

DIMOSTRAZIONE. - Da $A \supset s$ e $\mathfrak{P} \frown s = \mathfrak{p} \neq s$ segue $A \not\sqsubset \mathfrak{P}$, cosicché esiste (ved. 73) $\mathfrak{P}_0$ di base A, unica in quanto estensibile a $\mathfrak{P}$. Allora $\mathfrak{P}_0 \frown A = \mathfrak{P} \frown A$ induce $\mathfrak{P}_0 \frown s = \mathfrak{P} \frown s = \mathfrak{p}$, cioè che $\mathfrak{P}_0$ è estensione di $\mathfrak{p}$.

75. *Se $A_0 \subset A$ sono sottoanelli di un aspetto S tali che ogni elemento di A sia quoziente $\frac{a}{b}$ con $a, b \in A_0$, $b \not\sqsubset \mathfrak{P}$, mentre A è base di $\mathfrak{P}$, allora l'anello A_0 è anche esso base di $\mathfrak{P}$.*

DIMOSTRAZIONE. - Ogni $x \in S$ è quoziente $x = \frac{a}{b}$ con $a, b \in A$, $b \not\sqsubset \mathfrak{P}$. Siano $a = \frac{a_0'}{a_0}$, $b = \frac{b_0'}{b_0}$ con $a_0, a_0', b_0, b_0' \in A_0$, $a_0, b_0 \not\sqsubset \mathfrak{P}$. Allora $a_0 \cdot b_0' = a_0 \cdot b \cdot b_0$ non appartiene all'origine $\mathfrak{P}$, essendo questa ideale primo. Dunque $x = \frac{a_0' \cdot b_0}{a_0 \cdot b_0'}$ con $a_0' \cdot b_0$, $a_0 \cdot b_0' \in A_0$, $a_0 \cdot b_0' \not\sqsubset \mathfrak{P}$, c. d. d.

§ 3. Estensione di una prospettiva con dati elementi.

76. *Estendere* una prospettiva $\mathfrak{p}$ (un aspetto s) *con dati elementi* $x, y, \ldots$ di un anello A contenente s, significa: estendere $\mathfrak{p}$ (risp. s) in modo tale, che il sottoanello $[s, x, y, \ldots]$ di A generato da $s, x, y, \ldots$ sia base dell'estensione.

Per poter affermare che una prospettiva $\mathfrak{p}$ può essere estesa con dati elementi $x, y, \ldots$ basta constatare l'esistenza di una estensione S di s contenente gli elementi $x, y, \ldots$. Infatti tale S conterrà l'anello $A = [s, x, y, \ldots]$, che individua, secondo **74**, una estensione di s con $x, y, \ldots$.

77. *Se la prospettiva $\mathfrak{P}'$ è estensione della prospettiva $\mathfrak{P}$ con l'insieme E', mentre $\mathfrak{P}$ è estensione di una prospettiva $\mathfrak{p}$ con l'insieme E, allora $\mathfrak{P}'$ è estensione di $\mathfrak{p}$ con $E \smile E'$.*