# Un teorema di limite

di Onorato Nicoletti (a Pisa)

**1.** Sia $\varphi(\alpha, \beta, \gamma; n)$ una funzione reale delle quattro variabili $\alpha, \beta, \gamma, n$, definita per i valori interi e non negativi di queste variabili; e fissato per $n$ un valore positivo arbitrario, si consideri la disuguaglianza:

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma; n) \geq 0, \tag{1}$$

od anche l'uguaglianza:

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma; n) = 0; \tag{2}$$

ed ammettiamo che per l'una o, rispettivamente, per l'altra di queste relazioni siano soddisfatte le condizioni seguenti:

$\alpha$) Per ogni valore determinato di $n$, la (1) (la (2)) ha un numero *finito* $\Omega(n)$ di soluzioni $(\alpha\beta\gamma)$ in numeri interi e non negativi;

$\beta$) ad ogni soluzione $(\alpha\beta\gamma)$ è associato, con una legge determinata, un numero reale e non negativo $p_{\alpha\beta\gamma}$ (oppure $p_{\alpha\beta\gamma;\,n}$, se questo numero dipende anche dal numero $n$) che si dirà il *peso* della soluzione $(\alpha\beta\gamma)$; ed indichiamo con

$$H(n) = \sum_{(n)} p_{\alpha\beta\gamma}, \quad \left(H(n) = \sum_{(n)} p_{\alpha\beta\gamma,\, n}\right) \tag{3}$$

la somma dei pesi delle soluzioni della (1) (o della (2)) corrispondenti ad un valore determinato di $n$; ammettiamo che si abbia

$$\lim_{n \to \infty} H(n) = +\infty; \tag{4}$$

$\gamma$) sia $h$ un intero positivo arbitrario; ed indichiamo con $\Omega(n, h)$ le soluzioni della (1), o della (2), per le quali sono soddisfatte anche le relazioni complementari

$$\alpha \geq h, \quad \beta \geq h, \quad \gamma \geq h; \tag{$1_h$}$$

(aggiungiamo cioè le $(1)_h$ alla (1) o alla (2)); e diciamo

$$H(n, h) = \sum_{(n,\, h)} p_{\alpha\beta\gamma,\, n}, \tag{$3_h$}$$

la somma dei pesi corrispondenti a queste soluzioni; ammettiamo che si abbia, per qualunque valore determinato di $h$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H(n,\, h)}{H(n)} = 1. \tag{5}$$

Così, ad esempio, sia $\varphi(\alpha,\, \beta,\, \gamma;\, n) = n - (\alpha + \beta + \gamma)$, e si abbia l'uguaglianza:

$$\varphi(\alpha,\, \beta,\, \gamma;\, n) = n - (\alpha + \beta + \gamma) = 0.$$

Facendo successivamente $\alpha = n,\; n-1, \ldots.\, 2,\; 1,\; 0$, si ha subito

$$\Omega(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots. + (n+1) = \binom{n+2}{2};$$

ed insieme per $n \geq 3h$,

$$\Omega(n,\, h) = \Omega(n - 3h) = \binom{n - 3h + 2}{2};$$

se infatti valgono le $(1)_h$, posto $\alpha = \alpha' + h$, $\beta = \beta' + h$, $\gamma = \gamma' + h$, sarà $\alpha' \geq 0$, $\beta' \geq 0$, $\gamma' \geq 0$ ed $\alpha' + \beta' + \gamma' = n - 3h$.

Se si pone quindi $p_{\alpha\beta\gamma} = 1$, è $H(n) = \Omega(n)$, $H(n,\, h) = \Omega(n,\, h)$ e varranno le relazioni (4) e (5).

Come altro esempio sia ancora $\varphi(\alpha,\, \beta,\, \gamma;\, n) = n - (\alpha + \beta + \gamma)$, ma si abbia la disuguaglianza

$$\varphi(\alpha,\, \beta,\, \gamma;\, n) = n - (\alpha + \beta + \gamma) \geq 0;$$

sia ancora $p_{\alpha\beta\gamma} = 1$. Questa disuguaglianza equivale alle $n+1$ relazioni $\alpha + \beta + \gamma = i (0 \leq i \leq n)$; si ha quindi ora

$$\Omega(n) = \sum_0^n{}_i \binom{i+2}{2} = \frac{1}{2} \sum_0^n{}_i (i^2 + 3i + 2) = \frac{1}{6}(n+1)(n^2 + 5n + 6);$$

ed ancora, per $n \geq 3h$, $\Omega(n,\, h) = \Omega(n - 3h)$; valgono quindi ancora le relazioni (4) e (5); etc.

**2.** Sia ora $f(xyz)$ una funzione delle tre variabili (reali o complesse) $x,\, y,\, z$, la quale sia definita in un campo $C$ di queste variabili e sia *limitata* in $C$, per tutti i punti $(xyz)$ del campo $C$ si abbia cioè $|f(xyz)| < A$, dove $A$ è un numero determinato e finito; e, indicando con $P_0 \equiv (abc)$ un punto del campo $C$, la $f(xyz)$, quando il punto $P \equiv (xyz)$ tende, nel campo $C$, al punto $P_0 \equiv (abc)$, *tenda ad un limite determinato e finito* $L$. Questo accadrà in particolare quando la $f(xyz)$ sia continua nel punto $P_0$; è allora $L = f(P_0) = f(abc)$.

Siano inoltre

$$(6) \qquad a_i,\ b_k,\ c_l,\quad (i,\ k,\ l = 0,\ 1,\ 2 \ldots .p \ldots .)$$

tre successioni, tali che il punto $(a_i b_k c_l)$ appartenga sempre al campo $C$; e si abbia inoltre

$$(6') \qquad \lim_{n \to \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \to \infty} b_n = b, \quad \lim_{n \to \infty} c_n = c;$$

e colle notazioni precedenti, poniamo:

$$(7) \qquad \theta(n) = \frac{1}{H(n)} \sum_{(n)} p_{\alpha\beta\gamma,\,n} f(a_\alpha b_\beta c_\gamma),$$

dove la somma è estesa ancora a tutte le soluzioni $(\alpha\beta\gamma)$ (in numeri interi e non negativi) della (1) (o della (2)).

*In queste ipotesi, si ha l'uguaglianza*

$$(8) \qquad \lim_{n \to \infty} \theta(n) = L$$

*e, (quando la* f *sia continua nel punto* $\mathrm{P}_0 \equiv (\mathrm{abc})$)

$$(8') \qquad \lim_{n \to \infty} \theta(n) = f(abc).$$

Per dimostrare questo teorema, indichiamo con $\sigma$ un numero positivo arbitrario; e determiniamo un numero intero $h$, tale che per $i \geq h$, $k \geq h$, $l \geq h$, si abbia nelle (6)

$$(6'') \qquad a_i = a + \theta\sigma, \quad b_k = b + \theta'\sigma, \quad c_l = c + \theta''\sigma,$$

con $|\theta|$, $|\theta'|$, $|\theta''| < 1$; e dividiamo la somma del 2° membro della (7) in due parti $\Sigma'$, $\Sigma''$, la prima delle quali, $\Sigma'$, contenga i termini corrispondenti a quelle soluzioni della (1) (o della (2)), nelle quali una almeno delle $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ è minore di $h$, ($\Sigma'$ conterrà quindi $H(n) - H(n, h)$ termini), l'altra $\Sigma''$ contenga tutti gli altri termini; e poniamo corrispondentemente $\theta(n) = A_n + B_n$.

Abbiamo allora, poichè $|f(xyz)| < A$ nel campo $C$:

$$|A_n| < A \cdot \frac{H(n) - H(n, h)}{H(n)} = A\left[1 - \frac{H(n, h)}{H(n)}\right]$$

sarà perciò per la (5) $\lim_{n \to \infty} A_n = 0$; preso quindi un numero $\varepsilon$ positivo arbitrario, potrà determinarsi un intero $n_1$ (che dipenderà anche da $h$) tale che per $n \geq n_1$ sarà

$$(9') \qquad |A_n| < \varepsilon.$$

Consideriamo ora un termine qualunque della somma $B_n$; si avranno le (6″) cioè il punto $(a_\alpha b_\beta c_\gamma)$ sarà (nel campo $C$ e) nell'intorno cubico $\Gamma_\sigma$ di lato $2\sigma$ del punto $P_0 \equiv (abc)$, e poichè si ha $\lim_{P \to P_0} f(P) = L$, preso ancora $\varepsilon$ positivo arbitrario, possiamo determinare $\sigma$ in guisa che in tutti i punti di $C$ che appartengano a $\Gamma_\sigma$, si abbia

$$f(xyz) = L + \eta\varepsilon \quad \text{con} \quad |\eta| < 1. \tag{9″}$$

Determinato così il numero $\sigma$, determineremo $h$ e poi $n_1$, in guisa che per $i, k, l \geq h$ valgano le (6″) e per $n \geq n_1$ la disuguaglianza (9′).

È allora, con notazioni evidenti:

$$B_n = \frac{1}{H(n)} \Sigma'' p_{\alpha\beta\gamma,\, n} f(a_\alpha b_\beta c_\gamma) = \frac{1}{H(n)} \Sigma'' p_{\alpha\beta\gamma,\, n} \{ L + \eta_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon \} =$$

$$= L \frac{H(n,\, h)}{H(n)} + \frac{\varepsilon}{H(n)} \Sigma'' p_{\alpha\beta\gamma,\, n} \eta_{\alpha\beta\gamma}\,; \qquad |\eta_{\alpha\beta\gamma}| < 1\,;$$

e poichè le $p_{\alpha\beta\gamma,\, n}$ sono reali e non negative, posto

$$\eta = \frac{1}{H(n)} \Sigma'' p_{\alpha\beta\gamma,\, n} \eta_{\alpha\beta\gamma}\,,$$

è $|\eta| < 1$; potremo poi determinare un intero $n_2$ tale che per $n \geq n_2$ si abbia $\frac{H(n,\, h)}{H(n)} = 1 + \eta' \frac{\varepsilon}{L}$ con $|\eta| < 1$; sarà allora per $n \geq n_2$

$$B_n = L + \omega\varepsilon \quad \text{con} \quad |\omega| < 2\,; \tag{9‴}$$

detto infine $n_0$ il maggiore dei due numeri $n_1$ ed $n_2$, sarà per $n \geq n_0$

$$\theta(n) = A_n + B_n = L + \lambda\varepsilon\,, \quad \text{con} \quad |\lambda| < 3\,; \tag{10}$$

donde, poichè $\varepsilon$ è arbitrario, segue la (8).

Il teorema è così dimostrato.

**3.** *Osservazioni e complementi.*

*a*) Si può dare al teorema dimostrato una forma molto semplice.

Nelle ipotesi precedenti i punti $(a_\alpha b_\beta c_\gamma)$ del campo $C$ formano un gruppo infinito $G$, il quale ha in $P_0 \equiv (abc)$ un punto limite; e, ad es., la disuguaglianza $\varphi(\alpha, \beta, \gamma; n) \geq 0$ stacca dal gruppo $G$, per ogni valore di $n$, un sottogruppo finito $\Gamma_n$, di $\Omega_n$ punti; sia inoltre $\Omega(n, h)$ il numero dei punti di $\Gamma_n$ che cadono in un intorno $\Delta_h$, assegnato arbitrariamente, del punto $P_0$. Attribuiamo a ciascuno dei punti di $\Gamma_n$ un peso $p_{\alpha\beta\gamma, n}$, reale e non negativo, e detto $H(n)$ il peso totale del gruppo $\Gamma_n$, $H(n, h)$ quello dei punti di $\Gamma_n$ che cadono nell'intorno $\Delta_h$, sia $\lim\limits_{n\to\infty} H(n) = +\infty$, ed insieme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{H(n, h)}{H(n)} = 1$.

Diamo infine ad ogni punto $(a_\alpha b_\beta c_\gamma)$ di $\Gamma_n$ la *massa* $f(a_\alpha b_\beta c_\gamma)$ e consideriamo la *media ponderata* $\theta(n)$ delle masse di $\Gamma_n$. Il teorema dimostrato dice che questa media $\theta(n)$, quando $n$ tende all'infinito, tende al limite $L$ (o ad $f(abc)$).

*b*) Questa forma di enunciare il teorema conduce facilmente ad alcune estensioni notevoli.

Così, ad esempio, invece di una, si abbia un sistema di $g$ relazioni

$$(1') \qquad \varphi_i(\alpha, \beta, \gamma;\ m, n, \ldots., p) \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots., g)$$

le quali contengano (oltre le $\alpha$, $\beta$, $\gamma$) $k \geq 1$ parametri $m$, $n, \ldots.\ p$; le $\varphi_i$ sieno definite per i valori interi e non negativi dei loro argomenti e soddisfino alle condizioni (analoghe alle $\alpha$), $\beta$), $\gamma$) del n.° 1):

$\alpha'$) per ogni sistema $(m, n, \ldots.\ p)$ di valori interi non negativi le relazioni (1') hanno un numero finito $\Omega(m, n, \ldots.\ p)$ di soluzioni $(\alpha, \beta, \gamma)$ in numeri interi, non negativi.

$\beta'$) Assegnata ad ogni soluzione $(\alpha, \beta, \gamma)$ un peso, reale e non negativo, $p_{\alpha\beta\gamma}$ (o $p_{\alpha\beta\gamma;\, m, n, \ldots., p}$) la somma dei pesi $H(m, n, \ldots.\ p)$ tenda all'infinito positivo, quando $m$, $n, \ldots.\ p$ tendono *tutti* a $+\infty$; preso cioè un numero positivo $M$ arbitrario, si possa determinare un intero $k_M$, tale che quando si abbia $m \geq k_M$, $n \geq k_M, \ldots.,\ p \geq k_M$, sia sempre $H(m, n, \ldots., p) > M$, scriveremo:

$$(4') \qquad \lim H(m, n, \ldots., p) = +\infty \qquad (m \to \infty,\ n \to \infty, \ldots.,\ p \to \infty).$$

$\gamma'$) Sia $h$ un intero positivo arbitrario; e si aggiungano alle (12) le disuguaglianze $\alpha \geq h$, $\beta \geq h$, $\gamma \geq h$. Avendo i simboli $\Omega(m, n, \ldots.\ p;\ h)$, $H(m, n, \ldots.\ p;\ h)$ significati evidenti, si abbia ancora

$$(4')_h \qquad \lim H(m, n, \ldots., p;\ h) = +\infty \qquad (m \to \infty,\ n \to \infty, \ldots.,\ p \to \infty.$$

ed insieme

$$(5') \qquad \lim \frac{H(m, n, \ldots., p;\ h)}{H(m, n, \ldots., p)} = 1, \qquad (m \to \infty,\ n \to \infty, \ldots.,\ p \to \infty).$$

Posto allora

$$(7') \qquad \theta(m, n, \ldots., p) = \frac{1}{H(m, n, \ldots., p)} \Sigma p_{\alpha\beta\gamma} f(a_\alpha b_\beta c_\gamma)$$

dove la somma è estesa a tutte le $\Omega(m, n, \ldots, p)$ soluzioni delle (1'), si ha

$$\lim \theta(m, n, \ldots, p) = L \qquad (m \to \infty,\ n \to \infty, \ldots,\ p \to \infty). \tag{8''}$$

Possiamo anche supporre che nelle successioni (6) gli indici $i$, $k$, $l$ possano prendere anche valori (interi) negativi, avendosi ora:

$$\lim_{|i| \to +\infty} a_i = a, \quad \lim_{|k| \to +\infty} b_k = b, \quad \lim_{|l| \to +\infty} c_l = c; \tag{6''}$$

e che nelle (1') sia le variabili $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sia le $m$, $n, \ldots$, $p$, possano prendere anche valori interi negativi; e considerando in questa ipotesi le soluzioni delle (1') per le quali è ora $|\alpha| \geq h$, $|\beta| \geq h$, $|\gamma| \geq h$, valgano ancora la (4'), $(4')_h$, (5'), quando i parametri $m$, $n, \ldots$, $p$, tendono a $\pm\infty$; si avrà ancora la (8''), per $m$, $n, \ldots$, $p$ che tendono ora a $\pm\infty$.

*c)* Abbiamo supposto che i pesi $p_{\alpha\beta\gamma}$ (o $p_{\alpha\beta\gamma,\,n}$) siano numeri reali e non negativi, ma è facile vedere che essi possono supporsi anche complessi, quando, in luogo delle (4) e (5) si pongano le condizioni seguenti.

Per semplicità di scrittura) poniamo $p'_{\alpha\beta\gamma} = |p_{\alpha\beta\gamma}|$ ed indichiamo cogli accenti le quantità tutte relative alle $p'_{\alpha\beta\gamma}$; ammettiamo allora che si abbiano le relazioni;

$$\lim_{n \to \infty} H'(n) = \infty, \tag{3''}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{H'(n, h)}{H'(n)} = 1; \tag{4''}$$

inoltre, indicando con $\Lambda$ un numero positivo determinato, si abbia, per $n$ qualunque, la disuguaglianza

$$H'(n) < \Lambda \cdot |H(n)|. \tag{11}$$

Da questa segue, che sarà

$$\lim_{n \to \infty} |H(n)| = +\infty;$$

posto inoltre

$$K(n, h) = H(n) - H(n, h); \quad K'(n, h) = H'(n) - H'(n, h),$$

sarà per $h$ qualunque

$$|K(n, h)| \leq K'(n, h); \quad \lim_{n \to \infty} \frac{K'(n, h)}{H'(n)} = 0$$

ed anche per la (11):

$$\lim_{n \to \infty} \frac{K'(n, h)}{H(n)} = 0, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{K(n, h)}{H(n)} = 0.$$

Riprendiamo ora la dimostrazione del n.° 2; colle notazioni precedenti avremo

$$|A_n| < A \cdot \frac{K'(n,h)}{|H(n)|}, \quad B_n = L\left(1 - \frac{K(n,h)}{H(n)}\right) + \eta\varepsilon,$$

essendo ancora

$$\eta = \frac{1}{H(n)} \Sigma'' p_{\alpha\beta\gamma} \eta''_{\alpha\beta\gamma}$$

e quindi sarà

$$|\eta| \leq \frac{H'(n,h)}{|H(n)|} < \Lambda \frac{H'(n,h)}{H'(n)} < \Lambda$$

si avranno perciò ancora le (9'), (9''), (9''') e quindi la (10), con $|\lambda| \leq 2 + \Lambda$; e perciò varrà ancora la (8).

*d*) Invece di considerare *una* funzione $f(xyz)$ possiamo anche considerare una successione di funzioni $F_n(xyz)$, $(n = 1, 2, ....)$ le quali siano ancora definite e *limitate* nel campo $C$ (sia cioè, per un punto $(xyz)$ arbitrario in $C$ e *per qualunque n*, $|F_n(xyz)| < A$, essendo $A$ un numero finito) e, quando il punto $(xyz)$ tende in $C$ al punto $P_0 \equiv (abc)$ ed $n$ tende a $+\infty$, tendano ad un limite determinato e finito $L$; posto allora:

$$\theta_1(n) = \frac{1}{H(n)} \Sigma p_{\alpha\beta\gamma,\,n} F_n(a_\alpha b_\beta c_\gamma), \tag{7''}$$

si avrà ancora:

$$\lim_{n \to \infty} \theta_1(n) = L. \tag{8'''}$$

Riprendiamo infatti il ragionamento del n.° 2; varrà ancora la (9'). Consideriamo inoltre l'intorno cubico $\Gamma_\sigma$, di lato $2\sigma$, del punto $P_0 \equiv (abc)$; fissato $\varepsilon$ positivo arbitrario, potremo, per le ipotesi fatte, determinare $\sigma$ ed *un intero* $n_3$, tali che quando il punto $(a_\alpha b_\beta c_\gamma)$ è in $\Gamma_\sigma$ ed $n \geq n_3$, si abbia

$$F_n(a_\alpha b_\beta c_\gamma) = L + \eta\varepsilon, \quad \text{con} \quad |\eta| < 1; \tag{9''}$$

dopodichè basta prendere per $n_0$ il maggiore dei numeri $n_1$, $n_2$, $n_3$, per avere ancora la (10) per $n \geq n_0$, e quindi la (8''').

In particolare potremo supporre che la successione $F_n(xyz)$ tenda uniformemente nel campo $C$ ad una funzione $f(xyz)$, la quale sia continua nel punto $P_0 \equiv (abc)$; è allora $L = f(abc)$.

*e*) Abbiamo supposto che la $f(xyz)$ tenda, per $P \to P_0$, ad un limite determinato e finito $L$; ma, *con alcune restrizioni essenziali*, il teorema può valere ancora, quando la $f(xyz)$ tenda all'infinito, per $P \to P_0$ in $C$.

Supponiamo, ad esempio, che la $f(xyz)$ sia in $C$ reale e positiva e sia $\lim_{P \to P_0} f(xyz) = +\infty$, i pesi $p_{\alpha\beta\gamma}$ siano reali e non negativi e valgano ancora le (3) e (4).

Ogni termine di $\theta(n)$ è allora positivo e quindi sarà, colle notazioni del n.° 2, $\theta(n) > B_n$. Sia ora $M$ positivo, grande a piacere; e si prenda $h$ in guisa che per $\alpha \geq h$, $\beta \geq h$, $\gamma \geq h$ si abbia $f(a_\alpha b_\beta c_\gamma) > M$; è allora

$$B_n > \frac{H(n, h)}{H(n)} M$$

e se $n_0$ è tale che per $n \geq n_0$ sia ad es. $\frac{H(n, h)}{H(n)} > \frac{1}{2}$, sarà per $n \geq n_0$

$$\theta(n) > B_n > \frac{M}{2};$$

e quindi sarà $\lim_{n \to \infty} \theta(n) = +\infty$.

*f*) Il teorema si estende poi subito al caso di $p(\geq 1)$ successioni

$$a_i, \; b_k, \; c_l \ldots. e_t \quad (i, \; k, \; l, \; t = 1, \; 2 \ldots.)$$

convergenti a limiti determinati e finiti $a$, $b$, $c$,...., $e$, e ad una funzione $f(x_1 x_2 \ldots. x_p)$ (od ad una successione $f_n(x_1 x_2 \ldots. x_p)$) la quale sia definita e limitata in un campo $C$ dello $S_p \equiv (x_1 x_2 \ldots. x_p)$, al quale appartengano tutti i punti $(a_i b_k c_l \ldots. e_t)$ e che, quando il punto $P \equiv (x_1 x_2 \ldots. x_p)$ tende in $C$ al punto $P_0 \equiv (abc \ldots. e)$, tenda ad un limite determinato e finito $L$.

Se poi una o più tra le successioni $a_i, b_k, \ldots., e_t$ (ad es. la $a_i$) tende all'infinito, basta porre $a_i' = \frac{1}{a_i}$, per ridursi al caso precedente.

**4.** *Esempi.*

*a*) Sia $p = 1$; $\varphi(\alpha, n) = n - \alpha \geq 0$, $\alpha \geq 1$, $p_\alpha = 1$; è $\Omega(n) = H(n) = n$; $\Omega(n, h) = H(n, h) = n - h + 1$.

Poniamo $f(x) = x$; abbiamo il teorema di CAUCHY:

*Se è*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a, \quad \text{\textit{è anche}} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots. + a_n}{n} = a;$$

ed il teorema vale anche quando $a_n$ sia reale e positiva e $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$.

*b*) Sia ancora $p = 1$, $\varphi(\alpha, n) = n - \alpha \geq 0$, $\alpha \geq 1$; e si ponga $p_\alpha = g_\alpha - g_{\alpha-1}$, dove $g_n$ è una successione (reale o complessa) divergente, tale cioè che sia

$\lim_{n \to \infty} g_n = \infty$; si abbia inoltre per essa, con $n$ qualunque $\sum_1^n {}_i |g_i - g_{i-1}| < \Lambda |g_n|$, essendo $\Lambda$ un numero finito. È allora, colle notazioni del n.° 3, $c$)

$$H(n) = g_n, \quad H'(n) = \sum_1^n {}_i |g_i - g_{i-1}|, \quad K'(n, h) = \sum_1^{h-1} {}_i |g_i - g_{i-1}|$$

e valgono le (3″), (4″) e la (11).

Posto ancora $f(x) = x$, si ha il teorema di JENSEN:

*Sia* $\lim \mathrm{a}_n = \mathrm{a}$; *e sia* $\mathrm{g}_n$ *una successione (reale o complessa) divergente per* $\mathrm{n} \to \infty$, *per la quale si abbia, per* n *qualunque*

$$\sum_1^n {}_i |g_i - g_{i-1}| < \Lambda |g_n|, \tag{12}$$

*essendo* $\Lambda$ *un numero finito; posto*

$$\theta(n) = \frac{1}{g_n} \sum_1^n {}_i (g_i - g_{i-1}) a_i$$

*è* $\lim \theta(n) = a$.

Ed il teorema vale ancora, quando la successione $a_n$ sia positiva e divergente, e la $g_n$ sia una successione reale, crescente e divergente a $+\infty$.

$c$) Sia $a_n = \dfrac{b_n - b_{n-1}}{g_n - g_{n-1}}$ $(n \geq 1)$; è $\theta(n) = \dfrac{b_n}{g_n}$; si ha così il teorema:

*Sia* $\mathrm{g}_n$ *una successione divergente, per la quale valga la* (12); *e sia* $\mathrm{b}_n$ *un' altra successione; se si ha* $\lim_{n \to \infty} \dfrac{\mathrm{b}_n - \mathrm{b}_{n-1}}{\mathrm{g}_n - \mathrm{g}_{n-1}} = \mathrm{a}$, *essendo* a *un numero determinato e finito, è anche* $\lim_{n \to \infty} \dfrac{\mathrm{b}_n}{\mathrm{g}_n} = \mathrm{a}$.

E se le successioni $b_n$, $g_n$ sono crescenti e divergenti ed è

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b_n - b_{n-1}}{g_n - g_{n-1}} = +\infty, \quad \text{è anche} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{g_n} = +\infty.$$

$d$) Sia ora $p = 2$, $\varphi(\alpha, \beta) = n - (\alpha + \beta) = 0$, $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$, $p_{\alpha\beta} = 1$.

È $\Omega(n) = H(n) = n$, e per $n \geq 2h$, $\Omega(n, h) = H(n, h) = n - 2h + 1$; sono quindi soddisfatte le (3) e (4); sia poi $f(x, y) = xy$.

Abbiamo il teorema di CAUCHY:

*Se* $\mathrm{a}_n$ *e* $\mathrm{b}_n$ $(\mathrm{n} = 1, 2 \ldots.)$ *sono due successioni convergenti a due limiti determinati e finiti* a, b, *si ha:*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_n}{n} = ab;$$

e, quando i termini delle due successioni abbiano un segno costante ed una almeno di essa sia divergente e l'altra, se converge, abbia un limite diverso da zero, il teorema vale ancora, in quanto l'espressione $\frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1}{n}$ ha in questo caso per limite l'infinito positivo o negativo.

Più generalmente, se $f(x, y)$ è una funzione delle due variabili $x, y$, la quale nel punto $(ab)$ sia continua, l'espressione $\theta(n) = \frac{1}{n}\sum_1^n{}_i f(a_i, b_{n-i})$ tende al limite $f(a, b)$.

*e*) Sia ancora $p = 2$, $\varphi(\alpha, \beta) = n - (\alpha + \beta) = 0$, $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$; $p_{\alpha\beta\gamma, n} = \frac{\alpha^r \beta^s}{n^{r+s}}$, essendo $r$, $s$ due numeri reali, non negativi. È ancora $\Omega(n) = n$, e per $n \geq 2h$, $\Omega(n, h) = n - 2h + 1$; $H(n) = \frac{1}{n^{r+s}}\sum_1^n{}_i i^r(n-i)^s$; e per $n \geq 2h$:

$$K(n, h) = H(n) - H(n, h) = \frac{1}{n^{r+s}}\sum_1^h{}_i \{ i^r(n-i)^s + i^s(n-i)^r \}.$$

Ora può scriversi: $H(n) = n \cdot \frac{1}{n^{r+s+1}}\sum_1^n{}_i i^r(n-i)^s$ ed è per $r \geq 0$, $s \geq 0$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^{r+s+1}}\sum_1^n{}_i i^r(n-i)^s = B(r+1, s+1) = \int_0^s x^r(1-x)^s dx,$$

dove con $B(r+1, s+1)$ abbiamo indicato la funzione Euleriana di 1ª specie (1); è quindi $\lim_{n \to \infty} H(n) = +\infty$; ogni termine di $K(n, h)$ è poi minore di 1, e quindi è anche $K(n, h) < 2h$; ne segue: $\lim_{n \to \infty}\frac{K(n, h)}{H(n)} = 0$; le (3) e (4) sono cioè soddisfatte.

Sia ancora $f(x, y) = xy$; sarà

$$\theta(n) = \frac{1}{H(n) n^{r+s}}\sum_1^n{}_i i^r(n-i)^s a_i b_{n-i}$$

e si avrà,

$$\lim_{n \to \infty} \theta(n) = ab.$$

---

(1) Dividendo infatti l'intervallo (0....1) in $n$ parti uguali, e posto

$$f_i = \left(\frac{i}{n}\right)^r \cdot \left(1 - \frac{i}{n}\right)^s = \frac{i^r(n-i)^s}{n^{r+s}},$$

è

$$B(r+s, s+1) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\sum_1^n{}_i f_i = \lim_{n \to \infty}\frac{1}{n^{r+s+1}}\sum_1^n{}_i i^r(n-i)^s.$$

Poniamo ora

$$\alpha_i = i^r \cdot a_i, \quad \beta_k = k^s \cdot b_k; \quad \gamma(n) = \frac{\theta(n) \cdot H(n)}{n} = \frac{1}{n^{r+s+1}} \sum_1^n {}_i \alpha_i \beta_{n-i};$$

si ha il teorema (di CESARO):

*Siano* r, s *due numeri reali e non negativi, e si abbia*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\alpha_n}{n^r} = a, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{\beta_n}{n^s} = b;$$

*è anche:*

$$\lim_{n \to \infty} \gamma(n) = \lim_{n \to \infty} \frac{\alpha_1 \beta_n + \alpha_2 \beta_{n-1} + \dots + \alpha_n \beta_1}{n^{r+s+1}} = B(r+1,\ s+1) \cdot ab \ (^1);$$

ed il teorema vale anche quando ad es. le $\alpha_n$, $\beta_n$ siano positive, una delle due successioni $\frac{\alpha_n}{n^r}$, $\frac{\beta_n}{n^s}$ sia divergente a $+\infty$, e l'altra o sia divergente, o converga ad un limite positivo; in questo caso l'espressione $\gamma(n)$ ha infatti per limite l'infinito positivo.

*g*) Sia infine $p = 2$, $\varphi(\alpha, \beta, n) = n - (\alpha + \beta) \geq 0$, $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$, $p_{\alpha\beta} = 1$, $f(xy) = xy$. È $\Omega(n) = H(n) = \binom{n}{2}$ e per $n \geq 2h$, $\Omega(n, h) = H(n, h) = \binom{n - 2h + 1}{2}$; valgono quindi le (3) e (4). Si ha il teorema:

*Sia*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a; \quad \lim_{n \to \infty} b_n = b;$$

*e si ponga*

$$\theta(n) = \frac{1}{\binom{n}{2}} \Sigma a_\alpha b_\beta, \ (\alpha \geq 1, \ \beta \geq 1, \ \alpha + \beta \leq n)$$

*si ha*

$$\lim_{n \to \infty} \theta(n) = ab, \quad \text{etc.}$$

5. *a*) Consideriamo ora, in luogo delle successioni convergenti $a_n$, $b_n$, $c_n$...., delle funzioni (reali o complesse) $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$.... di una variabile reale $x$,

---

(1) Un ragionamento, un po' più minuto, dimostra la formula anche per $r$, $s$ reali, *maggiori di* $-1$.

definite in un intervallo $(x_0\,\infty)$, dove $x_0$ è un numero determinato, le quali, quando $x \to +\infty$, tendano a dei limiti determinati e finiti $a$, $b$, $c$.....

*b*) Si abbia poi, ad es. una relazione

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma;\, x) \geq 0, \tag{13}$$

nelle quattro variabili reali $(\alpha, \beta, \gamma, x)$ (od un sistema di tali relazioni) la quale, per ogni valore reale $x \geq x_0$, sia soddisfatta da tutti i punti di un campo *finito* $C_x$ dello $S_3 \equiv (\alpha\beta\gamma)$ (il quale campo $C_x$ potrà essere a tre dimensioni od anche una superficie od una linea e) che appartenga ad un campo determinato $C$ dello $S_3 \equiv (\alpha\beta\gamma)$.

Sia $p(\alpha\beta\gamma, x)$ una funzione, reale o complessa, delle quattro variabili reali $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $x$, definita per $x \geq x_0$ e per $(\alpha, \beta, \gamma)$ nel campo $C$; e consideriamo l'integrale

$$H(x) = \int_{C_x} p(\alpha\beta\gamma, x)d\omega \tag{14}$$

dove $d\omega$ è l'elemento di spazio del campo $C_x$; e ammettiamo che questo integrale sia determinato e finito per ogni $x \geq x_0$, e tenda all'infinito, quando $x \to +\infty$; posto inoltre, quando la $p(\alpha\beta\gamma, x)$ non sia reale e positiva,

$$p'(\alpha\beta\gamma, x) = |\,p(\alpha\beta\gamma, x)\,|,$$

ammettiamo che anche l'integrale

$$H'(x) = \int_{C_x} p'(\alpha\beta\gamma, x)d\omega \tag{14'}$$

sia determinato e finito per $x \geq x_0$; sarà allora $H'(x) \geq |H(x)|$ e quindi sarà anche $\lim H'(x) = +\infty$; ed ammettiamo ancora che si abbia, per ogni valore di $x$:

$$H'(x) < \Lambda H(x), \tag{14''}$$

essendo $\Lambda$ un numero finito.

Detto poi $h$ un numero positivo arbitrario, aggiungiamo alla (12) le relazioni $|\alpha| \geq h$, $|\beta| \geq h$, $|\gamma| \geq h$, e diciamo $C_{x,\,h}$, il campo ottenuto così dal campo $C_x$; e poniamo:

$$H'(x, h) = \int_{C_{x,\,h}} p'(\alpha, \beta, \gamma, x)d\omega; \tag{15}$$

ed ammettiamo infine che si abbia, per $h$ qualunque:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{H'(x, h)}{H'(x)} = 1. \tag{16}$$

*c*) Sia ora $f(\varepsilon, \eta, \zeta; x)$ una funzione delle 4 variabili $\varepsilon, \eta, \zeta; x$, definita per $x \geq x_0$ ed in un campo $\Gamma$ dello spazio $\Sigma_3 \equiv (\varepsilon, \eta, \zeta)$ il quale contenga tutti i punti $(a(\alpha), b(\beta), c(\gamma))$, dove $(\alpha\beta\gamma)$ è un punto qualunque di $C$ (ed anche il punto $P_0 \equiv (abc)$) e quando il punto $(\varepsilon\eta\zeta)$ tende in $\Gamma$ a $P_0$ ed $x \to +\infty$, la $f(\varepsilon, \eta, \zeta; x)$ tenda ad un limite determinato e finito $L$.

Poniamo allora:

$$\theta(x) = \frac{1}{H(x)} \int_{C_x} p(\alpha, \beta, \gamma; x) . f(a(\alpha), b(\beta), c(\gamma); x) d\omega; \tag{17}$$

un ragionamento affatto analogo a quello del n.° 2 dimostra la formula:

$$\lim_{x \to +\infty} \theta(x) = L; \tag{18}$$

se in particolare la $f(\varepsilon, \eta, \zeta; x)$ è una funzione $f(\varepsilon, \eta, \zeta)$ delle sole variabili $(\varepsilon, \eta, \zeta)$ definita nel campo $\Gamma$ e continua nel punto $P_0 \equiv (abc)$, sarà $L = f(a, b, c)$; e la (18) si scriverà:

$$\lim_{x \to +\infty} \theta(x) = f(abc). \tag{18'}$$

Ed hanno luogo delle osservazioni affatto analoghe a quelle del n.° 3.

*d*) Così, per fare un esempio semplicissimo, sia $a(\alpha)$ una funzione della variabile reale $\alpha$, definita per ogni valore positivo della variabile $\alpha$, integrabile in qualunque intervallo positivo finito, la quale per $\alpha \to +\infty$ tenda ad un limite determinato e finito $a$; e sia $p(\alpha, x)$ una funzione positiva delle due variabili reali $\alpha$, $x$, definita ed integrabile per i valori positivi di queste variabili.

Facciamo nella (13) $\varphi = x - \alpha$, $\alpha \geq 0$; e l'integrale

$$H(x) = \int_0^x p(\alpha, x) d\alpha$$

sia determinato e finito per $x \geq 0$ e, quando $x \to +\infty$, tenda all'infinito positivo. Posto

$$\theta(x) = \frac{1}{H(x)} \int_0^x p(\alpha, x) a(\alpha) d\alpha,$$

si ha la formula

$$\lim_{x \to +\infty} \theta(x) = a,$$

e la formula vale ancora, quando $\lim\limits_{n \to \infty} a(\alpha) = a = + \infty$.

In particolare, per $p(\alpha, x) = 1$, si ha la formola analoga a quella di CAUCHY (cfr. n.° 4, $a$) :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x a(\alpha) d\alpha = a.$$