§ 2. **Equazioni differenziali di un anello.**

13. La corrispondenza differenziale di un anello A

$$[A,\ d_1A,\ d_2A,\ d_3A,\ \ldots]$$

è definita come sopra-anello di A dalle equazioni seguenti:

$$\left.\begin{array}{lll} (1) & d_i(x+y) - d_ix - d_iy & = 0 \\ (2) & d_i(x\cdot y) - x\cdot d_iy - y\cdot d_ix = 0 & \\ (3) & d_ix\cdot d_iy & = 0 \\ (4) & d_ix\cdot d_jy + d_iy\cdot d_jx & = 0 \end{array}\right\} \quad (x,\ y \text{ essendo elementi qualunque di } A)$$

Un' equazione pfaffiana

$$\Sigma\, nda + \Sigma\, e\cdot df = 0 \qquad (a,\ e,\ f \in A;\ n \text{ numeri interi})$$

che, dopo avere aggiunto un qualsiasi indice i al segno d, diviene una conseguenza delle regole di differenziazione, cioè delle equazioni (1), (2), è chiamata *un' equazione differenziale di A*, riservando questa espressione al caso suddetto. Osserviamo, per essere precisi, che con «*equazione conseguenza delle equazioni* (1), (2)» si intende ogni equazione il cui membro sinistro si deduce dai membri sinistri delle equazioni (1), (2) mediante le operazioni ideali (ved. 4).

Poichè la corrispondenza differenziale di A differisce dalla corrispondenza semplicemente infinitesimale di A soltanto per le equazioni (4), è chiaro che si otterrebbe lo stesso concetto di equazione differenziale di A partendo dalla corrispondenza infinitesimale di A.

Con l'espressione «*le equazioni differenziali di A*» intendiamo sempre un sistema di equazioni differenziali di A tale che ne conseguano le regole di differenziazione (mediante le operazioni ideali). Per es. le regole di differenziazione stesse sono le equazioni differenziali di A. Propriamente non è corretto dire *le* equazioni differenziali di A, perchè esse non sono determinate univocamente dalla definizione data. Ma, poichè nella meccanica e nell'analisi si usa il termine «le equazioni differenziali» nello stesso senso impreciso senza rischio di esser malintesi, mi pare lecito e opportuno usarlo nel medesimo senso in questo caso, che del resto comprende il caso dell'analisi.

Per dare un esempio di un'equazione differenziale che vale in ogni anello A avente un elemento 1, scriviamo l'equazione

$$d1 = 0$$

che si dimostra coi seguenti calcoli:

$$d1 = d(1\cdot 1) = 1\cdot d1 + 1\cdot d1 = 2\cdot d1, \qquad d(1^2\cdot 1) = 1^2\cdot d1 + 1\cdot d1^2 = 3\cdot d1.$$

In questo caso vale anche l'equazione differenziale

$$dx - 1 \cdot dx = 0 \qquad \text{(per } x \text{ qualunque di } A\text{)}.$$

Avremo spesso occasione di applicare l'osservazione seguente

Se in un anello qualsiasi A il simbolo $f(x_1, \dots, x_m)$ designa un'espressione

$$\sum_{i_1, \dots, i_m} a_{i_1 \dots i_m} \cdot x_1^{i_1} \dots x_m^{i_m} \qquad (\text{con } a_{i_1 \dots i_m} \in A) \tag{5}$$

e se f_{x_ν} denotono le « *derivate parziali* »

$$f_{x_\nu} = \sum_{i_1, \dots, i_m} i_\nu a_{i_1 \dots i_m} \cdot x_1^{i_1} \dots x_\nu^{i_\nu - 1} \dots x_m^{i_m}$$

mentre δf significa la « *variazione* » di f

$$\delta f = \sum_{i_1, \dots, i_m} (d a_{i_1 \dots i_m}) \cdot x_1^{i_1} \dots x_m^{i_m},$$

si ha l'equazione differenziale

$$df - \sum_\nu f_{x_\nu} \cdot dx_\nu - \delta f = 0.$$

Notiamo ancora che, se f, g sono polinomi come (5), e se esiste in A il quoziente

$$\frac{f(x_1, \dots, x_m)}{g(x_1, \dots, x_m)}$$

(il che presuppone che g non sia zero o divisore dello zero in A) avremo l'equazione differenziale

$$d\left(\frac{f}{g}\right) - \sum_\nu \left(\frac{f}{g}\right)_{x_\nu} \cdot dx_\nu - \delta\left(\frac{f}{g}\right) = 0$$

con

$$\left(\frac{f}{g}\right)_{x_\nu} = \frac{g \cdot f_{x_\nu} - f \cdot g_{x_\nu}}{g^2}, \quad \delta\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot \delta f - f \cdot \delta g}{g^2}.$$

§ 3. Differenti relativi.

14. Se A_0 è sottoanello di un anello A, definiamo la *differenziazione relativa* $\dfrac{d}{A_0}$ *di* A *rispetto ad* A_0 aggiungendo semplicemente alle equazioni differenziali (assolute) di A le equazioni

$$dx_0 = 0 \qquad (\text{per ogni } x_0 \in A_0).$$