alle regole

$$(u+v)_{x_\nu} = u_{x_\nu} + v_{x_\nu}, \qquad (u \cdot v)_{x_\nu} = u \cdot v_{x_\nu} + v \cdot u_{x_\nu},$$
$$\delta(u+v) = \delta u + \delta v, \qquad \delta(u \cdot v) = u \cdot \delta v + v \cdot \delta u,$$

se si tiene conto delle equazioni differenziali di k, è chiaro ormai che con le espressioni $d\left(\frac{f}{g}\right)$ calcolate dalle equazioni (4) sono soddisfatte le regole di differenziazione in K.

C. d. d. (Ved. 13)

18. *Le equazioni differenziali relative di K quale sopracorpo di k definito dalle relazioni $f_i = 0$ si ottengono aggiungendo alle equazioni*

$$(5) \qquad \frac{d}{k} f_i = 0 \quad \textit{cioè} \quad \sum_{\nu=1}^{m} (f_i)_{x_\nu} \cdot \frac{d}{k} x_\nu = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, h)$$

le relazioni

$$\frac{d}{k}\left(\frac{f}{g}\right) - \sum_{\nu=1}^{m} \left(\frac{f}{g}\right)_{x_\nu} \cdot \frac{d}{k} x_\nu = 0$$

equivalenti al fatto che

$$K \cdot \frac{d}{k} K = K \cdot \frac{d}{k} x_1 + K \cdot \frac{d}{k} x_2 + \ldots + K \cdot \frac{d}{k} x_m .$$

Ciò segue immediatamente dall' enunciato precedente.

Se nelle nostre applicazioni di questo teorema, citando le equazioni differenziali relative di un corpo K, scriviamo solamente le relazioni (5), vogliamo esprimere con ciò che queste relazioni costituiscono un sistema base per le equazioni differenziali relative nel senso esposto in **14**, prendendo

$$\frac{d}{k} x_1, \ \frac{d}{k} x_2, \ \ldots, \ \frac{d}{k} x_m$$

come base del K-modulo $K \cdot \frac{d}{k} K$.

§ 2. Separabilità e inseparabilità relative.

19. La *inseparabilità sopra k* di un corpo K algebrico sopra k è definita come la differenza

$$\text{rango}\, K \cdot \frac{d}{k} K - \dim \frac{K}{k}$$

fra il rango del K-modulo $K \cdot \frac{d}{k} K$ (che chiameremo talvolta semplicemente il *rango di* K *sopra* k) e la *dimensione di* K *sopra* k (cioè il numero massimo di elementi di K algebricamente indipendenti sopra k). Dal teorema seguente risulterà subito che questa differenza non è mai negativa.

20. *Per ogni corpo* K_0 *intermedio fra* K *e* k *vale la disuguaglianza*

$$\textit{inseparabilità}\,\frac{K_0}{k} \leq \textit{inseparabilità}\,\frac{K}{k}.$$

DIMOSTRAZIONE. – Ammettiamo senza dimostrazione il fatto (del resto facile a dimostrarsi) che il corpo K_0 è algebrico sopra k come K.

I. Consideriamo dapprima il caso in cui $K = (K_0,\, x)$.

Se x è algebricamente indipendente sopra K_0, le equazioni differenziali di K sono costituite solamente dalle equazioni differenziali di K_0 e da quelle equivalenti al fatto che $K \cdot dK = K \cdot dx + K \cdot dK_0$. Ne risulta $K \cdot \frac{d}{k} K = K \cdot \frac{d}{k} x + K \cdot \frac{d}{k} K_0$ (con $\frac{d}{k} x$ linearmente indipendente da tutti i differenziali relativi di elementi di K_0) e rango $K \cdot \frac{d}{k} K_0 =$ rango $K_0 \cdot \frac{d_0}{k} K_0$ designando con d_0 la differenziazione in K_0. Da ciò segue rango $\frac{K}{k} =$ rango $\frac{K_0}{k} + 1$, il che mostra insieme con $\dim \frac{K}{k} = \dim \frac{K_0}{k} + 1$ la coincidenza delle inseparabilità di K sopra k e di K_0 sopra k.

Se invece $\dim \frac{K}{K_0} = 0$, il corpo K può essere definito sopra K_0 mediante una sola equazione $f(x) = 0$, così che le equazioni differenziali relative di K rispetto a k sono costituite in questo caso oltre che dalle equazioni differenziali relative di K_0 e dalle equazioni esprimenti che $K \cdot \frac{d}{k} K = K \cdot \frac{d}{k} x + K \cdot \frac{d}{k} K_0$ dalla sola equazione

$$f_x \cdot \frac{d}{k} x + \ldots = 0$$

dove i punti sostituiscono una combinazione lineare di differenziali relativi di elementi di K_0. Il rango $K \cdot \frac{d}{k} K_0$ è dunque maggiore di 1 o uguale al rango $K_0 \cdot \frac{d}{k} K_0$ secondo che l'equazione suddetta sia soddisfatta identicamente o no, il che dimostra il teorema anche per il caso $\dim \frac{K}{K_0} = 0$.

II. Ci riferiamo ora al caso generale in cui $K = (K_0,\, x_1,\, x_2, \ldots,\, x_m)$. Denotando con K_i i corpi $K_i = (K_0,\, x_1, \ldots,\, x_i)$ e con d_i la differenziazione in questi corpi (il quale simbolo non si deve confondere col d_i usato nella definizione delle corrispondenze infinitesimali o differenziali), possiamo scrivere, per quanto abbiamo dimostrato nella parte I, le disuguaglianze

$$\operatorname{rango} K_{i+1} \cdot \frac{d_{i+1}}{k} K_{i+1} - \dim \frac{K_{i+1}}{k} \geq \operatorname{rango} K_i \cdot \frac{d_i}{k} K_i - \dim \frac{K_i}{k},$$

essendo, come presuppone il caso I, $K_{i+1} = (K_i, x_{i+1})$. Dall'addizione di queste disuguaglianze risulta

$$\operatorname{rango} K_m \cdot \frac{d_m}{k} K_m - \dim \frac{K_m}{k} \geq \operatorname{rango} K_0 \cdot \frac{d_0}{k} K_0 - \dim \frac{K_0}{k},$$

c. d. d.

Prendendo $K_0 = k$ si constata che *la inseparabilità* $\frac{K}{k}$ *è sempre non-negativa.*

21. DEFINIZIONE. - K è detto *separabile sopra* k quando la inseparabilità $\frac{K}{k}$ è zero, altrimenti esso è chiamato *inseparabile sopra* k.

Se K è separabile sopra K_0 e se K_0 è separabile sopra k, anche K è separabile sopra k.

DIMOSTRAZIONE. - Essendo K separabile sopra K_0 abbiamo

$$K \cdot \frac{d}{k} K = K \cdot \frac{d}{k} x_1 + \dots + K \cdot \frac{d}{k} x_m + K \cdot \frac{d}{k} K_0 \quad \text{con} \quad m = \dim \frac{K}{K_0}$$

e per analoga ragione

$$K_0 \cdot \frac{d_0}{k} K_0 = K_0 \cdot \frac{d_0}{k} y_1 + \dots + K_0 \cdot \frac{d_0}{k} y_n \quad \text{con} \quad n = \dim \frac{K_0}{k}.$$

Ora, siccome evidentemente ogni equazione differenziale relativa di K_0 vale anche entro il corpo K, avremo

$$K \cdot \frac{d}{k} K_0 = K \cdot \frac{d}{k} y_1 + \dots + K \cdot \frac{d}{k} y_n$$

e pertanto

$$K \cdot \frac{d}{k} K = K \cdot \frac{d}{k} x_1 + \dots + K \cdot \frac{d}{k} x_m + K \cdot \frac{d}{k} y_1 + \dots + K \cdot \frac{d}{k} y_n$$

che mostra rango $K \cdot \frac{d}{k} K \leq m + n = \dim \frac{K}{k}$ e con ciò la separabilità di K sopra k, c. d. d.

22. *Se un corpo $K = (K_1, K_2)$ può essere generato mediante i suoi sottocorpi K_1, K_2 supposti algebrici e separabili sopra k, e se vale*

$$\dim \frac{K}{k} = \dim \frac{K_1}{k} + \dim \frac{K_2}{k},$$

anch'esso è separabile sopra k.

Da

$$K_1 \cdot \frac{d_1}{k} K_1 = \sum_{i=1}^{m} K_1 \cdot \frac{d_1}{k} x_i \qquad \text{con} \qquad m = \dim \frac{K_1}{k}$$

$$K_2 \cdot \frac{d_2}{k} K_2 = \sum_{j=1}^{n} K_2 \cdot \frac{d_2}{k} y_j \qquad \text{con} \qquad n = \dim \frac{K_2}{k}$$

segue infatti

$$K \cdot \frac{d}{k} K = \sum_i K \cdot \frac{d}{k} x_i + \sum_j K \cdot \frac{d}{k} y_j$$

e pertanto la separabilità di K sopra k, essendo $m + n$ la dimensione di K sopra k.

23. *Un corpo K del tipo (k, x) è inseparabile sopra k allora e soltanto allora che esso sia definito sopra k mediante un'equazione*

$$f(x) = 0 \qquad con \qquad f_x(x) = 0$$

senza che il polinomio $f(X)$ si annulli identicamente.

Infatti si ha

$$K \cdot \frac{d}{k} K = K \cdot \frac{d}{k} x, \qquad f_x(x) \cdot \frac{d}{k} x = 0$$

e tutte le equazioni differenziali relative sono conseguenze di queste relazioni.

24 *Se un elemento x di un corpo $K \supset k$ soddisfa ad un'equazione del tipo*

$$x^{p^\lambda} - a = 0 \qquad (a \in k),$$

$p \neq 0$ essendo la caratteristica di k, il corpo (k, x) è inseparabile sopra k purchè x non sia elemento di k.

Ciò risulta dal teorema precedente e dal fatto che un tale polinomio $X^{p^\lambda} - a$, *se è riducibile, non può essere che una potenza* $(X^{p^\mu} - b)^{p^{\lambda-\mu}}$, $(b \in k)$, *di un polinomio dello stesso tipo.*

25. DEFINIZIONE. - Un corpo K algebrico sopra $k \neq K$ è detto ***puramente inseparabile sopra k*** allora e soltanto allora che ogni elemento x di K soddisfa a un'equazione del tipo $x^{p^\lambda} - a = 0$ con $a \in k$, essendo $p \neq 0$ la caratteristica del corpo. Il fatto che veramente in tale caso K sia anche semplicemente inseparabile risulta da ciò che in K esiste almeno un elemento x, tale che il corpo (k, x) è $\neq k$ e pertanto (ved. 24) inseparabile sopra k, mentre se K fosse separabile sopra k, anche (k, x) dovrebbe essere separabile sopra k (teorema 20).

26. *In un corpo K algebrico e 0-dimensionale sopra k esiste sempre un massimo corpo intermedio separabile K_0, su cui K, se non è uguale a K_0, è puramente inseparabile.*

Dal teorema 22 segue infatti che la totalità dei sotto-corpi di K separabili sopra k genera un massimo corpo K_0 separabile sopra k. Se, nel caso $K_0 \neq K$, il corpo K non fosse puramente inseparabile sopra K_0 allora potrebbe facilmente trovarsi un elemento $x \subset\!| \; K_0$ tale che (K_0, x) fosse separabile sopra K_0 e dunque (ved. 21) separabile anche sopra k.

§ 3. **Dipendenza lineare di differenziali e dipendenza algebrica di elementi.**

Il noto legame fra la dipendenza analitica di funzioni e la dipendenza lineare dei loro differenziali totali ritrovasi pure partendo dal nostro punto di vista algebrico.

27. *Se in un corpo algebrico e separabile su k sono linearmente indipendenti i differenziali relativi $\frac{d}{k}x_1, \frac{d}{k}x_2, \dots, \frac{d}{k}x_m$ $(x_i \in K)$, allora sono algebricamente indipendenti sopra k gli elementi $x_1, x_2, \dots, x_m$.*

DIMOSTRAZIONE. - Essendo il corpo $(k, x_1, \dots, x_m) = K_0$ separabile sopra k (teorema 20) avremo $\dim \frac{K_0}{k} = \text{rango } K_0 \cdot \frac{d_0}{k} K_0$, da cui, tenuto conto che $m \geq \text{rango } K_0 \cdot \frac{d_0}{k} K_0 \geq \text{rango } K \cdot \frac{d}{k} K_0 = m$, segue $\dim \frac{K_0}{k} = m$, c. d. d.

28. *Se in un corpo K algebrico, separabile e n-dimensionale sopra k sono linearmente indipendenti i differenziali relativi $\frac{d}{k}x_1, \frac{d}{k}x_2, \dots, \frac{d}{k}x_n$, esso è separabile e 0-dimensionale su $(k, x_1, x_2, \dots, x_n)$.*

DIMOSTRAZIONE. - Si osservi dapprima che $(k, x_1, \dots, x_n) = K_0$ è n-dimensionale su k (ved. 27). Designando y un elemento qualunque di K, il corpo $(k, x_1, \dots, x_n, y) = K_1$ è separabile sopra k (teorema 20). Se dunque $f(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ definisce K_1 sopra K_0, nella relazione

$$f_y \cdot \frac{d_1}{k} y + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i} \cdot \frac{d_1}{k} x_i = 0,$$

che definisce il modulo

$$K_1 \cdot \frac{d_1}{k} K_1 = K_1 \cdot \frac{d_1}{k} y + \sum_{i=1}^{n} K_1 \cdot \frac{d_1}{k} x_i,$$

non possono essere zero tutte le $n+1$ derivate parziali. Se fosse $f_y = 0$, si otterrebbe da quella relazione una dipendenza lineare fra i differenziali $\frac{d_1}{k} x_i$ che varrebbe anche per i $\frac{d}{k} x$. Ne segue $f_y \neq 0$, il che esprime la separabilità di $(k, x_1, \dots, x_n, y)$ sopra K_0. Dal teorema 22 risulta che K, potendo