In questo caso vale anche l'equazione differenziale

$$dx - 1 \cdot dx = 0 \qquad \text{(per } x \text{ qualunque di } A\text{)}.$$

Avremo spesso occasione di applicare l'osservazione seguente

Se in un anello qualsiasi A il simbolo $f(x_1, \ldots, x_m)$ designa un'espressione

$$\sum_{i_1, \ldots, i_m} a_{i_1 \ldots i_m} \cdot x_1^{i_1} \ldots x_m^{i_m} \qquad (\text{con } a_{i_1 \ldots i_m} \in A) \tag{5}$$

e se f_{x_ν} denotono le « *derivate parziali* »

$$f_{x_\nu} = \sum_{i_1, \ldots, i_m} i_\nu a_{i_1 \ldots i_m} \cdot x_1^{i_1} \ldots x_\nu^{i_\nu - 1} \ldots x_m^{i_m}$$

mentre δf significa la « *variazione* » di f

$$\delta f = \sum_{i_1, \ldots, i_m} (da_{i_1 \ldots i_m}) \cdot x_1^{i_1} \ldots x_m^{i_m},$$

si ha l'equazione differenziale

$$df - \sum_\nu f_{x_\nu} \cdot dx_\nu - \delta f = 0.$$

Notiamo ancora che, se f, g sono polinomi come (5), e se esiste in A il quoziente

$$\frac{f(x_1, \ldots, x_m)}{g(x_1, \ldots, x_m)}$$

(il che presuppone che g non sia zero o divisore dello zero in A) avremo l'equazione differenziale

$$d\left(\frac{f}{g}\right) - \sum_\nu \left(\frac{f}{g}\right)_{x_\nu} \cdot dx_\nu - \delta\left(\frac{f}{g}\right) = 0$$

con

$$\left(\frac{f}{g}\right)_{x_\nu} = \frac{g \cdot f_{x_\nu} - f \cdot g_{x_\nu}}{g^2}, \quad \delta\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot \delta f - f \cdot \delta g}{g^2}.$$

§ 3. Differenti relativi.

14. Se A_0 è sottoanello di un anello A, definiamo la *differenziazione relativa* $\frac{d}{A_0}$ *di* A *rispetto ad* A_0 aggiungendo semplicemente alle equazioni differenziali (assolute) di A le equazioni

$$dx_0 = 0 \qquad (\text{per ogni } x_0 \in A_0).$$

Sotto l'ipotesi che l'A-modulo

$$A \cdot \frac{d}{A_0} A$$

delle forme pfaffiane

$$\Sigma x \cdot \frac{d}{A_0} y \qquad (x,\ y \in A)$$

abbia una base finita:

$$A \cdot \frac{d}{A_0} A = A \cdot \omega_1 + A \cdot \omega_2 + \dots + A \cdot \omega_m ;$$

e che A possegga un elemento 1 si può definire una serie di ideali

$$\mathfrak{d}_0\left(\frac{A}{A_0}\right) \subset \mathfrak{d}_1\left(\frac{A}{A_0}\right) \subset \mathfrak{d}_2\left(\frac{A}{A_0}\right) \subset \dots , \tag{1}$$

che si chiamano i *differenti di A rispetto ad A_0*.

Il *differente di ordine n*

$$\mathfrak{d}_n\left(\frac{A}{A_0}\right)$$

è definito per $n < m$ quale ideale generato in A da tutti i determinanti

$$\begin{vmatrix} a_{i_1}^{(1)} & a_{i_2}^{(1)} & \dots & a_{i_{m-n}}^{(1)} \\ a_{i_1}^{(2)} & a_{i_2}^{(2)} & \dots & a_{i_{m-n}}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_1}^{(m-n)} & a_{i_2}^{(m-n)} & \dots & a_{i_{m-n}}^{(m-n)} \end{vmatrix} , \tag{2}$$

che possono formarsi colle matrici $(a_i^{(k)})$ di tutti i sistemi

$$\begin{aligned} a_1^{(1)} \cdot \omega_1 + \quad \dots \quad + a_m^{(1)} \cdot \omega_m &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots& \\ a_1^{(m-n)} \cdot \omega_1 + \dots + a_m^{(m-n)} \cdot \omega_m &= 0 \end{aligned}$$

di $m - n$ equazioni differenziali relative di A. Per $n \geq m$ si definisce

$$\mathfrak{d}_n\left(\frac{A}{A_0}\right) = A.$$

Dal teorema di LAPLACE segue che tutti questi determinanti sono combinazioni lineari (mediante fattori appartenenti ad A) di determinanti $(m - n - 1)$-pli che servono alla formazione di $\mathfrak{d}_{n+1}\left(\frac{A}{A_0}\right)$, donde si deduce il fatto già indicato in (1)

$$\mathfrak{d}_n\left(\frac{A}{A_0}\right) \subset \mathfrak{d}_{n+1}\left(\frac{A}{A_0}\right).$$

TEOREMA di FITTING. – *La definizione dei differenti* $\mathfrak{d}_n\left(\frac{A}{A_0}\right)$ *è indipendente dalla scelta della base* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ *di* $A \cdot \frac{d}{A_0} A$.

DIMOSTRAZIONE. – I. Se un sistema Σ di equazioni differenziali relative di A è tale che ogni equazione differenziale relativa del tipo

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \cdot \omega_i = 0$$

si deriva da equazioni

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^{(k)} \cdot \omega_i = 0$$

appartenenti al sistema Σ nel modo seguente

$$a_i = \sum_k c_k \cdot a_i^{(k)} \qquad (c_k \in A,\ i = 1, 2, \ldots, m)$$

diremo (e solamente in questo caso) che Σ è *sistema base per le equazioni differenziali relative.*

Ora è chiaro che basta, per generare l'ideale $\mathfrak{d}_n\left(\frac{A}{A_0}\right)$, costruire tutti i determinanti (2) che si ottengono partendo solamente da equazioni differenziali prese da un sistema base.

II. Se ω è un elemento qualunque di $A \cdot \frac{d}{A_0} A$, anche

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m, \omega \tag{3}$$

è base di quel modulo. Prendendo un sistema base qualsiasi per le equazioni differenziali relative di A scritte con $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ insieme con l'equazione

$$a_1 \cdot \omega_1 + \ldots + a_m \cdot \omega_m + \omega = 0, \tag{4}$$

che si deriva dal fatto che ω può esprimersi mediante le forme ω_i, otteniamo un sistema base per le equazioni differenziali relative di A scritte con la nuova base del modulo $A \cdot \frac{d}{A_0} A$. Difatti ogni equazione differenziale relativa del tipo

$$b_1 \cdot \omega_1 + \ldots + b_m \cdot \omega_m + b \cdot \omega = 0$$

si può scrivere quale b–upla della (4) più una equazione differenziale in cui non entrano che le forme $\omega_1, \ldots, \omega_m$.

Non conoscendo ancora la indipendenza dei differenti scriviamo $\mathfrak{d}_n'\left(\frac{A}{A_0}\right)$ per il differente calcolato mediante la base (3). Per ottenerlo dobbiamo formare tutti i determinanti di ordine $(m+1)$-n analoghi a quelli (2).

Ora, se nella loro formazione non interviene l'equazione (4), nascono solamente determinanti appartenenti all'ideale $\mathfrak{d}_{n-1}\left(\frac{A}{A_0}\right) \subset \mathfrak{d}_n\left(\frac{A}{A_0}\right)$.

Altrimenti essi sono della forma

$$(5) \qquad \left|\begin{array}{cccc|c} a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_{m-n}} & 1 \\ \hline a_{i_1}^{(1)} & a_{i_2}^{(1)} & \dots & a_{i_{m-n}}^{(1)} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{i_1}^{(m-n)} & a_{i_2}^{(m-n)} & \dots & a_{i_{m-n}}^{(m-n)} & 0 \end{array}\right|$$

dove la parte segnata da linee interviene già nella formazione di $\mathfrak{d}_n\left(\frac{A}{A_0}\right)$.

È chiaro pertanto che tutti i determinanti che servono alla generazione di $\mathfrak{d}_n'\left(\frac{A}{A_0}\right)$ trovansi già nell'ideale $\mathfrak{d}_n\left(\frac{A}{A_0}\right)$, e ciò mostra che

$$\mathfrak{d}_n'\left(\frac{A}{A_0}\right) \subset \mathfrak{d}_n\left(\frac{A}{A_0}\right).$$

Ma, siccome si può scegliere (5) tale che esso sia un qualsiasi determinante generante $\mathfrak{d}_n\left(\frac{A}{A_0}\right)$, vale anche la: $\mathfrak{d}_n\left(\frac{A}{A_0}\right) \subset \mathfrak{d}_n'\left(\frac{A}{A_0}\right)$.

Questo fatto

$$\mathfrak{d}_n\left(\frac{A}{A_0}\right) = \mathfrak{d}_n'\left(\frac{A}{A_0}\right)$$

è evidentemente vero anche per $n \geq m$.

III. Supponiamo ora che

$$\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \dots, \tilde{\omega}_q$$

sia una base qualunque del modulo $A \cdot \frac{d}{A_0} A$. Designamo con

$$\mathfrak{d}_n\left(\frac{A}{A_0}\right), \quad \mathfrak{d}_n'\left(\frac{A}{A_0}\right), \quad \mathfrak{d}_n''\left(\frac{A}{A_0}\right)$$

i differenti di ordine n calcolati rispettivamente con le basi

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$$
$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m, \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \dots, \tilde{\omega}_q$$
$$\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \dots, \tilde{\omega}_q$$

del modulo $A \cdot \frac{d}{A_0} A$. L'applicazione successiva di quel che abbiamo dimostrato in II. mostra

$$\text{tanto} \quad \mathfrak{d}_n\left(\frac{A}{A_0}\right) = \mathfrak{d}_n'\left(\frac{A}{A_0}\right) \qquad \text{quanto} \quad \mathfrak{d}_n''\left(\frac{A}{A_0}\right) = \mathfrak{d}_n'\left(\frac{A}{A_0}\right)$$

e perciò

$$\mathfrak{d}_n\left(\frac{A}{A_0}\right) = \mathfrak{d}_n''\left(\frac{A}{A_0}\right)$$

c. d. d.

15. *Sotto l'ipotesi che $A_0 \subset A$, $\bar{A}_0 \subset \bar{A}$, siano sottoanelli di un medesimo anello R tali che ogni elemento di $\bar{A}_0$, $\bar{A}$ possa rappresentarsi nella forma $\frac{x}{y}$ con x, $y \in A_0$, risp. con x, $y \in A$, in cui $y \neq 0$ non è divisore dello zero in R, vale*

$$\mathfrak{d}_n\left(\frac{\bar{A}}{\bar{A}_0}\right) = \mathfrak{d}_n\left(\frac{A}{A_0}\right) \cdot \bar{A} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$\left(\text{cioè l'ideale } \mathfrak{d}_n\left(\frac{\bar{A}}{\bar{A}_0}\right) \text{ può essere generato dall'ideale } \mathfrak{d}_n\left(\frac{A}{A_0}\right)\right)$.

DIMOSTRAZIONE. - I. Abbiamo già osservato in 13 che vale l'equazione differenziale

$$d\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{y \cdot dx - x \cdot dy}{y^2} = 0 \tag{6}$$

per ogni quoziente $\frac{x}{y}$ del tipo suddetto.

Dimostriamo ora che si ottengono le equazioni differenziali di $\bar{A}$ scrivendo le equazioni (6), limitandosi però per ciascun elemento $\frac{x}{y}$ di $\bar{A}$ ad una sola rappresentazione $\frac{x}{y}$, ed aggiungendo le equazioni differenziali di A.

Infatti queste ultime equazioni garantiscono che l'equazione

$$d\left(\frac{x'}{y'}\right) - \frac{y' \cdot dx' - x' \cdot dy'}{y'^2} = 0$$

derivata da un'altra espressione $\frac{x'}{y'} = \frac{x}{y}$ dello stesso elemento $\frac{x}{y}$ dia per $d\left(\frac{x}{y}\right)$ il medesimo risultato di (6). Basta, per vederlo, effettuare il calcolo seguente, unicamente fondato sulle equazione differenziali di A

$$x \cdot y' = x' \cdot y, \qquad x \cdot dy' - y \cdot dx' = x' \cdot dy - y' \cdot dx.$$

$$\frac{yy'}{(yy')^2} \cdot (x \cdot dy' - y \cdot dx') = \frac{yy'}{(yy')^2} \cdot (x' \cdot dy - y' \cdot dx)$$

e pertanto, essendo $x \cdot y' = x' \cdot y$,

$$\frac{y' \cdot dx' - x' \cdot dy}{y'^2} = \frac{y \cdot dx - x \cdot dy}{y^2}.$$

Un simile calcolo mostra allora che le regole di differenziazione in $\bar{A}$ sono conseguenze delle sole equazioni differenziali di A, purchè si prendano per i $d\left(\frac{x}{y}\right)$ le espressioni date dalla (6).

II. Poichè le equazioni differenziali di $\bar{A}$ sono costituite, oltre che da quelle esprimenti che $\bar{A} \cdot d\bar{A} = \bar{A} \cdot dA$ (cioè che i differenziali degli elementi di A formano base del modulo $\bar{A} \cdot dA$), solamente dalle equazioni differenziali di A, e poichè d'altra parte le equazioni $d\bar{A}_0 = 0$, che caratterizzano il passaggio dalla differenziazione assoluta di $\bar{A}$ a quella relativa rispetto ad $\bar{A}_0$, seguono già stabilendo solamente che $dA_0 = 0$, è chiaro che si ottiene una base per le equazioni differenziali caratterizzanti il modulo $\bar{A} \cdot \frac{d}{\bar{A}_0} \bar{A}$ scrivendo semplicemente le equazioni differenziali caratterizzanti il modulo $A \cdot \frac{d}{A_0} A$, cambiandovi però il segno $\frac{d}{A_0}$ con $\frac{d}{\bar{A}_0}$.

Ora tale base di equazioni serve a calcolare sia una base dell'ideale $\mathfrak{d}_n\left(\frac{\bar{A}}{\bar{A}_0}\right)$ che una base dell'ideale $\mathfrak{d}_n\left(\frac{A}{A_0}\right)$. C. d. d.

CAPITOLO II

CORPI ALGEBRICI

§ 1. Le equazioni differenziali dei corpi algebrici.

16. Contrariamente all'uso consueto, adopero il termine « *algebrico* » nel significato seguente: chiamo algebrico ogni oggetto dell'algebra (anello, corpo, corpo relativo, gruppo, modulo, ecc.), che può essere generato da un numero finito di elementi mediante le operazioni che servono alla sua definizione.

Dunque un corpo K è detto algebrico (o meglio *aritmetico*) allora e soltanto allora che ogni elemento di K può essere ottenuto da certi elementi