L'opera geometrica di Corrado Segre ⁽¹⁾

di GINO LORIA a Genova

Egli era, benchè di poco, più giovane di me: se, quindi, il corso degli eventi umani non fosse soggetto ed inatteso (e spesso dolorosissime!) perturbazioni, non a me sarebbe spettato il penoso compito di redigere il bilancio dei contributi da Lui dati alla scienza che per un quarantennio ci affratellò: era per me, anzi, un consolante pensiero quello che sino alla morte avrei trovato al mio fianco l'amico fedele con cui mi ero legato sui banchi dell'Università.

Ma in questo momento in cui, in seguito ad un onorevole invito rivoltomi dalla Direzione di questi gloriosi *Annali*, io debbo esaminare, sia pur brevemente, l'opera scientifica dell'indimenticabile geometra, sento l'imprescindibile dovere di trattenere le lacrime, comprimendo qualunque impulso del cuore, affinchè in quanto sto per dire il lettore non sia trascinato a ravvisare elogi dettati dall'affetto, in luogo di semplici constatazioni di fatti ormai acquisiti dalla storia della scienza.

1. Nell'anno accademico 1881-82, quando il SEGRE era iscritto nel terzo anno di corso per la laurea in matematica, il professore ENRICO D'OVIDIO scelse come argomento delle sue lezioni di geometria superiore nell'Università

⁽¹⁾ Nato a Saluzzo ai 20 di agosto del 1863; laureato in matematica dalla Università di Torino il 1° luglio 1883. Durante l'anno 1883-84 fu in questo Ateneo assistente alla cattedra di algebra complementare e geometria analitica (prof. E. D'OVIDIO) e nel seguente prestò il prescritto servizio militare; nel triennio 1885-88 occupò il posto di assistente alla cattedra di geometria proiettiva e descrittiva (prof. G. BRUNO) facendo le lezioni della prima di tali materie. Morto F. FÀA DI BRUNO, il D'OVIDIO passò dall'incarico della Geometria superiore a quello dell'Analisi superiore ed il SEGRE fu nominato (15 novembre 1888) per concorso professore straordinario di quella disciplina; quattro anni appresso venne promosso ordinario. Durante tre trienni, cioè dal 1909 al 1918 fu preside della Facoltà di Scienze della Università di Torino; nel biennio 1895-97 ebbe anche l'incarico dell'insegnamento della fisica matematica e dal 1918 al 1922 quello delle conferenze di magistero in matematica. Un morbo repentino ed inesorabile lo spense addì 18 maggio 1924.

di Torino, la geometria della retta. Ciò servì di occasione e stimolo per i suoi ascoltatori di prendere conoscenza dei fondamentali lavori sull'argomento del PLÜCKER e del KUMMER; proseguendo in tale via si passò a quelli di F. KLEIN e G. BATTAGLINI; e poichè gli scritti del primo di questi matematici sono tutti informati al concetto dell'essere la geometria dello spazio rigato identica allo studio di una varietà quadratica a quattro dimensioni immersa in uno spazio lineare a cinque, mentre d'altronde vi è fatto largo uso della riduzione a forma canonica di una coppia di forme quadratiche, così, da un lato, si fu indotti a studiare la grande memoria del VERONESE sulla geometria proiettiva degli iperspazi e dall'altra a prendere notizia di quella, non meno importante, del WEIERSTRASS sulle forme bilineari e quadratiche.

Ora, appunto gli scritti del KLEIN, del BATTAGLINI, del VERONESE e del WEIERSTRASS costituiscono la piattaforma su cui riposano le pubblicazioni con cui il SEGRE esordì, applauditissimo, sulla scena del mondo matematico.

Delle due memorie ([2] e [3] ⁽¹⁾) costituenti in origine la dissertazione di laurea dell'autore, la prima contiene uno studio metodico delle quadriche situate in spazi comunque estesi, delle loro scambievoli intersezioni e dei risultanti sistemi lineari (fasci e schiere di quadriche); il teorema di WEIERSTRASS, che assegna la condizione necessaria e sufficiente affinché una coppia di forme bilineari o quadratiche si possa trasformare in altra, viene presentato sotto forma geometrica per dedurne criteri atti a caratterizzare una di dette coppie senza ricorrere alle equazioni canoniche scoperte dal grande matematico tedesco. Applicando i risultati ottenuti al caso in cui lo spazio ambiente sia a cinque dimensioni ⁽²⁾, il SEGRE [3] ritrova e completa tutte le proprietà allora note dei complessi quadratici e ne stabilisce una completa classificazione, esente dagli errori in cui cadde un discepolo del KLEIN, che per primo affrontò questa importante questione ⁽³⁾.

⁽¹⁾ I numeri di questo tipo servono di richiamo ai lavori registrati nell'*Elenco* posto in calce al presente articolo e che venne redatto in buona parte dal prof. E. G. TOGLIATTI: si trovano ivi notati anche alcuni scritti minori (recensioni, necrologie, relazioni accademiche e simili) di cui, per brevità, non tenemmo conto nel presente articolo.

⁽²⁾ È interessante notare che alla rappresentazione delle rette dello spazio ordinario sui punti di una quadrica di S_5 il nostro autore ricorse in parecchie occasioni posteriori; p. es. investigando — in un lavoro [94] ispiratogli dal WILCZYŃSKI — le congruenze rettilinee aventi per superficie focali due rigate sghembe.

⁽³⁾ Le inesattezze rilevate dal SEGRE si riferiscono principalmente al caso in cui la superficie singolare del complesso è una quadrica doppia; esse sono rilevate anche in un articolo [4] il quale, nella sostanza, se non nella forma, è un'estratto della tesi di laurea dell'autore.

2. Prima di occuparci di alcuni lavori che si collegano ai due testè discorsi è opportuno ricordare che (lo rilevò per primo il KLEIN) i complessi di rette studiati dal BATTAGLINI non sono del tutto generali, dal momento che sono rappresentabili, mediante le ordinarie coordinate di rette, con equazioni della forma $\Sigma c_{ik} p_{ik}^2 = 0$; tale osservazione fa nascere la questione: quali sono i complessi quadratici che entrano nella categoria investigata dal BATTAGLINI? Ora per risolverla un mezzo era offerto dal teorema (scoperto dall'ASCHIERI) che ogni complesso del BATTAGLINI può generarsi mediante le rette che tagliano armonicamente due date superficie di 2° ordine: di esso appunto è tratto profitto in un lavoro [1] ove l'anzidetta questione è risolta dal SEGRE con la collaborazione di un suo discepolo.

Lo stesso complesso venne poi investigato dal nostro in altri due lavori; nell'uno [5] egli si servì della trasformazione doppia di spazio rappresentabile in coordinate proiettive mediante equazioni della forma $\rho x_i' = x_i^2 (i = 1, 2, 3, 4)$, giungendo a nuove proprietà tanto di quel complesso quanto della superficie (tetraedroide) che ne è superficie singolare (¹); nell'altro [109] sfruttò questa nuova definizione da lui scoperta pochi anni prima di morire: Date due schiere rigate non appartenenti alla stessa quadrica, ogni retta r dello spazio incontra due generatrici a_1, a_2 della prima e due b_1, b_2 della seconda; ora se s'impone la condizione che la punteggiata $r(a_1, a_2, b_1, b_2)$ risulti proiettiva dal fascio di piani $r(a_1, a_2, b_1, b_2)$, tutte le rette r che la soddisfano costituiscono un complesso del BATTAGLINI.

3. Tra i fasci di quadriche considerati nelle prime memorie da noi analizzate (¹) non si trovano quelli costituiti tutti da quadriche singolari (coni di varie specie): di essi il nostro autore si è occupato in uno scritto [13] nel quale le considerazioni geometriche si alternano con le applicazioni di equazioni canoniche scoperte dal KRONECKER.

Al pari di questo è una derivazione della più volte citata memoria del WEIERSTRASS, e precisamente di quanto è ivi detto sulle forme bilineari, una memoria ([10] completata dalla nota [24]) nella quale (prendendo le mosse dalla classificazione delle omografie dello spazio ordinario, eseguita poco prima da un fratello d'armi del SEGRE, che egli ricorda) è mostrato come la classificazione

(¹) A questo periodo della sua vita scientifica, in cui l'attenzione del SEGRE era di preferenza rivolta alla geometria della retta, appartengono due sue brevi note ([8] e [19]) sui complessi lineari e un suo originale lavoro [6] ove le sfere ed i complessi lineari di rette vengono avvicinati per essere studiati dal punto di vista delle metriche relative.

delle corrispondenze proiettive in S_n , si possa ottenere senza ricorrere alle equazioni canoniche scoperte dal sommo analista di Berlino. Nel corso di tale ricerca è esposta una completa teoria di dette corrispondenze, con l'aggiunta di nuovi risultati; limitiamoci a riferire il seguente teorema, il quale completa un risultato dovuto al SIACCI e che il nostro autore espose anche isolatamente [7]: « Se $|a_{ik}|$, $|b_{ik}|$ sono due determinanti dello stesso grado e $|\alpha_{ik}|$, $|\beta_{ik}|$ i loro reciproci, i due determinanti $|pa_{ik} + qb_{ik}|$, $|p\alpha_{ik} + q\beta_{ik}|$ non differiscono al più che per un fattore e possiedono gli stessi divisori elementari ».

Proseguendo le sue meditazioni sopra le trasformazioni lineari in S_n , [18] e giovandosi di alcune classiche ricerche del CAYLEY e dell'HERMITE sopra le sostituzioni ortogonali, il nostro ha studiate a fondo le omografie che mutano in sè stessa una quadrica ed è poi passato a congeneri investigazioni sulle correlazioni ⁽¹⁾ negli iperspazi; importanti lavori del FROBENIUS e del VOSS si arricchirono in conseguenza di notevoli complementi ⁽²⁾.

Molteplici punti di contatto tanto con le più volte ricordate ricerche del WEIERSTRASS quanto con le memorie del SEGRE sulla geometria della retta possiede la notevolissima memoria [15] sull'astatica, la quale porge nuovi punti di vista e nuove proposizioni in un campo in cui eransi già illustrati matematici di alta rinomanza, fra cui basti citare il MINDING ed il SIACCI.

Un ultimo lavoro [12] del SEGRE che si collega, nel modo che diremo, alla memoria del WEIERSTRASS sulle forme quadratiche, ha per iscopo lo studio e la classificazione delle superficie di quarto ordine con conica doppia. Chi scrive le presenti linee erasi già occupato di tali figure per il caso in cui la linea doppia coincida col cerchio immaginario all'infinito e giovandosi della circostanza che, mediante coordinate pentasferiche, esse possono rappresentarsi con due equazioni quadratiche omogenee, ne aveva dedotta la classificazione dalle equazioni canoniche del WEIERSTRASS. Con una considerazione più geometrica il SEGRE, contemporaneamente al VERONESE, ha notato che, qualunque sia la specie della conica singolare, una superficie dell'anzidetta specie può ottenersi proiettando sullo spazio ordinario l'intersezione di due quadriche

⁽¹⁾ Di essi è parola anche nella nota [11], la quale però si connette a scritti, non del WEIERSTRASS, ma del PASCH e del LÜROTH.

⁽²⁾ Non è fuor di proposito segnalare qui una ricerca compiuta recentemente dal SEGRE ([120]; cfr. [118]) la quale, da un certo punto di vista si connette ai suoi studi sulle corrispondenze rappresentabile mediante equazioni lineari; alludiamo alle corrispondenze quadrilineari tra forme di 1^a specie, che egli ha insegnato a studiare ricorrendo ad una ingegnosa rappresentazione sopra le generatrici di due quadriche, distinte o coincidenti, traendone, in particolare gli elementi per una classificazione delle anzidette corrispondenze.

di S_4 : applicando tale concetto egli ne stabilì una completa teoria e ne fece un'esauriente classificazione, che, oltre a ricondurre a superficie già note, ne rivelò altre nuove e interessanti.

Non è fuor di luogo rilevare esplicitamente che fra tali superficie di quarto ordine non si trova quella di KUMMER, con sedici punti ed altrettanti piani singolari, che s'incontra come superficie singolare di un complesso quadratico di rette: due brevi ma importanti note ([14], [16]) mostrano che esse pure attrassero l'attenzione del Nostro.

4. Prima di proseguire nella descrizione delle messe raccolte dal nostro matematico nelle sue peregrinazioni iperspaziali, è necessario (in omaggio alla cronologia, i cui diritti non possono né debbono venire misconosciuti) far cenno di un gruppo di suoi scritti la cui prima radice è da ricercarsi nel suo insegnamento della geometria proiettiva, il quale corrisponde alla prima fase della sua carriera didattica. Uniformandosi alle idee del suo tempo, egli diede a questo insegnamento un indirizzo di assoluta purezza e per agevolare il compito dei suoi ascoltatori provocò la versione italiana della *Geometria di posizione* di STAUDT, che venne condotta felicemente a termine da M. PIERI, e vi premise un ottimo studio bio-bibliografico [39] relativo a colui a cui fu con ragione dato l'onorevole epiteto di « Euclide nel Secolo XIX ». Avendo poi notata l'imperfezione causata nelle odierne esposizioni della geometria proiettiva per effetto dell'esclusione o dell'imperfetta trattazione degli elementi immaginari, escogitò [22] un procedimento elementare per stabilire la teoria delle « coppie » formate da tali elementi; a base di esso sta il concetto di trasformazione di una proiettività binaria in altra mediante una proiettività ausiliare; quanto esso sia utile è luminosamente dimostrato dalle nuove dimostrazioni di teoremi sulle coniche a cui esso condusse il SEGRE. Proseguendo in quest'ordine di idee egli compose altro lavoro [23], ove il calcolo simbolico con trasformazioni geometriche è sfruttato per lo studio delle omografie binarie e, fra l'altro, conduce, per una via del tutto nuova, al teorema di PASCAL.

Quest'ordine di ricerche venne allora *solo apparentemente* abbandonato dal nostro; ne è prova un gruppo originale di lavori [44] che egli diede alle stampe tre anni più tardi, i quali costituiscono un ulteriore sviluppo di idee di STAUDT. Invero tutti sanno che questo grande geometra definì una proiettività binaria come una corrispondenza univoca e continua fra due forme di prima specie, la quale goda della proprietà di mutare gruppi armonici in gruppi armonici e ne dedusse l'eguaglianza dei birapporti di due quaterne di punti corrispondenti; ora il SEGRE notò che, quando si considerano anche elementi com-

plici, si possono immaginare delle corrispondenze analoghe, ma in cui i birapporti di due quaterne corrispondenti siano numeri complessi, non eguali ma coniugati ⁽¹⁾. Correttezza storica impone si rilevi come un giovane danese — C. JUEL — era stato condotto alla stessa conclusione poco prima del SEGRE, offrendo così un nuovo esempio di scoperte contemporanee, quasi fossero un inevitabile portato dei tempi. Ma è anche giustizia osservare che mentre il JUEL si arrestò alle prime conseguenze del suo trovato, il SEGRE ha completamente svolte le proprietà delle nuove corrispondenze e, collegando queste alle più elevate teorie dell'analisi matematica, creò un nuovo capitolo della nostra scienza, quello cioè che ha per tema gli enti iperalgebrici ⁽²⁾.

5. Riprendendo l'analisi delle pubblicazioni che il SEGRE dedicò alla geometria degli iperspazi dopo di avere tratte mirabili conseguenze geometriche del teorema di WEIERSTRASS sulle forme bilineari e quadratiche, ci si presenta un'estesa memoria ([34] di cui la nota [31] rappresenta una comunicazione preliminare) relativa alle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni, delle quali egli intraprese lo studio, non soltanto grazie alla loro importanza intrinseca, ma anche perchè, proiettandole sullo spazio ordinario, i loro contorni conducono ad una categoria di notevoli superficie. Fra quelle varietà se ne trovano molte generabili con tre reti proiettive di spazi ordinari (chiamando « rete » la totalità degli S_3 passanti per una retta); queste sono dotate di 6, 7, ... o 10 punti doppi ordinari; ma vi sono altre delle varietà considerate che possiedono punti singolari di specie superiore o anche infiniti punti doppi: di tutte l'autore fece uno studio accurato. Va rilevato che da siffatte indagini egli fu indotto ad avvertire alcune insospettite prerogative dello spazio a quattro dimensioni, alla cui esposizione egli dedicò un lavoro speciale [36], l'importanza del quale è documentata da ulteriori ricerche che ne furono corollario ⁽³⁾.

6. Ma, prima di occuparsi di queste particolari figure, il SEGRE aveva iniziate ricerche sulle superficie rigate algebriche, che lo occuparono parecchi anni e lo condussero a risultati della più alta importanza. Allo studio di tali

⁽¹⁾ A corrispondenza di tale specie si riferisce anche la nota [26].

⁽²⁾ V. specialmente la seconda esposizione [50] dei suoi risultati da un punto di vista algebrico: la memoria [105] può considerarsi come un ulteriore svolgimento delle idee ivi esposte.

⁽³⁾ P. H. SCHOUTE, *Considerations in reference to a configuration of Segre*. (Proc. of the K. Akad. von Wetensch. te Amsterdam, 1901, pp. 203-214 e 251-264).

figure egli fu indotto da un passo della citata memoria del VERONESE, ove questo egregio geometra considera la figura dello spazio S_{n+1} che è generata da n fasci proiettivi di S_n : è una rigata razionale; se non che, mentre egli asserì che tutte le figure così risultanti sono fra loro proiettivamente identiche, il SEGRE trovò [9] che esse si ripartiscono in $\frac{n}{2}$ o $\frac{n-1}{2}$ specie, secondo che n è pari o dispari, cosicchè due rigate razionali si possono trasformare per proiettività una in altra soltanto quando appartengano alla medesima specie: tale conclusione è in perfetto accordo con altra a cui giunse molto prima il CLEBSCH, ed il SEGRE ritrova, mediante opportune proiezioni e sezioni, la rappresentazione di tutte le rigate razionali dello spazio ordinario assegnate per la prima volta da quell'eminente scienziato.

Da siffatto studio il nostro fu condotto a due distinti ordini d'investigazioni.

Considerando che una rigata è una serie di $\infty^1 S_i$ egli fu indotto a considerare gli analoghi sistemi di S_i , arrestandosi in particolare [20] al caso di $i=2$.

Considerando d'altra parte che il genere delle rigate di cui sopra è $p=0$, egli volse il pensiero al caso di $p=1$ [25] e poi all'ipotesi di p qualunque ([28] e [32]), slanciandosi poi a considerare [33] i fenomeni analoghi che avvengono nelle varietà costituite da una serie semplicemente infinita di spazi lineari [33].

I nuovi risultati ottenuti dal SEGRE sulle rigate algebriche si trovano organicamente coordinati in un'estesa memoria ([27] e [41]) a cui deve ricorrere chiunque voglia oggi occuparsi dell'importante argomento; si leggono poi anche in altro lavoro [58], frutto di lezioni svolte durante l'anno 1890-91, nel quale, con ragionamenti iperspaziali, sono gettate le basi della geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito; lo studio di essa va utilmente accompagnato da quello dell'analogo lavoro (pubblicato nello stesso vol. di questi *Annali*) in cui il prof. BERTINI giunge agli stessi risultati con procedimenti algebrici.

7. Fra le figure investigate in questa fondamentale scrittura [58], s'incontrano figure che erano state assai prima considerate dai matematici, cioè le curve ed anche queste figure furono scopo delle meditazioni del Nostro. Così in una nota [37] che reca la sua firma è stabilito in modo nuovo e sono tratte nuove conseguenze, dall'importante teorema di CLIFFORD, affermando che una curva di genere p e ordine $n > 2p - r$ non può appartenere ad un S_r , per $r > n - p$. Con altra [30] il SEGRE ha partecipato alla fioritura di lavori, verificatasi intorno al 1889, sui sistemi lineari di curve piane algebriche; in una terza ([21], cfr. [42]) egli ha presentati in forma organica un gruppo di teoremi relativi alle curve

dei generi 0 e 1. Sorvolando su un articolo [53] dal modesto scopo di far conoscere alcune idee di E. CAPORALI, ricorderemo due note ([67] e [74]) relative ad alcuni speciali punti che si trovano nelle curve algebriche: e va esplicitamente rilevato che alla seconda di esse serve di complemento un ottimo lavoro postumo [127] del compianto geometra.

Finalmente alla teoria delle curve algebriche piane appartiene il riassunto [68] di alcune lezioni universitarie ove è trattata a fondo una questione che incontra chiunque intenda esporre rigorosamente quella teoria sino alle formule di PLÜCKER inclusivamente; cioè la questione di calcolare quante intersezioni di due linee dell'anzidetta specie sieno assorbite da un punto comune, di assegnata singolarità per ciascuna. È un lavoro modesto, ma che ha tutte le doti per essere giudicato definitivo sull'argomento.

8. Proseguendo nello svolgimento del vasto programma di lavoro che egli si era proposto, lo studio cioè di tutte le figure che si possono concepire in S_n , il SEGRE trovò [38] che i sistemi di ∞^{n-1} rette (figure analoghe alle congruenze dello spazio ordinario) sono costituiti ciascuno dalle rette tangenti $n-1$ volte ad una varietà ad $n-1$ dimensioni, la quale è la naturale estensione della notissima superficie focale. — Prima [17] egli aveva approfondita la rappresentazione delle ∞^5 coniche di un piano sugli elementi di un S_5 , arrestandosi in particolare sulle varietà che corrispondono all'insieme delle coniche specializzate una o più volte e determinando qual valore e quale portata possenga la già proposta rappresentazione dei complessi lineari di rette sulle coniche di un piano. — A lui deve anche un'accurata indagine [61] del contegno della varietà Hessiana di una data in un punto di data singolarità per questa, la quale indagine, fra l'altro, guidò alla scoperta del bizzarro comportamento di alcune curve degli ordini 25, 26, 28, 33, 50 dotate di certe singolarità. Al nostro autore spetta pure la scoperta ed il primo studio [48] di una categoria importante di varietà, le quali con pieno diritto portano oggi il suo nome⁽¹⁾; giova ricordarne la definizione: Dati n spazi delle dimensioni $p_1, p_2, \dots, p_r$ si chiamino $x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, \dots, x_{p_i}^{(i)}$ le coordinate omogenee di un punto qualunque dell' i^{mo} fra essi; se si pone

$$X_{i_1 i_2 \dots i_r} = x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \dots x_{i_r}^{(r)}$$

e si riguardano le X come coordinate omogenee di un punto di uno spazio a $(p_1 + 1)(p_2 + 1) \dots (p_r + 1) - 1$ dimensioni, le formule precedenti rappresen-

⁽¹⁾ G. SCORZA, *Sulle varietà di Segre*. (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, T. XLV, 1909-10)

teranno una varietà a $p_1 + p_2 + \dots + p_r$ dimensioni che appartiene appunto alla classe di cui è parola. — Applicando poi una formula ottenuta servendosi del calcolo ideato da H. SCHUBERT per trattare le questioni di geometria numerativa, egli ha risolto [75] un notevole gruppo di questioni pertinenti a questo ramo della geometria; di più, con l'insegnamento e con l'esempio, diede la spinta a buon numero di ricerche congeneri, fra cui spiccano quelle dovute al prof. G. GIAMBELLI.

9. Verso il tramonto della sua troppo breve carriera il SEGRE ha studiati i complessi lineari di S_2 in S_5 con metodi in gran parte modellati sopra quelli in uso per investigare la geometria della retta nello spazio ordinario. Inoltre in un manipolo di notevolissimi lavori ([110], [113], [115]) ha iniziata e spinta notevolmente avanti la ricerca delle proprietà delle schiere rigate (o « regoli », secondo la nomenclatura da lui proposta), alternando le considerazioni sintetiche con opportuni sviluppi analitici, i quali, con la loro lucida semplicità destano meraviglia ed ammirazione, avendo l'intento di porre allo scoperto le più riposte qualità di enti geometrici complicatissimi: che tali ricerche non meritino di venire considerate oggetti di semplice curiosità è dimostrato dalle nuove proposizioni relative a figure dello spazio ordinario, a cui esse condussero e che trovansi registrate in uno scritto [109] che abbiamo già avuto occasione di citare.

A tali indagini si connette (quantunque siano ivi evitate le considerazioni iperspaziali) un lavoro [117] avente per soggetto le corrispondenze rappresentabili mediante equazioni della forma $\sum c_{ik} p_i q_k = 0$ ($i, k = 1, 2, \dots, 6$) con la condizione $c_{ik} + c_{ki} = 0$, ove p_i e q_k sono coordinate omogenee di due rette poste in relazione una con l'altra.

Emerge da tutto ciò (e verrà confermato da altre cose che diremo) che alla fine dello scorso secolo il SEGRE aveva il primato fra i conoscitori ed i contributori della geometria pluridimensionale; in conseguenza, non appena formulato il piano di una grande enciclopedia matematica, senza discussione fu lui designato a redigere il riassunto relativo a quella materia; il non facile compito venne adempiuto con tanto scrupolo e tale profondità che l'articolo da lui scritto [114] è ben meritevole di servire quale modello pei futuri congeneri lavori.

10. Nel corso delle sue ricerche iperspaziali il SEGRE s'imbattè più volte in questioni concernenti le superficie algebriche, sulle quali le conoscenze, quando egli esordì, erano per molti riguardi monche e frammentarie: special-

mente oscurità profonda avvolgeva la struttura dei punti singolari e quanto concerne l'estensione allo spazio della nozione di genere di una curva.

Riguardo alla prima categoria di problemi, come naturale estensione di una procedura che fecondissima erasi manifestata nel piano, si presentava la questione di ridurre le singolarità di una superficie a certi tipi fissi applicando opportune trasformazioni birazionali; a tale importante indagine si riferisce un'elaborata memoria del nostro [64], la quale ebbe la triste prerogativa di trascinarlo in una breve ma poco piacevole polemica ([63], [66]).

Invece agli studi sui generi di una superficie il SEGRE arrecò un notevole contributo [62] estendendo allo spazio una considerazione che erasi dimostrata assai giovevole nel piano; in tal modo giunse a provare che « su una qualunque superficie algebrica il numero δ dei punti doppi staccati di curve di un fascio, diminuito del numero σ dei punti base di questo fascio e del quadruplo del genere di questo è indipendente dal fascio considerato », epperò costituisce un carattere P della superficie considerata: tale numero può anche esprimersi sotto la forma $12p - p^{(4)} + 9$, ove p è il genere superficiale e $p^{(4)}$ il genere lineare della data superficie. Esso era stato incontrato prima, sotto altro punto di vista, dallo ZEUTHEN, ond'è pienamente giustificato il nome di « invariante di ZEUTHEN-SEGRE », con cui viene designato. Giova poi osservare, col nostro autore, che il ragionamento da lui usato nel piano e nello spazio ordinario, è applicabile anche agli spazi superiori; in particolare guida ad un carattere delle varietà a tre dimensioni, dianzi ignoto.

È necessario osservare qui che, come da giovane, il SEGRE, con parecchi lavori sopra le superficie di quart'ordine aveva manifestato il proprio interesse per le superficie di ordine determinato, diede prova della persistenza di tale sentimento con un'elegante nota [89] sopra quelle del terzo, la quale porge un notevole complemento alla famosa memoria del CREMONA sopra tali figure.

11. Questa nostra rapida rassegna deve anche contenere almeno un cenno di una acuta osservazione fatta dal SEGRE [79] la quale cagionò nel campo dei geometri una ben giustificata emozione (dovrei forse dire fu causa di un momentaneo scandalo!); essa consiste nel rilievo che non è conclusivo il noto ragionamento congegnato dal NOETHER per dimostrare che ogni trasformazione piana birazionale può ottenersi quale prodotto di trasformazioni quadratiche, rilievo tanto più importante giacchè la stessa argomentazione era stata più volte applicata nello studio dei sistemi lineari di curve piane. Il timore di dovere in conseguenza abbattere edifici di notevole importanza fu, fortunatamente, di breve

durata, perchè il CASTELNUOVO suggerì subito un'altra argomentazione conducente allo scopo ed al riparo da ogni critica. Tuttavia la sensata obiezione del SEGRE conserva intatto il proprio valore, come il NOETHER stesso ebbe onestamente a riconoscere.

12. L'ultima categoria di lavori del nostro autore che ci rimane da considerare è dovuta all'influenza esercitata su di lui dal DARBOUX per mezzo delle sue notissime *Leçons sur le théorie générale des surfaces*, sfruttate ampiamente dal SEGRE in alcuni corsi universitari. Le ricerche a cui alludiamo appartengono a quel capitolo della geometria infinitesimale che designasi oggi con l'epiteto di « differenziale-proiettiva » e la cui prima pagina venne scritta da M. CHASLES quando scoperse la relazione omografica che intercede fra la punteggiata avente per sede una generatrice di una superficie rigata ed il fascio costituito dai corrispondenti piani tangenti.

Siffatta dipendenza dal DARBOUX è riconosciuta dal nostro in un'estesa memoria [95] ove l'autore, giovandosi dell'ammirabile disinvoltura con cui egli sapeva percorrere tutti gli spazi, generalizza una considerazione utilizzata dal citato geometra francese per le equazioni a derivate parziali di secondo ordine. Per raggiungere lo scopo che erasi prefisso egli premette una succinta ma luminosa esposizione delle principali proprietà infinitesimali di una superficie in S_4 , nell'intorno di un suo punto, la quale possiede un valore indipendente dal fine a cui mirava l'autore. Le applicazioni da lui fattene hanno segnalata a geometri ed analisti una miniera ricca di nobile metallo, che sarebbe imprudente spensieratezza non approfondire ulteriormente. Egli stesso ha ulteriormente svolto l'argomento, almeno secondo una direzione, in una memoria ([102] e [103]) intesa a porre le basi della teoria di figure analoghe alle rigate, cioè alle varietà costituite da spazi lineari in S_4 . A tale considerazione simultanea di considerazioni infinitesimali e di considerazioni iperspaziali deve la vita un recente manipolo di bellissimi lavori del nostro ([121]-[124]) che siamo costretti a nominare di sfuggita, troppo spazio essendo necessario per esporne il vario-pinto contenuto.

Ad altro passo delle succitate *Leçons* debbono la vita alcune ricerche del SEGRE [98] sulle superficie di traslazione, considerate in quanto contengono due sistemi coniugati di curve tali che le corrispondenti sviluppabili circoscritte sono coni. Ed è estremamente notevole che a superficie algebriche di detta specie egli fu ricondotto in un lavoro [128] (l'ultimo che rechi la sua firma!), ove esse si incontrano come caratterizzate dall'essere le loro sezioni piane rappresentabili univocamente su un piano, per modo che alle loro sezioni piane

corrispondano curve d'ordine n circoscritte ad un $(n+1)$ — latero completo, a sua volta, circoscritto ad una conica.

13. In una memoria [100] che è pure di pertinenza della geometria infinitesimale egli ha osservato che, come la considerazione dei punti di una superficie che sono, rispetto ad un punto O , infinitamente vicini di primo ordine, condusse alla teoria delle tangenti coniugate, così a nuove configurazioni geometriche conduce la considerazione dei punti che stanno, rispetto a O , a distanze infinitesime di ordini superiori. Sviluppando tale concetto, egli stabilì una corrispondenza cremoniana di terzo grado fra i piani per O ed i punti del corrispondente piano tangente, la quale lo indusse a introdurre un nuovo sistema di linee sopra una superficie qualunque, analoghe a quelle che portano il nome di DARBOUX; l'importanza delle « linee di Segre » fu ben presto posta in meridiana luce da G. FUBINI, il quale ne stabilì l'equazione differenziale sotto varie forme.

Alla stessa grande branca della geometria appartengono alcune memorie del SEGRE concernenti le superficie rigate; una [94] venne da noi già ricordata; un'altra [106] (che è l'ultima di cui parleremo) ha per fondamento il seguente notevole teorema: « Se una curva gobba gode della proprietà che per ogni suo punto si possa condurre una retta situata nel corrispondente piano osculatore ed appartenente ad una congruenza lineare, tutte le sue tangenti saranno in un complesso di primo grado »; a stabilirne l'importanza bastano le applicazioni fattene dall'autore allo studio dei sistemi di rette tali che almeno una delle falde della corrispondente superficie focale sia rigata.

14. Il numero e la varietà dei risultati ottenuti dal SEGRE ci ha vietato, non solo di enumerarli per intero, ma anche di entrare in particolari intorno alla forma in cui sono scritte le sue memorie. Ma, prima di chiudere questa troppo rapida rivista, ci corre l'obbligo di segnalare ai giovani geometri l'esemplare accuratezza da lui sempre usata nello scrivere e l'eleganza perfetta dei calcoli da lui eseguiti. Egli usò di preferenza il ragionamento puramente sintetico, anche nelle circostanze in cui l'intuizione geometrica non poteva venire utilmente invocata; ma, quasi sempre, confermava le proprie conclusioni mediante opportune formule, la semplicità delle quali cela la profondità del pensiero. La sua tendenza e la sua propensione verso la geometria non gl'impedì di apprezzare a dovere la somma importanza e la irresistibile energia dell'analisi; ed invero, come nei primordi della sua carriera ne raccomandava caldamente lo studio ai propri discepoli (v. [46], [87]),

così, in un'occasione solenne si compiacque (v. [86], [90]) di porre in luce i legami cordiali e strettissimi delle due discipline sorelle. E chi ne legge i lavori ben si avvede come di quel paterno consiglio egli abbia fatto norma costante dei propri studi, giacchè si trovano ivi utilizzati i più importanti elementi della moderna letteratura analitica. Fu appunto tale vasta e profonda cultura che, alleandosi alla alata fantasia geometrica di cui natura avevalo dotato, gli permise, specialmente nei suoi ultimi anni di vita, di arricchire il patrimonio geometrico di ricerche sopra figure del tutto nuove e che, per la loro complicazione, avrebbero spaventato chi non fosse stato come lui animato da quel sereno coraggio in cui rispecchiasi la coscienza della propria forza.

15. Benchè parecchi lavori del compianto geometra, per esplicita dichiarazione sua, siano frutto del suo insegnamento universitario ⁽¹⁾, pure non possono in alcun modo servire da soli a porgere un'idea della cura da lui posta nel preparare le proprie lezioni, cura la cui efficacia è documentata dalla splendida collezione di lavori dei suoi discepoli ⁽²⁾. Fortunatamente di tanto lavoro è rimasto un residuo tangibile; chè, essendo stata sua costante abitudine lo scriverne riassunti lucidissimi, corredati da ampie indicazioni bibliografiche, egli ha lasciata una collezione preziosa e che, fortunatamente, si trova in mani sicure ⁽³⁾. È voto generale che, almeno i più cospicui elementi di tale raccolta ⁽⁴⁾ possa vedere la luce; così la voce, troppo presto spenta, dell'illustre maestro potrà essere ascoltata dalle generazioni future e si avrà una nuova manifestazione del consolante fenomeno generale, che il WEIERSTRASS esprime con concisione scultorea, scrivendo ad una sua alunna prediletta: *Die Menschen sterben, die Gedanken bleiben*.

Genova, Ottobre 1924.

⁽¹⁾ Anche alcuni suoi scritti storici (p. es. [82]) ripetono origine congenere.

⁽²⁾ Ove, ripubblicando i lavori del SEGRE, venisse adottato il sistema seguito dagli editori delle *Opere* di GIACOMO BERNOULLI, i quali vi inserirono anche le Dissertazioni di laurea composte sotto la sua direzione, parecchi volumi non sarebbero a ciò sufficienti.

⁽³⁾ Questi fascicoli avrebbero fornito buona parte dei materiali per quelle *Vorlesungen über algebraische Geometrie* il cui annuncio si trovò per parecchi anni nei Cataloghi della Casa Teubner.

⁽⁴⁾ Può interessare di conoscere i temi svolti dal SEGRE; perciò indichiamo i principali: Teoria delle curve e delle superficie algebriche - Geometria degli enti geometrici semplicemente infiniti. Trasformazioni birazionali nel piano - Singolarità delle curve e delle superficie - Gruppi continui di trasformazioni - Curve algebriche dei vari spazi - Geometria numerativa - Sistemi lineari di curve piane e superficie razionali - Geometria su una super-

Elenco cronologico delle Pubblicazioni di Corrado Segre.

-
- 1883 - 1. *Sur les différentes espèces de complexes du 2° degré des droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du 2° ordre*; (luglio 1883, Math. Ann., XXIII, pag. 213-234, in collaborazione con G. LORIA).
2. *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*; 27 aprile 1883, Mem. Acc. Torino, (2), XXXVI, pag. 3-86.
3. *Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche*; 27 aprile 1883, Mem. Acc. Torino, (2), XXXVI, pag. 87-157.
4. *Note sur les complexes quadratiques dont la surface singulière est une surface du 2° degré double*; 22 settembre 1883, Math. Ann., XXIII, pag. 235-243.
5. *Su una trasformazione irrazionale dello spazio e sua applicazione allo studio del complesso quadratico di Battaglini e di un complesso lineare di coniche inscritte in un tetraedro*; ottobre 1883, Giorn. di Mat., XXI, pag. 355-378.
6. *Sulle geometrie metriche dei complessi lineari e delle sfere e sulle loro mutue analogie*; 18 dicembre 1883, Atti Acc. Torino, XIX, pag. 159-186.
7. *Teorema sulle relazioni tra una coppia di forme bilineari e la coppia delle loro forme reciproche*; 17 ottobre 1883, Giorn. di Matem., XXII, pag. 29-32.
- 1884 - 8. *Sur les droites qui ont des moments donnés par rapport à des droites fixes*; 6 gennaio 1884, Journ. für Math., 97, pag. 95-110.
9. *Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque*; 31 gennaio 1884, Atti Acc. Torino, XIX, pag. 355-372.
10. *Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*; aprile 1884, Mem. Acc. Lincei, (3), XIX, (1884), pag. 127-148.
11. *Sur les invariants simultanés de deux formes quadratiques*; 11 aprile 1884, Math. Ann., XXIV, pag. 152-156.
12. *Etude des différentes surfaces du quatrième ordre à conique double ou cuspidale (générale ou décomposée) considérées comme des projections de l'intersection de deux variétés quadratiques de l'espace à quatre dimensions*; 8 aprile 1884, Math. Ann., XXIV, pag. 313-444.
-

ficie algebrica - Geometria non euclidea - Applicazione degli integrali abeliani alla geometria - Forme delle curve algebriche - Classificazione delle curve algebriche - I gruppi in geometria - Geometria della retta - Concetti e metodi della geometria della retta - Superficie di terzo e curve di quarto ordine - Curve e superficie algebriche dal punto di vista delle trasformazioni birazionali - Gruppi continui di trasformazioni - Sistemi lineari di coniche e quadriche - Geometria degli iperspazi - Teoria degli invarianti applicati alla geometria - Geometria differenziale - Vedute superiori sulla geometria elementare - Complessi di rette di 1° e 2° grado - Gruppi d'ordine finito - Geometria delle equazioni differenziali - Capitoli di geometria algebrica - Circoli e sfere.

-
13. *Ricerche sui fasci di conì quadrici in uno spazio lineare qualunque*; 18 maggio 1884, Atti Acc. Torino, XIX, pag. 878-896.
 14. *Sur un cas particulier de la surface de Kummer*. Lettre à M. K. Rohn; 9 agosto 1884, Leipziger Ber., XXXVI, pag. 132-135.
 15. *Sull'equilibrio di un corpo rigido soggetto a forze costanti in direzione ed intensità e su alcune questioni geometriche affini*; 20 agosto 1884, Mem. Soc. Ital. delle Sc. (dei XL), (3) VI, n. 3, pag. 1-35.
 16. *Sur les courbes de tangentes principales des surfaces de Kummer* (extrait d'une lettre adressée à M. Th. Reye); 24 ottobre 1884, Journ. für Math., 98, pag. 301-303.
- 1885 -
17. *Considerazioni intorno alla geometria delle coniche di un piano e alla sua rappresentazione sulla geometria dei complessi lineari di rette*; gennaio 1885, Atti Acc. Torino, XX, pag. 487-504.
 18. *Ricerche sulle omografie e sulle correlazioni in generale e particolarmente su quelle dello spazio ordinario considerate nella geometria della retta*; marzo 1885, Mem. Acc. Torino, (2), XXXVII, pag. 395-425.
 19. *Sur une expression nouvelle du moment mutuel de deux complexes linéaires*; 15 maggio 1885, Journ. für Math., 99, pag. 169-172.
 20. *Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani*; novembre 1885, Atti Acc. Torino, XXI, pag. 95-115.
- 1886 -
21. *Remarques sur les transformations uniformes des courbes elliptiques en elle mêmes*; gennaio 1886, Math. Ann., XXVIII, pag. 296-314.
 22. *Le coppie di elementi imaginari nella geometria proiettiva sintetica*; febbraio 1886, Mem. Acc. Torino, (2), XXXVIII, pag. 3-24.
 23. *Note sur les homographies binaires et leurs faisceaux*; 27 marzo 1886, Journ. für Math., 100, pag. 317-330.
 24. *Sugli spazi fondamentali di una omografia*; maggio 1886, Rend. Acc. Lincei, (4), II, pag. 325-327.
 25. *Ricerche sulle rigate ellittiche di qualunque ordine*; maggio 1886, Atti Acc. Torino, XXI, pag. 868-891.
 26. *Su alcune proprietà metriche delle correlazioni*; 16 luglio 1886, Giorn. di Mat., XXV, pag. 20-24.
- 1887 -
27. *Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques* (1° partie, courbes algébriques); gennaio 1887, Math. Ann., XXX, pag. 203-226.
 28. *Nuovi risultati sulle rigate algebriche di genere qualunque*; gennaio 1887, Atti Acc. Torino, XXII, pag. 362-363.
 29. *Sur un théorème de la géométrie à n dimensions*; 17 marzo 1887, (extrait d'une lettre adressée à Mr. F. Klein), Math. Ann., XXX, pag. 308.
 30. *Sui sistemi lineari di curve piane algebriche di genere p* ; (estratto di lettera al dott. G. B. Guccia); 9 aprile 1887, Rend. Palermo, I, pag. 217-221.
 31. *Sulla varietà cubica con dieci punti doppi dello spazio a quattro dimensioni*; 14 maggio 1887, Atti Acc. Torino, XXII, pag. 791-801.
 32. *Intorno alla geometria su una rigata algebrica*; luglio 1887, Rend. Acc. Lincei, (4), III₂, pag. 3-6.
 33. *Sulle varietà algebriche composte di una serie semplicemente infinita di spazi*; ottobre 1887, Rend. Acc. Lincei, (4), III₂, pag. 149-153.

-
31. *Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni e su certi sistemi di rette e certe superficie dello spazio ordinario*; dicembre 1887, Mem. Acc. Torino, (2), XXXIX, pag. 3-48.
35. Recensioni in *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, T. XVI, 1884.
- 1888 - 36. *Alcune considerazioni elementari sull'incidenza di rette e piani nello spazio a quattro dimensioni*; febbraio 1888, Rend. Palermo II, pag. 45-52.
37. *Sulle curve normali di genere p dei vari spazi*; aprile 1888, Rend. Ist. Lom., (2), XXI, pag. 523-528.
38. *Un'osservazione sui sistemi di rette degli spazi superiori*; luglio 1888, Rend. Palermo, II, pag. 148-149.
39. *C. G. C. von Staudt e i suoi lavori*; luglio 1888, (prefazione alla trad. ital. della « Geometrie der Lage » di STAUDT), pag. V-XXI.
40. Recensioni in *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, T. XVII, 1885.
- 1889 - 41. *Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques* (II partie, Surfaces réglées algébriques); gennaio 1889, Math. Ann., XXXIV, pag. 1-25.
42. *Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche*; giugno 1889, Atti Acc. Torino, XXIV, pag. 734-756.
43. Relazione sul saggio storico di GIN. LORIA : *Il periodo aureo della Geometria greca*; relatori E. D'OVIDIO e C. SEGRE, 29 dicembre 1889, Atti Acc. Torino, XXV, pag. 208-209.
44. *Un nuovo campo di ricerche geometriche*; 4 note, autunno 1889; I, Atti Acc. Torino, XXV, pag. 276-301; II, id., XXV, pag. 430-457; III, id., XXV, pag. 592-612; IV, id., XXVI, pag. 35-71.
- 1890 - 45. Nota alla Memoria di GUIDO CASTELNUOVO: *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche*; Rend. Palermo, IV, pag. 86-88.
- 1891 - 46. *Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche*; febbraio 1891, Riv. di Mat., I, pag. 42-66.
47. *Una dichiarazione* (risposta a G. Peano); aprile 1891, Riv. di Mat., I, pag. 154-156.
48. *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi*; aprile 1891, Rend. Palermo, V, pag. 192-204.
49. Relazione intorno alla memoria di GUIDO CASTELNUOVO: *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane*; relatori E. D'OVIDIO e C. SEGRE, 12 aprile 1891, Atti Acc. Torino, XXVI, pag. 595-602.
50. *Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici*; settembre 1891, Math. Ann., XL, pag. 413-467.
- 1892 - 51. Relazione sulla Memoria del prof. RICCARDO DE PAOLIS, intitolata: *Le corrispondenze proiettive nelle forme geometriche fondamentali di 1^a specie*; relatori E. D'OVIDIO e C. SEGRE, 31 gennaio 1892, Atti Acc. Torino, XXVII, pag. 366-375.
52. *Intorno alla storia del principio di corrispondenza e dei sistemi di curve*; Bibl. Math., (2), VI, pag. 33-47.
53. *Alcune idee di Ettore Caporali intorno alle quartiche piane*; agosto 1892, Annali di Matem., (2), 20, pag. 237-242.
54. *Riccardo De Paolis*; cenni biografici, settembre 1892, Rend. Palermo, VI, pag. 208-224.

- 1893 - 55. Relazione intorno alla Memoria intitolata: *Sopra le curve di dato ordine e dei massimi generi in uno spazio qualunque* del dott. GINO FANO; 25 giugno 1893, relatori E. D'OVIDIO e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XXVIII, pag. 865-866.
56. Relazione intorno alla Memoria intitolata: *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche* del dott. F. ENRIQUES; 25 giugno 1893, relatori E. D'OVIDIO e C. SEGRE. Atti Acc. Torino, XXVIII, pag. 867-868.
57. *Giuseppe Bruno*; cenni biografici, settembre 1893, Annuario della R. Università di Torino, 1893-1894, pag. 155-166.
58. *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*; autunno 1893, Annali di Mat., (2), XXII, pag. 41-42.
- 1894 - 59. Nota sul lavoro di RICCARDO DE PAOLIS: *Teoria generale delle corrispondenze proiettive e degli aggruppamenti proiettivi sulle forme fondamentali a due dimensioni*; ottobre 1894, Rend. Acc. Lincei, (5), III₂, pag. 227-229.
60. *Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit*; von A. BRILL und N. NOETHER; Cenni, 2 dicembre 1894, Atti Acc. Torino, XXX, pag. 109-111.
- 1895 - 61. *Sulla forma Hessiana*; ottobre 1895, Rend. Acc. Lincei, (5), IV₂, pag. 143-148.
- 1896 - 62. *Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche*; febbraio 1896, Atti Acc. Torino, XXXI, pag. 485-501.
63. Relazione sulla Memoria del dott. GINO FANO intitolata: *Sulle varietà algebriche con un gruppo continuo non integrabile di trasformazioni proiettive in sé*; 12 aprile 1896, relatori E. D'OVIDIO, V. VOLTERRA, C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XXXI, pag. 623-624.
64. *Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche*; ottobre 1896, Annali di Mat., (2), XXV, pag. 2-54.
- 1897 - 65. Intorno ad una mia Memoria: *Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche*; maggio 1897, Atti Acc. Torino, XXXII, pag. 781-789.
66. *Su un problema relativo alle intersezioni di curve e superficie*; 27 giugno 1897, Atti Acc. Torino, XXXIII, pag. 19-23.
67. *Su alcuni punti singolari delle curve algebriche e sulla linea parabolica di una superficie*; settembre 1897, Rend. Acc. Lincei, (5), VI₂, pag. 168-175.
68. *Le molteplicità nelle intersezioni delle curve piane algebriche con alcune applicazioni ai principii della teoria di tali curve*; settembre 1897, Giorn. di Mat., XXXVI, pag. 1-50.
- 1898 - 69. Relazione sulla Memoria del dott. BEPPO LEVI intitolata: *Sulla varietà delle corde di una curva algebrica*; 27 febbraio 1898, relatori E. D'OVIDIO e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XXXIII, pag. 504-505.
70. Relazione sulla Memoria del dott. GINO FANO intitolata: *I gruppi di Jonquières generalizzati*; 15 maggio 1898, relatori E. D'OVIDIO e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XXXIII, pag. 796-797.
71. Recensione delle *Lezioni di geometria proiettiva* di F. ENRIQUES. Bollettino di bibl. e storia delle scienze matematiche, T. I, 1898, pag. 11-15.
- 1899 - 72. *Sophus Lie*; Cenni, 26 febbraio 1899, Atti Acc. Torino, XXXIV, pag. 363-366; e Bollettino di bibl. e storia delle scienze matematiche, II, pag. 68-75.

-
73. Relazione sulla Memoria del prof. M. PIERI intitolata: *Della geometria elementare come sistema ipotetico-deduttivo*; 14 maggio 1899, relatori E. D'OVIDIO e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XXXIV, pag. 760-762.
74. *Intorno ai punti di Weierstrass di una curva algebrica*; agosto 1899, Rend. Acc. Lincei, (5), VIII₂, pag. 89-91.
- 1900 - 75. *Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice*; ottobre 1900, Rend. Acc. Lincei, (5), IX₂, pag. 253-260.
76. Relazione sulla Memoria del prof. GINO FANO intitolata: *Nuove ricerche sulle congruenze di rette del 3° ordine prive di linea singolare*; 30 dicembre 1900, relatori E. D'OVIDIO e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XXXVI, pag. 278-279.
- 1901 - 77. Relazione sulla Memoria del dott. FRANCESCO SEVERI: *Sopra alcune singolarità delle curve di un iperspazio*; 13 gennaio 1901, relatori E. D'OVIDIO e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XXXVI, pag. 380-381.
78. Relazione sulla memoria del prof. EMILIO VENERONI: *Sui connessi bilineari fra punti e rette nello spazio ordinario*; 10 marzo 1901, relatori E. D'OVIDIO e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XXXVI, pag. 615-616.
79. *Un'osservazione relativa alla riducibilità delle trasformazioni Cremoniane e dei sistemi lineari di curve piane per mezzo di trasformazioni quadratiche*; marzo 1901, Atti Acc. Torino, XXXVI, pag. 645-651.
- 1902 - 80. Relazione sulla Memoria del dott. FRANCESCO SEVERI intitolata: *Sulle intersezioni delle varietà algebriche, e sopra i loro caratteri e singolarità proiettive*; 2 febbraio 1902, relatori E. D'OVIDIO e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XXXVII, pag. 267-269.
81. Relazione sulla Memoria di G. Z. GIAMBELLI intitolata: *Risoluzione del problema degli spazi secanti*; 13 giugno 1902, relatori E. D'OVIDIO e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XXXVII, pag. 733.
- 1903 - 82. *Congetture intorno all'influenza di Girolamo Saccheri sulla formazione della geometria non-Euclidea*; aprile 1903, Atti Acc. Torino, XXXVIII, pag. 535-547.
83. Relazione sulla Memoria del dott. FRANCESCO SEVERI, intitolata: *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica, e sopra certe classi di superficie*; 24 maggio 1903, relatori G. MORERA e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XXXVIII, pag. 764-766.
- 1904 - 84. Relazione sulla Memoria del dott. UMBERTO PERAZZO intitolata: *Sull'incidenza di rette, piani e spazi ordinari in uno spazio a cinque dimensioni, e su alcune corrispondenze birazionali fra piani e spazi ordinari*; 17 gennaio 1904, relatori G. MORERA e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XXXIX, pag. 355.
85. Relazione sulla Memoria del dott. BEPPO LEVI intitolata: *Fondamenti della geometria proiettiva*, 17 aprile 1904, relatori G. MORERA e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XXXIX, pag. 716-717.
86. *La geometria d'oggi e i suoi legami con l'analisi*; 13 agosto 1904, Verhandlungen des 3^{en} intern. Math.-Kongress in Heidelberg, pag. 109-120; e Rend. Palermo, XIX (1905), pag. 81-83.
87. *On some tendencies in geometric investigations*; Bull. Amer. Math. Society, (2) X, pag. 442-468 (traduz. del n. 46).

-
- 1905 - 88. Relazione sulla Memoria del prof. MARIO PIERI: *Nuovi principi di geometria proiettiva complessa*; 5 febbraio 1905, relatori G. PEANO e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XL, pag. 378-379.
89. *Sur la génération projective des surfaces cubiques*; Extrait d'une lettre adressée à M. le prof. R. STURM; 25 marzo 1905, Archiv der Math. u. Ph., (3) X (1906), pag. 209-215.
90. Geometria dzisiejsza i jej związki z Analizą, 1905, Abitka z *Wiadomości matematycznych*, T. IX, Warszawa, pag. 7-41, (traduzione del n. 86).
91. Relazione sulla Memoria del prof. UGO AMALDI intitolata: *I gruppi conformi reali nello spazio*; 11 giugno 1905, relatori G. MORERA e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XL, pag. 974.
- 1906 - 92. Relazione sulla Memoria del prof. UGO AMALDI: *Sui gruppi continui infiniti di trasformazioni di contatto dello spazio*; 17 giugno 1906, relatori C. SOMIGLIANA e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XLI, pag. 1114-1115.
- 1907 - 93. *Monge e le congruenze generali di rette*; Bibl. Math., (3) VIII, pag. 321-324.
94. *Le congruenze rettilinee W aderenti a due superficie rigate*; marzo 1907, Atti Acc. Torino, XLII, pag. 539-550.
95. *Su una classe di superficie degli iperspazi, legata con le equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine*; giugno 1907, Atti Acc. Torino, XLII, pag. 1047-1079.
96. Relazione intorno alla Memoria del dott. UMBERTO PERAZZO intitolata: *Sopra alcune varietà di rette e in particolare su vari tipi di complessi cubici*; 15 dicembre 1907; relatori C. SOMIGLIANA e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XLIII, pag. 252.
- 1908 - 97. M. NOETHER, H. POINCARÉ, C. SEGRE, Relazione del concorso internazionale per la « Medaglia Guccia »; febbraio 1908, Atti del IV Congresso intern. dei Mat., I, pag. 209-216; e Rend. Palermo, XXVI, pag. 145-151.
98. *Sulla generazione delle superficie che ammettono un doppio sistema coniugato di coni circoscritti*; giugno 1908, Atti Acc. Torino, XLIII, pag. 985-997.
99. Relazione sulla Memoria di G. Z. GIAMBELLI intitolata: *Risoluzione del problema generale numerativo per gli spazi plurisecanti di una curva algebrica*; 14 giugno 1908, relatori G. MORERA e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XLIII, pag. 1165.
100. *Complementi alla teoria delle tangenti coniugate di una superficie*; novembre 1908, Rend. Acc. Lincei, (5) XVII₂, pag. 405-412.
- 1909 - 101. Relazione intorno alla Memoria del dott. A. COMESSATTI: *Sulle curve doppie di genere qualunque, e particolarmente sulle curve ellittiche doppie*; 21 marzo 1909, relatori E. D'OVIDIO e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XLIV, pag. 509-510.
- 1910 - 102. *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*; 22 marzo 1910, Rend. Palermo, XXX, pag. 87-121.
103. Aggiunta alla Memoria *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*; 9 luglio 1910, Rend. Palermo, XXX, pag. 246-348.
- 1911 - 104. Relazione sulla Memoria del sig. M. STUYVAERT, *Un complexe cubique de droites*; 17 dicembre 1911, relatori E. D'OVIDIO e C. SEGRE, Atti Acc. Torino, XLV₄I, pag. 219-220.
- 1912 - 105. *Le geometrie proiettive nei campi di numeri duali*; gennaio 1912, Atti Acc. Torino, XLVII, Nota I, pag. 308-327, Nota II, pag. 384-405.

-
- 1913** - 106. *Sulle congruenze rettilinee W di cui una od ambe le falde focali sono rigate*; dicembre 1913. Atti Acc. Torino, XLIX, pag. 291-303.
- 1915** - 107. Relazione intorno alla Memoria del dott. ETTORE DEL VECCHIO: *Sulle equazioni*
 $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(xy)$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \varphi(xy)$; 11 aprile 1915, relatori E. D'OVIDIO e C. SEGRE,
 Atti Acc. Torino, I, pag. 839.
- 1916** - 108. Relazione sul concorso al Premio Reale per la Matematica del 1913; commissari:
 E. BERTINI, L. BIANCHI, S. PINCHERLE, V. VOLTERRA, C. SEGRE (relatore); 6 gennaio
 1916, Atti Acc. Lincei, Rendiconti, Adunanze solenni, III pag. 23-33.
109. *Su una generazione dei complessi quadratici di rette del Battaglini*; ottobre 1916, Rend.
 Palermo, XLII, pag. 85-93.
- 1917** - 110. *Sui complessi lineari di schiere rigate, o regoli*; marzo 1917, Rend. Acc. Lincei,
 (5) XXVI₁, pag. 341-344.
111. *Commemorazione del socio nazionale Giuseppe Veronese*; 4 novembre 1917, Rend. Acc.
 (5) XXVI₂, pag. 249-256.
112. *Sui complessi lineari di piani nello spazio a 5 dimension.*; Annali di Mat., (3) XXVII,
 pag. 75-123.
- 1918** - 113. *Sulla geometria delle schiere rigate o regoli, e in particolare sui complessi lineari
 di tali enti*; Annali di Mat., (3) XXVII, pag. 151-181.
114. *Mehrdimensionale Räume*; Enzyklopädie der math., Wiss., IIIc 7, pag. 769-972.
115. *Su alcune classi particolari di sistemi continui di quadriche, e sui rispettivi involuppi.*
 Scritti matematici offerti ad ENRICO D'OVIDIO. Torino, Bocca, pag. 1-21.
116. *Le previsioni*; Discorso inaugurale, novembre 1918, Annuario della R. Università di
 Torino, 1918-19, pag. 11-25.
- 1919** - 117. *I connessi bilineari alternati di coppie di rette*; novembre 1919, Rend. Palermo,
 XLIV, pag. 139-166.
118. *Un principio di riduzione nello studio delle corrispondenze algebriche*; novembre 1919,
 Rend. Acc. Lincei, (5) XXVIII₂, pag. 308-312.
- 1920** - 119. *H. G. Zeuthen*; cenno commemorativo, 25 gennaio 1920, Atti Acc. Torino, LV,
 pag. 327-328.
120. *Sulle corrispondenze quadrilineari tra forme di prima specie e su alcune loro rappre-
 sentazioni spaziali*; Annali di Math., (3) XXIX, pag. 105-140.
- 1921** - 121. *Sui fochi di 2° ordine dei sistemi infiniti di piani e sulle curve iperspaziali con
 una doppia infinità di piani plurisecanti*; febbraio 1921, Rend. Acc. Lincei, (5) XXX₂,
 pag. 67-71.
122. *Le linee principali di una superficie di S_5 e una proprietà caratteristica della superficie
 di Veronese*; Rend. Acc. Lincei, (5) XXX₁, Nota I, marzo 1921, pag. 200-203; Nota II,
 aprile 1921, pag. 227-231.
123. *Le superficie degli iperspazi con una doppia infinità di curve piane o spaziali*; giugno
 1921, Atti Acc. Torino, LVI, pag. 143-157.

-
- 1922 - 124. *Le superficie degli iperspazi con una doppia infinità di curve spaziali*; Nota II, giugno 1922, Atti Acc. Torino, LVII, pag. 575-585.
125. *Max Noether e Hermann Schwarz*; 8 gennaio 1922, Atti Acc. Torino, LVII, pag. 161-163.
126. *Commemorazione del socio straniero Carlo Teodoro Reye*; 2 aprile 1922, Rend. Acc. Lincei, (5) XXX₁, pag. 269-72.
- 1924 - 127. *Sugli elementi lineari che hanno comuni la tangente e il piano osculatore*; 13 aprile 1924; Rend. Acc. Lincei, (5) 33₁, pag. 325-329.
128. *Le curve piane d'ordine n circoscritte ad un $(n+1)$ -latero completo di tangenti ed una classe particolare di superficie con doppio sistema coniugato di coni circoscritti*. Atti Acc. Torino, LIX, pag. 303-320.
-