§ 6. **Norma e traccia.**

59. DEFINIZIONE. - Se A è sopra-anello di un corpo k e possiede quale k-modulo una base finita $A = \sum_{i=1}^{n} k \cdot z_i$, per ogni elemento x di A si definiscono la *norma* e la *traccia* relative con le formule

$$N_{\frac{A}{k}} x = | a_{ij} |, \qquad T_{\frac{A}{k}} x = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

partendo dalle espressioni

$$x \cdot z_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot z_j \qquad (a_{ij} \in k)$$

dei prodotti $x \cdot z_i$ mediante una *k-base minima* (cioè tale che n sia minimo).

Sono evidenti tanto la indipendenza di questa definizione dalla scelta della base minima di A quanto il sussistere delle relazioni

$$N_{\frac{A}{k}}(x \cdot y) = N_{\frac{A}{k}} x \cdot N_{\frac{A}{k}} y, \qquad T_{\frac{A}{k}}(x + y) = T_{\frac{A}{k}} x + T_{\frac{A}{k}} y$$

per elementi qualunque x, y di A.

60. *Se l'elemento x di A genera un sottocorpo (k, x) di A definito da*

$$x^m - c_1 \cdot x^{m-1} + \dots + (-1)^m c_m = 0, \quad (c_i \in k)$$

si ha, designando con h il rango di A quale (k, x)-modulo,

$$N_{\frac{A}{k}} x = c_m^h, \quad T_{\frac{A}{k}} x = h \cdot c_1 .$$

DIMOSTRAZIONE. - Sia $A = \sum_{i=1}^{h} (k, x) \cdot z_i$ cosicché gli elementi $z_i \cdot x^j$ con $i = 1, 2, \dots, h$, $j = 0, 1, 2, \dots, m-1$ costituiscono una k-base indipendente di A. Moltiplicando questi elementi per x si ottengono le equazioni

$$\begin{aligned}
x \cdot z_i \qquad &= 0 \cdot z_i + 1 \cdot z_i \cdot x + 0 \cdot z_i \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot z_i \cdot x^{m-1} \\
x \cdot z_i \cdot x \quad &= 0 \cdot z_i + 0 \cdot z_i \cdot x + 1 \cdot z_i \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot z_i \cdot x^{m-1} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x \cdot z_i \cdot x^{m-1} &= (-1)^{m-1} c_m \cdot z_i + \dots\dots\dots + c_1 \; z_i \cdot x^{m-1}
\end{aligned}$$

dalle quali seguono subito le formule suddette.

61. *Se il corpo K_0 è intermedio fra k ed il corpo K algebrico e 0-dimensionale sopra k, per ogni elemento x di K valgono le relazioni*

$$N_{\frac{K}{k}} x = N_{\frac{K_0}{k}}(N_{\frac{K}{K_0}} x), \qquad T_{\frac{K}{k}} x = T_{\frac{K_0}{k}}(T_{\frac{K}{K_0}} x).$$

Dimostrazione. - I. Le formule

$$N_{\frac{K}{k}}x = c_m^p, \left(p = \text{grado}\ \frac{K}{(k,\, x)}\right), \qquad N_{\frac{(K_0,\, x)}{k}}x = c_m^q, \left(q = \text{grado}\ \frac{(K_0,\, x)}{(k,\, x)}\right)$$

risultanti dall'applicazione del teorema precedente ai casi $A = K$ e $A = (K_0, x)$ dànno

$$N_{\frac{K}{k}}x = (N_{\frac{(K_0,\, x)}{k}}x)^r \text{ e similmente } T_{\frac{K}{k}}x = r \cdot T_{\frac{(K_0,\, x)}{k}}x$$

con $r = \text{grado}\ \dfrac{K}{(K_0,\, x)}$.

II. Sia $x^n - C_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + (-1)^n C_n = 0$, $(C_i \in K_0)$ irriducibile sopra K_0, cosicché (ved. 60)

$$N_{\frac{(K_0,\, x)}{K_0}}x = C_n, \qquad T_{\frac{(K_0,\, x)}{K_0}}x = C_1.$$

Mediante una k-base indipendente $v_1, v_2, \ldots, v_h$ di K_0 si formi la k-base $v_i \cdot x^j$ $(i = 1\ 2, \ldots, h,\ j = 1, 2, \ldots, n-1)$ di (K_0, x). Ponendo

$$C_1 \cdot v_i = \sum_j a_{ij} \cdot v_j, \qquad C_n \cdot v_i = \sum_j b_{ij} \cdot v_j, \qquad (a_{ij}, b_{ij} \in k)$$

si trova

$$\begin{aligned} x \cdot v_i \cdot x^{n-1} &= \sum_j a_{ij} \cdot v_j \cdot x^{n-1} + (-1)^{n-1} \sum_j b_{ij} \cdot v_j + \ldots \\ x \cdot v_i \quad &= 1 \cdot v_i \cdot x \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x \cdot v_i \cdot x^{n-2} &= 1 \cdot v_i \cdot x^{n-1} \end{aligned}$$

donde si ottiene

$$(*) \qquad N_{\frac{(K_0,\, x)}{k}}x = |\, b_{ij}\, | = N_{\frac{K_0}{k}}(C_n) = N_{\frac{K_0}{k}}(N_{\frac{(K_0,\, x)}{K_0}}x)$$

$$T_{\frac{(K_0,\, x)}{k}}x = \Sigma\, a_{ii} = T_{\frac{K_0}{k}}(C_1) = T_{\frac{K_0}{k}}(T_{\frac{(K_0,\, x)}{K_0}}x).$$

Valendosi delle formule ottenute in I e di quelle che se ne deducono dalla sostituzione di K_0 a k, si riconosce, che basta elevare alla r-esima potenza i membri dell'equazione (*) per dimostrare la prima delle relazioni asserite. In modo analogo si constata la seconda di quelle relazioni.

62. *Se K è algebrico, 0-dimensionale e separabile sopra k e se K^* designa il corpo galoisiano determinato da K sopra k (secondo il teorema* **47**), *il* *gruppo* $\frac{K^*}{K}$ *ha l'indice* $n =$ *grado* $\frac{K}{k}$ *sotto* $\frac{K^*}{k}$ e, ponendo

$$\frac{K^*}{k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{K^*}{K} \sigma_i,$$

sussistono per ogni $x \in K$ *le relazioni* $N_{\frac{K}{k}} x = \prod_{i=1}^{n} x^{\sigma_i}$, $T_{\frac{K}{k}} x = \sum_{i=1}^{n} x^{\sigma_i}$.

DIMOSTRAZIONE. - Dal teorema 22 segue che K^* è separabile sopra k. Dunque (ved. 52) ordine $\frac{K^*}{k} =$ grado $\frac{K^*}{k}$, ordine $\frac{K^*}{K} =$ grado $\frac{K^*}{K}$, il che mostra $n =$ grado $\frac{K}{k}$.

Sia $f(x) = 0$ con $f(X) = X^m - c_1 \cdot X^{m-1} + \dots + (-1)^m c_m$ irriducibile in $k[X]$. Allora (ved. 60)

$$(*) \qquad N_{\frac{K}{k}} x = c_m^h, \; T_{\frac{K}{k}} x = h \cdot c_1 \text{ con } h = \text{grado } \frac{K}{(k, x)}.$$

Siccome gli elementi $x^{\sigma_1}, x^{\sigma_2}, \dots, x^{\sigma_n}$ subiscono, nell'applicare un automorfismo $\tau \in \frac{K^*}{k}$, semplicemente una permutazione, i coefficienti del polinomio $g(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - x^{\sigma_i})$ sono invarianti rispetto al gruppo $\frac{K^*}{k}$ e pertanto (ved. 53) elementi di k. Essendo $f(X)$ irriducibile in $k[X]$ e $f(x^{\sigma_i}) = 0$ per $i = 1, 2, \dots, n$, questo $f(X)$ è il solo divisore irriducibile di $g(X)$ in $k[X]$, cioè $g(X) = f(X)^h$ con $h = n : m =$ grado $\frac{K}{(k, x)}$.

Dal confronto dell'espressione $g(X) = X^n - (\sum_i x^{\sigma_i}) \cdot X^{n-1} + \dots + (-1)^n \prod x^{\sigma_i}$ con $g(X) = f(X)^h = X^n - h \cdot c_1 \cdot X^{n-1} + \dots + (-1)^n c_m^h$ si ottengono, tenuto conto di (*), subito le relazioni asserite nel teorema.

CAPITOLO III

PROSPETTIVE DI UN OGGETTO

§ 1. Le nozioni fondamentali.

63. Osservando che un corpo nella sua totalità non ammette che due tipi di omomorfismi, gli isomorfismi e le riduzioni di tutti i suoi elementi a zero, si è condotti a riprodurre matematicamente la situazione generale, che nella realtà gli oggetti si osservano prospettivamente, cioè per mezzo degli aspetti che essi presentano nelle diverse loro prospettive. Si arriva così a un

62 — 63