Alcune formole per le falde dell'evoluta di una superficie.

Nota di ROBERTO OCCHIPINTI (a Palermo).

Sunto. - Nella Nota si dà una semplice costruzione del raggio di torsione geodetica delle linee $r_1 = \text{cost.}$, $r_2 = \text{cost.}$ sulle falde dell'evoluta di una superficie e si dimostrano formole semplicissime per gli elementi di dette linee. Si trova poi la condizione affinché una W abbia le falde dell'evoluta pure superficie W e si determinano tutte queste superficie.

Nella presente Nota espongo alcune semplici relazioni che si riferiscono alle linee $r_1 = \text{cost.}$ ed $r_2 = \text{cost.}$ delle falde S_1 ed S_2 dell'evoluta di una superficie S , nonché alle corrispondenti delle linee di curvatura.

I soli elementi che introduco nelle formole sono i raggi principali r_1 , r_2 di curvature normali, quelli ρ_1 , ρ_2 di curvature tangenziali dell'evolvente, e gli angoli ω ed ω' delle linee $r_1 = \text{cost.}$ su S_1 ed S e di $r_2 = \text{cost.}$ su S_2 ed S . Alcune formole, come quelle delle torsioni geodetiche delle linee $r_1 = \text{cost.}$ di S_1 ed $r_2 = \text{cost.}$ di S_2 [n.° 5, (a) ed (a')], quella del prodotto di dette torsioni per una W [n.° 5, (b)], quella del rapporto della flessione alla torsione delle geodetiche u di S_1 [n.° 6, (b)] e la (a) del n.° 7, hanno una forma notevolmente semplice.

1. Comincio con l'osservare che: *Ogni linea $r_1 = \text{cost.}$ di S_1 è, in ciascun punto, parallela alla linea di curvatura (v) del secondo sistema passante pel punto corrispondente di S .*

Infatti, riferendo la S alle linee di curvatura, abbiamo per l'elemento lineare di S_1 ⁽¹⁾:

$$ds_1^2 = E \left(1 - \frac{r_1}{r_2} \right)^2 du^2 + dr_1^2.$$

Derivando rispetto ad u le coordinate x_1 , y_1 , z_1 dei punti di $r_1 = \text{cost.}$ su S_1 , abbiamo ad es.:

$$\frac{dx_1}{du} = \frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{dv}{du};$$

⁽¹⁾ Ved. BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, vol. I, pag. 275.

sostituendo per $\frac{dv}{du}$ l'espressione $-\frac{\frac{\partial r_1}{\partial u}}{\frac{\partial r_1}{\partial v}}$ data dall'equazione delle linee $r_1 = \text{cost.}$, abbiamo:

$$\frac{dx_1}{du} = \frac{\partial x_1}{\partial u} - \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\frac{\partial r_1}{\partial u}}{\frac{\partial r_1}{\partial v}}.$$

E, tenendo presenti le espressioni di $\frac{\partial x_1}{\partial u}$, $\frac{\partial x_1}{\partial v}$ ⁽¹⁾ risulta:

$$\frac{dx_1}{du} = \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) \frac{\partial x}{\partial u}. \quad \text{c. v. d.}$$

Similmente: *Le linee $r_2 = \text{cost.}$ di S_2 sono, in ciascun punto, parallele alla linea di curvatura (u) del primo sistema, passante pel punto corrispondente di S .*

Sicchè: *Le linee $r_1 = \text{cost.}$ di S_1 e le linee $r_2 = \text{cost.}$ di S_2 sono, nei punti corrispondenti, ortogonali.*

In particolare, se S è una W , poichè le linee $r_2 = \text{cost.}$ sono allora anche linee $r_1 = \text{cost.}$, segue che le linee $r_1 = \text{cost.}$ sono, su S_1 ed S_2 , ortogonali nei punti corrispondenti.

Segue dalle nostre considerazioni, che l'angolo delle linee $r_1 = \text{cost.}$ di S e di S_1 , è quello delle linee r_1 e v di S , sicchè sulla falda S_1 le linee $r_1 = \text{cost.}$ di S vengono deviate dall'angolo $(r_1 v)$ e similmente sulla falda S_2 vengono deviate dall'angolo $(r_2 u)$.

2. Calcoliamo la curvatura normale delle linee $r_1 = \text{cost.}$ di S_1 . Sostituendo nella formola della curvatura normale al posto dei coefficienti delle prime due forme fondamentali di S_1 le loro espressioni ⁽²⁾ ed al posto di $\frac{dv}{du}$

l'espressione $-\frac{\frac{\partial r_1}{\partial u}}{\frac{\partial r_1}{\partial v}}$, risulta per la curvatura normale:

$$\frac{1}{R_{r_1}} = - \frac{E r_1^2 \frac{\partial r_1}{\partial v} \frac{\partial r_2}{\partial v} - G r_2^2 \left(\frac{\partial r_1}{\partial u} \right)^2}{E \sqrt{G} r_1 (r_2 - r_1)^2 \frac{\partial r_1}{\partial v}}.$$

⁽¹⁾ L. BIANCHI, loc. cit., pag. 275.

⁽²⁾ L. BIANCHI, loc. cit., pagg. 275, 276.

Questa può scriversi così:

$$\frac{1}{R_{r_1}} = \frac{r_2}{r_2 - r_1} \sqrt{\frac{G}{E}} \left(-\frac{\frac{\partial r_1}{\partial u}}{\frac{\partial r_1}{\partial v}} \right) \left(-\frac{r_2 \frac{\partial r_1}{\partial u}}{\sqrt{E} r_1 (r_2 - r_1)} \right) - \frac{r_2}{r_2 - r_1} \left(\frac{r_1 \frac{\partial r_2}{\partial v}}{\sqrt{G} r_2 (r_2 - r_1)} \right).$$

Ora si tengano presenti le formole che danno le curvature tangenziali principali $\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}$ di S e quelle di CODAZZI ⁽¹⁾:

$$\frac{1}{\rho_1} = -\frac{r_2 \frac{\partial r_1}{\partial u}}{\sqrt{E} r_1 (r_2 - r_1)}, \quad \frac{1}{\rho_2} = \frac{r_1 \frac{\partial r_2}{\partial v}}{\sqrt{G} r_2 (r_2 - r_1)}$$

inoltre:

$$\sqrt{\frac{G}{E}} \left(-\frac{\frac{\partial r_1}{\partial u}}{\frac{\partial r_1}{\partial v}} \right) = \operatorname{tg}(r_1 v) = \operatorname{tg} \omega$$

dove ω denota l'angolo delle linee $r_1 = \text{cost.}$ su S e su S_1 ; allora risulta:

$$(1) \quad \frac{1}{R_{r_1}} = \frac{r_2}{r_2 - r_1} \left[\frac{1}{\rho_1} \operatorname{tg} \omega - \frac{1}{\rho_2} \right].$$

Riportando ad es., sulla tangente alla linea u in un punto P il segmento $PA = \rho_2$, poi conducendo AB perpendicolare alla tangente ad $r_1 = \text{cost.}$ in P fino all'incontro in B con la tangente alla linea v in P , poi riportando su questa il segmento $BC = \rho_1$, sarà $PC = \rho_2 \operatorname{tg} \omega - \rho_1$ e non resta che costruire il quarto proporzionale x dopo $\rho_2 \operatorname{tg} \omega - \rho_1$, ρ_1 , ρ_2 e infine il quarto proporzionale dopo r_2 , x , $r_2 - r_1$; questo sarà R_{r_1} .

Per la falda S_2 si trova:

$$(2) \quad \frac{1}{R_{r_2}} = \frac{r_1}{r_1 - r_2} \left[\frac{1}{\rho_2} \operatorname{tg} \omega' - \frac{1}{\rho_1} \right]$$

dove ω' denota l'angolo delle linee $r_2 = \text{cost.}$ su S e su S_2 ed $\frac{1}{R_{r_2}}$ la curvatura normale di $r_2 = \text{cost.}$ Segue che, se la superficie S è una W , essendo allora $\operatorname{tg} \omega' = \operatorname{cotg} \omega$, si ha tra i raggi R_{r_1} ed R'_{r_1} di curvatura normale di $r_1 = \text{cost.}$ su S_1 ed S_2 la relazione semplicissima:

$$\frac{R'_{r_1}}{R_{r_1}} = \frac{r_2}{r_1} \operatorname{tg} \omega.$$

⁽¹⁾ L. BIANCHI, loc. cit., pagg. 181 e 273.

3. Dalla formola (1) della curvatura normale delle linee $r_1 = \text{cost.}$ di S_1 e dalla formola notissima di BELTRAMI che dà la curvatura tangenziale $\frac{1}{\rho_{r_1}}$ delle linee stesse ⁽¹⁾ possiamo subito dedurre la flessione assoluta F_{r_1} delle linee stesse:

$$F_{r_1} = \frac{r_2}{r_2 - r_1} \sqrt{\left\{ \frac{1}{\rho_1} \operatorname{tg} \omega - \frac{1}{\rho_2} \right\}^2 + \frac{1}{r_2^2}}.$$

Similmente la flessione assoluta F_{r_2} delle linee $r_2 = \text{cost.}$ su S_2 , è data da:

$$F_{r_2} = \frac{r_1}{r_1 - r_2} \sqrt{\left\{ \frac{1}{\rho_2} \operatorname{tg} \omega' - \frac{1}{\rho_1} \right\}^2 + \frac{1}{r_1^2}}.$$

dunque, se la S è una W , tra le flessioni assolute F_{r_1} , F_{r_2} di $r_1 = \text{cost.}$ sulle due falde, sussiste la relazione:

$$r_2^2 F_{r_1}^2 - r_1^2 F_{r_2}^2 = \frac{r_2^2 \operatorname{tg}^2 \omega - r_1^2}{(r_1 - r_2)^2}.$$

4. La curvatura media H_1 di S_1 è la somma delle curvature normali delle linee $r_1 = \text{cost.}$ ed u che sono ortogonali. La curvatura normale della linea u è data da:

$$\frac{1}{R_u} = \frac{\sqrt{G}}{r_1 \frac{\partial r_1}{\partial v}} = -\frac{1}{r_1} \sqrt{\frac{G}{E}} \left(-\frac{\frac{\partial r_1}{\partial u}}{\frac{\partial r_1}{\partial v}} \right) \frac{\sqrt{E}}{\frac{\partial r_1}{\partial u}} = \frac{r_2 \rho_1 \operatorname{tg} \omega}{r_1^2 (r_2 - r_1)}.$$

Dunque:

$$H_1 = \frac{r_2}{r_2 - r_1} \left[\frac{1}{\rho_1} \operatorname{tg} \omega - \frac{1}{\rho_2} + \frac{\rho_1 \operatorname{tg} \omega}{r_1^2} \right]$$

cioè, indicando con $\frac{1}{a_1}$ la flessione assoluta della linea u di S :

$$H_1 = \frac{r_2}{r_2 - r_1} \left(\frac{\rho_1}{a_1^2} \operatorname{tg} \omega - \frac{1}{\rho_2} \right).$$

Similmente, la curvatura media H_2 di S_2 è data da

$$H_2 = \frac{r_1}{r_1 - r_2} \left(\frac{\rho_2}{a_2^2} \operatorname{tg} \omega' - \frac{1}{\rho_1} \right)$$

essendo $\frac{1}{a_2}$ la flessione assoluta della linea v di S .

⁽¹⁾ L. BIANCHI, loc. cit., pag. 278.

Per es., l'espressione di H_1 mostra che, eccettuato il caso $r_2 = 0$, la falda S_1 è minima se le curvature geodetiche principali sono legate alla flessione assoluta della linea u di S , dalla relazione:

$$\frac{1}{a_1^2} = \frac{1}{\rho_1 \rho_2} \cotg \omega$$

cioè se il raggio di flessione assoluta della linea u è medio proporzionale fra uno dei raggi di curvature tangenziali principali e la proiezione dell'altro fatta normalmente alla linea $r_1 = \text{cost.}$.

Ora le evolventi delle superficie minime sono quelle i cui raggi principali sono legati dalla relazione:

$$r_1 r_2 + c(r_1 + r_2) + 2c^2 = 0 \quad (1),$$

cioè le superficie parallele ad una superficie minima ed equidistante; queste soddisfano dunque alla relazione:

$$a_1^2 = \rho_1 \rho_2 \tg \omega.$$

Per la curvatura totale K_1 di S_1 abbiamo ⁽²⁾:

$$K_1 = -\frac{1}{(r_2 - r_1)^2} \frac{\frac{\partial r_2}{\partial v}}{\frac{\partial r_1}{\partial v}} = \frac{\frac{\partial r_2}{\partial v}}{(r_2 - r_1)^2} \sqrt{\frac{G}{E}} \left(-\frac{\frac{\partial r_1}{\partial u}}{\frac{\partial r_1}{\partial v}} \right) : \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{\partial r_1}{\partial u}.$$

E tenendo presenti le formole di CODAZZI e le altre che danno $\frac{1}{\rho_1}$ ed $\frac{1}{\rho_2}$, si ha subito:

$$K_1 = -\frac{\rho_1 r_2^2 \tg \omega}{\rho_2 r_1^2 (r_2 - r_1)^2}.$$

Similmente troviamo per la curvatura K_2 di S_2 :

$$K_2 = -\frac{\rho_2 r_1^2 \tg \omega'}{\rho_1 r_2^2 (r_2 - r_1)^2}$$

sicchè, se la superficie è una W risulta il teorema di HALPHEN:

$$K_1 K_2 = \frac{1}{(r_2 - r_1)^4},$$

inoltre:

$$\frac{K_1}{K_2} = \left[\frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \tg \omega \right]^2.$$

⁽¹⁾ c denota una costante.

⁽²⁾ Ved. BIANCHI, loc. cit., pag. 276.

5. Per calcolare la torsione geodetica delle linee $r_1 = \text{cost.}$ di S_1 basta sostituire nella formola

$$\frac{1}{T} = \frac{E_1 D_1 + (G_1 D_1 - E_1 D_1'') \frac{dv}{du} - F_1 D_1'' \left(\frac{dv}{du} \right)^2}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} \left[E_1 + 2F_1 \frac{dv}{du} + G_1 \left(\frac{dv}{du} \right)^2 \right]}$$

al posto dei coefficienti delle due forme le loro espressioni ⁽¹⁾ ed al posto

di $\frac{dv}{du}$ il rapporto $-\frac{\frac{\partial r_1}{\partial u}}{\frac{\partial r_1}{\partial v}}$. Allora si ottiene subito:

$$\frac{1}{T_{r_1}} = \frac{r_2}{r_1(r_2 - r_1)} \sqrt{\frac{G}{E}} \left(-\frac{\frac{\partial r_1}{\partial u}}{\frac{\partial r_1}{\partial v}} \right)$$

cioè:

$$(a) \quad \frac{1}{T_{r_1}} = \frac{r_2 \operatorname{tg} \omega}{r_1(r_2 - r_1)}.$$

Questa conduce alla seguente semplicissima costruzione: Siano C_1 e C_2 i centri principali di curvatura in un punto P di S ; si faccia sulla normale $C_1 C_2$, $\overline{C_1 D} = r_2$, poi si conduca, in un piano qualunque per $C_1 C_2$, la $C_1 E$ perpendicolare a $C_1 C_2$ e la DE tale che risulti $\widehat{C_1 D E} = \omega$; se F è il punto di ulteriore intersezione della EC_1 con la circonferenza dei tre punti P , C_2 ed E sarà $C_1 F = T_{r_1}$.

Per la torsione geodetica di $r_2 = \text{cost.}$ su S_2 si trova egualmente:

$$(a') \quad \frac{1}{T_{r_2}} = \frac{r_1 \operatorname{tg} \omega'}{r_2(r_1 - r_2)}.$$

Ne segue che le torsioni geodetiche delle linee $r_1 = \text{cost.}$ sulle due falde dell'evoluta di una W sono legate dalla relazione semplicissima:

$$(b) \quad \frac{1}{T_{r_1}} \cdot \frac{1}{T'_{r_1}} = -\frac{1}{(r_2 - r_1)^2}.$$

In altri termini: *Il prodotto delle torsioni geodetiche delle linee $r_1 = \text{cost.}$ sulle due falde dell'evoluta di una W è uguale al prodotto delle curvature tangenziali.*

⁽¹⁾ L. BIANCHI, loc. cit., pagg. 275 e 276.

Si ha inoltre per una W :

$$\frac{T'_{r_1}}{T_{r_1}} = \left(\frac{r_2}{r_1} \operatorname{tg} \omega \right)^2 = \left(\frac{R'_{r_1}}{R_{r_1}} \right)^2.$$

Calcoliamo la torsione geodetica $\frac{1}{t_{r_1}}$ delle linee $r_1 = \text{cost.}$ su S ; abbiamo:

$$\frac{1}{t_{r_1}} = \frac{(GD - ED'') \left(-\frac{\frac{\partial r_1}{\partial u}}{\frac{\partial r_1}{\partial v}} \right)}{\sqrt{EG} \left[E + G \left(\frac{\frac{\partial r_1}{\partial u}}{\frac{\partial r_1}{\partial v}} \right)^2 \right]} = \frac{(GD - ED'') \sqrt{\frac{E}{G}} \operatorname{tg} \omega}{\sqrt{EG} [E + E \operatorname{tg}^2 \omega]}$$

cioè:

$$\frac{1}{t_{r_1}} = \left(\frac{D}{E} - \frac{D''}{G} \right) \sin \omega \cos \omega$$

e finalmente:

$$\frac{1}{t_{r_1}} = \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \sin \omega \cos \omega.$$

Confrontando questa con quelle che danno $\frac{1}{T_{r_1}}$ ed $\frac{1}{T'_{r_1}}$ vediamo che fra le torsioni geodetiche delle linee $r_1 = \text{cost.}$ su S , S_1 ed S_2 sussiste la relazione:

$$\frac{1}{t_{r_1}} \left(\frac{r_1^2}{T_{r_1}} + \frac{r_2^2}{T'_{r_1}} \right) = 1$$

purchè la superficie obiettiva sia una W .

6. La curvatura normale delle linee $u = \text{cost.}$ di S_1 è data da:

$$\frac{1}{R_u} = -\frac{D_1''}{G_1} = \frac{\sqrt{G}}{r_1 \frac{\partial r_1}{\partial v}}; \quad \text{ma} \quad \frac{\sqrt{G}}{\frac{\partial r_1}{\partial v}} = -\frac{\sqrt{E}}{\frac{\partial r_1}{\partial u}} \operatorname{tg} \omega$$

e, per le formole di CODAZZI:

$$\frac{\partial r_1}{\partial u} = \frac{r_1(r_2 - r_1)}{r_2} \frac{\partial}{\partial u} \log \sqrt{G} = -\frac{r_1(r_2 - r_1)}{\rho_1 r_2} \sqrt{E},$$

dunque:

$$(a) \quad \frac{1}{R_u} = \frac{r_2 \rho_1 \operatorname{tg} \omega}{r_1^2 (r_2 - r_1)}.$$

Questa dà pure la curvatura assoluta. La torsione geodetica $\frac{1}{T_u}$ delle stesse linee di S_1 coincide pure con la torsione assoluta, ed è data, poichè queste linee sono ortogonali alle $r_1 = \text{cost.}$ dall'opposta della torsione geodetica di dette linee, cioè:

$$\frac{1}{T_u} = \frac{-r_2}{r_1(r_2 - r_1)} \text{tg } \omega.$$

Da questa e dalla (a) segue:

$$(b) \quad \frac{R_u}{T_u} = -\frac{r_1}{\rho_1}.$$

Cioè: *Il rapporto dei raggi di flessione e torsione delle linee u di S_1 pareggia il valore assoluto di quello dei raggi di curvatura normale e tangenziale delle linee stesse in S .*

Segue che nelle superficie in cui quest'ultimo rapporto è funzione di sola u , alle linee di curvatura u dell'evolvente corrispondono sulla falda S_1 geodetiche che hanno costante il rapporto tra la flessione e la torsione, quindi eliche cilindriche.

È facile vedere che le superficie in cui $\frac{r_1}{\rho_1} = U$ sono quelle che hanno le linee di curvatura u piane.

Infatti da $\frac{\frac{1}{\rho_1}}{\frac{1}{r_1}} = U$ segue, indicando con $\frac{1}{F_1}$ la flessione assoluta della

linea di curvatura u :

$$\frac{r_1}{F_1} = \sqrt{U^2 + 1}.$$

D'altra parte, pel teorema di MEUSNIER, indicando con σ l'angolo della normale principale alla linea u con la normale alla superficie, si ha:

$$F_1 = r_1 \cos \sigma,$$

dunque:

$$\cos \sigma = \frac{1}{\sqrt{U^2 + 1}}$$

cioè lungo una linea di curvatura u è costante l'angolo della normale principale con la normale alla superficie; allora la torsione assoluta, coincidendo con la torsione geodetica, è nulla e la linea u è piana.

Viceversa, se le linee di curvatura u di una superficie sono piane, si ha:

$$\frac{1}{\sqrt{eg}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} = U$$

e poichè

$$\sqrt{e} = \frac{\sqrt{E}}{r_2}, \quad \sqrt{g} = \frac{\sqrt{G}}{r_1},$$

risulta:

$$(b') \quad \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_1 \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} - \sqrt{G} \frac{\partial r_1}{\partial u}}{\sqrt{EG}} = U.$$

D'altra parte, per le formole di CODAZZI si ha:

$$\frac{\partial r_1}{\partial u} = r_1 \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = r_1 \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) \sqrt{E} \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}$$

cioè

$$\frac{\partial r_1}{\partial u} = -r_1 \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) \sqrt{E} \frac{1}{\rho_1}$$

sicchè, sostituendo nella (b') scritta così:

$$r_2 \frac{\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}}{\sqrt{EG}} - r_2 \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\frac{\partial r_1}{\partial u}}{r_1} = U$$

risulta:

$$\frac{r_1}{\rho_1} = U.$$

Possiamo dire così: *Le superficie con le linee di curvatura di un sistema piane sono quelle, nelle quali le geodetiche corrispondenti sulla relativa falda di evoluta sono eliche cilindriche.*

7. La curvatura normale delle linee $v = \text{cost.}$ di S_1 è data da

$$\frac{1}{R_v} = -\frac{D_1}{E_1}.$$

Ora si ha:

$$D_1 = \frac{E}{\sqrt{G}} \frac{r_1}{r_2^2} \frac{\partial r_2}{\partial v}, \quad E_1 = E \frac{(r_2 - r_1)^2}{r_2^2} + \left(\frac{\partial r_1}{\partial v}\right)^2$$

e ricavando $\frac{\partial r_2}{\partial v}$ e $\frac{\partial r_1}{\partial u}$ dalle espressioni di $\frac{1}{\rho_1}$ e $\frac{1}{\rho_2}$ del § 2 e sostituendo risulta:

$$D_1 = E \frac{r_2 - r_1}{r_2 \rho_2}, \quad E_1 = E \frac{(r_2 - r_1)^2}{r_2^2} \frac{\rho_1^2 + r_1^2}{\rho_1^2}$$

sicchè :

$$\frac{1}{R_v} = - \frac{r'_2 \rho_1^2}{(r_2 - r'_1) \rho_2 (r_1^2 + \rho_1^2)}.$$

La torsione geodetica delle stesse linee di S_1 è data da :

$$\frac{1}{T_v} = \frac{F_1 D_1}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} \cdot E_1}$$

e tenendo presenti le espressioni di E_1 e D_1 ora date e quelle di F_1 e G_1 ⁽¹⁾ risulta subito :

$$\frac{1}{T_v} = \frac{r_1 r'_2 \rho_1}{(r_2 - r'_1) \rho_2 (r_1^2 + \rho_1^2)}.$$

Segue :

$$(a) \quad \frac{R_v}{T_v} = - \frac{r'_1}{\rho_1} = \frac{R_u}{T_u}.$$

Dunque: *Le linee di curvatura dell'evolvente hanno sulla prima (seconda) falda dell'evoluta i rapporti delle rispettive curvature normali e torsioni geodetiche eguali all'opposto del rapporto della curvatura normale e tangenziale della linea di curvatura $u(v)$.*

8. Per terminare, esaminiamo la seguente quistione :

In quali superficie W le due falde dell'evoluta sono pure superficie W ?

Riduciamo l'elemento lineare dell'evolvente alla forma (WEINGARTEN)

$\frac{du^2}{\beta^2} + \frac{dv^2}{\theta'^2(\beta)}$; allora si hanno le formole ⁽²⁾:

$$(1) \quad r'_1 = \frac{1}{\theta - \beta \theta'},$$

$$(2) \quad r_2 = \frac{1}{\theta},$$

$$(3) \quad \rho_1 = \frac{\theta'}{\beta_1 \beta \theta''},$$

$$(4) \quad \rho_2 = \frac{\beta}{\beta_2 \theta'},$$

essendo θ funzione di $\beta(u, v)$; inoltre $\beta_1 = \frac{\partial \beta}{\partial u}$, $\beta_2 = \frac{\partial \beta}{\partial v}$.

⁽¹⁾ Ved. BIANCHI, loc. cit., pag. 275.

⁽²⁾ Ved. BIANCHI, loc. cit., pag. 291.

Ne seguono le espressioni dei coefficienti delle forme fondamentali di S_1 :

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\beta^2 \beta_1^2 \theta''^2 + \theta'^2 (\theta - \beta \theta')^2}{(\theta - \beta \theta')^4}, & F_1 &= \frac{\beta^2 \beta_1 \beta_2 \theta''^2}{(\theta - \beta \theta')^4}, \\ G_1 &= \frac{\beta^2 \beta_2^2 \theta''^2}{(\theta - \beta \theta')^4}, & D_1 &= \frac{-\beta_2 \theta'^2}{\beta^2 (\theta - \beta \theta')^4}, \\ D_1'' &= \frac{-\beta \beta_2 \theta''}{\theta' (\theta - \beta \theta')^3}. \end{aligned}$$

Per la curvatura media H_1 e la totale K_1 di S_1 troviamo allora:

$$(5) \quad H_1 = \frac{\beta^2 \beta_1^2 \theta^4 \theta''^2 + (\theta - \beta \theta')^2 \theta'^2 (\theta^4 + \beta_2^2 \theta' \theta'')}{\beta \beta_2 (\theta - \beta \theta') \theta'^3 \theta''},$$

$$(6) \quad K_1 = \frac{(\theta - \beta \theta')^2}{\beta^2 \theta' \theta'' \theta^4}.$$

Espressioni analoghe si hanno per le curvature H_2 e K_2 media e totale di S_2 . Se dunque S_1 ed S_2 sono superficie W , si avranno due relazioni della forma:

$$(7) \quad R_1(H_1, K_1) = 0,$$

$$(8) \quad R_2(H_2, K_2) = 0.$$

Ad es. la (7) è, in base alle (5) e (6), una relazione tra β , β_1 , β_2 ed allora, eliminando β , β_1 , β_2 fra (1), (3), (4), (7) si ha una relazione della forma:

$$(9) \quad \varphi(r_1, \rho_1, \rho_2) = 0.$$

Operando analogamente con le (8), (2), (3), (4), si avrà un'altra relazione:

$$(10) \quad \psi(r_2, \rho_1, \rho_2) = 0.$$

Siccome poi per una W i raggi principali r_1 , r_2 sono l'uno funzione dell'altro, le (9) e (10) equivalgono, in fondo, ad una relazione:

$$\chi(\rho_1, \rho_2) = 0,$$

tra i raggi di curvature tangenziali principali, compatibile con l'altra fra i raggi principali r_1 , r_2 .

Dunque: *Soltanto nelle superficie W i cui raggi di curvature tangenziali principali sono legati da una relazione compatibile con quella che lega i raggi principali, le falde dell'evoluta sono pure superficie W .*

Esistono di queste particolari W ? Pel teorema di WEINGARTEN il problema di determinarle consiste nel trovare tutte le deformate di superficie di rotazione, che sono, al tempo stesso, superficie W ; le loro evolventi sono le superficie richieste.

Le W elicoidali, essendo applicabili su superficie di rotazione, rispondono al problema, e così pure le superficie a curvatura costante, essendo falde di evoluta di superficie con $r_1 - r_2 = \text{cost.}$.

Il BIANCHI ha espresso l'opinione che all'infuori di queste non esistano altre classi di superficie W , falde dell'evoluta di superficie W .

È ciò che dimostro partendo dal ds^2 di una superficie di rotazione sotto la forma normale:

$$ds^2 = du^2 + r^2 dv^2;$$

allora è quistione di vedere come bisogna prendere D, D', D'' in guisa da soddisfare alle equazioni di CODAZZI che nel caso attuale sono:

$$(a) \quad D_2 - D_1' - \frac{r'}{r} D' = 0,$$

$$(b) \quad D_1'' - D_2' - r r' D - \frac{r'}{r} D'' = 0,$$

a quella di GAUSS:

$$DD'' - D'^2 = -r r'',$$

ed all'altra:

$$(c) \quad D_2'' + r^2 D_2 = 0,$$

che esprime che la superficie richiesta è una W , giacchè allora, essendo H funzione di K , e questa funzione di u soltanto, anche H è funzione di sola u . Da quest'ultima relazione deduciamo, ad es.:

$$(d) \quad D'' + r^2 D = 2rU$$

essendo U funzione di sola u ; allora la (b) si scrive:

$$(b') \quad r D_1'' - r D_2' = 2r r' U.$$

Occorre dunque studiare il sistema delle equazioni (a), (b'), (c), (d). Dalle (c) e (d) deduciamo:

$$(e) \quad D = \frac{U \pm \sqrt{U^2 + r r'' - D'^2}}{r},$$

$$(f) \quad D'' = r[U \mp \sqrt{U^2 + r r'' - D'^2}],$$

e bisogna soddisfare alle (a) e (b'). Perciò, calcolando D_2 e D_1'' e sostituendo nelle (a) e (b') si ha il sistema:

$$\begin{aligned} r \sqrt{U^2 + r r'' - D'^2} \cdot D_1' + D' D_2' &= -r' \sqrt{U^2 + r r'' - D'^2} \cdot D', \\ 2r^2 D' \cdot D_1' - 2r \sqrt{U^2 + r r'' - D'^2} \cdot D_2' &= 2r(r'U - rU') \sqrt{U^2 + r r'' - D'^2} + \\ &+ \{r^2(U^2 + r r'')'\} - 2r r' D'^2. \end{aligned}$$

Risolvendo rispetto a D_1' e D_2' risulta :

$$D_1' = \frac{r(U^2 + rr'')' + 2(r'U - rU')\sqrt{U^2 + rr'' - D'^2}}{2r(U^2 + rr'')} D',$$

$$D_2' = \frac{-r(U^2 + rr'')' + 2(r'U - rU')\sqrt{U^2 + rr'' - D'^2} - 2r'(U^2 + rr'')\sqrt{U^2 + rr'' - D'^2}}{2(U^2 + rr'')}.$$

Poi derivando la prima rispetto a v e la seconda rispetto ad u , identificando le due derivate, e sostituendo al posto di D_1' e D_2' le espressioni date dalle stesse equazioni, si ha un'equazione in D' che ci darà necessariamente D' funzione della sola u ; allora le (e) ed (f) danno anche D e D'' funzioni di sola u . Le D , D' , D'' convengono dunque o ad una superficie elicoidale o ad una superficie a curvatura costante.