

## Brèves communications - Kurze Mitteilungen Brevi comunicazioni - Brief Reports

Les auteurs sont seuls responsables des opinions exprimées dans ces communications. - Für die kurzen Mitteilungen ist ausschliesslich der Autor verantwortlich. - Per le brevi comunicazioni è responsabile solo l'autore. - The editors do not hold themselves responsible for the opinions expressed by their correspondents.

### Zur Bestimmung des Effektivzinsfusses

Das im Jahre 1952 mitgeteilte Verfahren zur Bestimmung des Zinsfusses bei Leib- und Zeitrenten<sup>1</sup> soll im folgenden auf die Berechnung des Effektivzinsfusses eines fest verzinslichen und an einem zum voraus feststehenden Termin rückzahlbaren Anleihens ausgedehnt werden.

Sei für die Schuld «1»

$n$  die vertragliche ganzzahlige Laufzeit,  
 $i_0$  der jährlich nachschüssig zahlbare Zins ( $i_0 =$  nomineller Zinssatz),

$K_0$  der gegebene Kurs zu Beginn der Laufzeit,

$i$  der gesuchte Effektivzinssatz, wobei  $v = 1/1 + i$ ; sofern die Schuld «1» zum Kurse 1 rückzahlbar ist, gilt die Äquivalenzgleichung

$$\begin{aligned} K_0 &= v^n + i_0 \overline{a_{\overline{n}|}}(i) \\ &= v^n - i_0 + i_0 \overline{a_{\overline{n+1}|}}(i). \end{aligned} \quad (1)$$

Aus (1) ist  $i$  zu bestimmen. Wir setzen dazu  $v = (1 + \varepsilon) v_0$  mit

$$v_0 = \frac{1}{1 + i_0}$$

und erhalten nach Entwicklung von  $(1 + \varepsilon)^n$  in die Reihe vorerst für

$$v^n = m_0 + \varepsilon m_1 + \varepsilon^2 \frac{m_2}{2!} + \dots, \quad (2)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} m_0 &= v_0^n \\ m_1 &= n v_0^n \\ m_2 &= (n^2 - n) v_0^n \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

In gleicher Weise formen wir

$$\overline{a_{\overline{n+1}|}}(i)$$

um<sup>2</sup> und erhalten

$$\overline{a_{\overline{n+1}|}}(i) = M_0 + \varepsilon M_1 + \varepsilon^2 \frac{M_2}{2!} + \dots \quad (4)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= \overline{a_{\overline{n+1}|}}(i_0) \\ M_1 &= \frac{\overline{a_{\overline{n+1}|}}(i_0) - (n+1) v_0^{n+1}}{1 - v_0} \\ M_2 &= \frac{2 M_1 - n(n+1) v_0^{n+1}}{i_0 - \frac{1 - v_0}{1 - v_0}} \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Die Beziehungen (2) und (4) in (1) eingesetzt führen

<sup>1</sup> E. ZWINGGI, Exper. 8, 258 (1952). Die vollständige Untersuchung ist unter dem Titel *Un procedimento per determinare il saggio d'interesse di rendite vitalizie e rendite certe* im G. Ist. ital. Attuari 15, 261 (1952), erschienen.

<sup>2</sup> Vgl. die Ableitungen bei E. ZWINGGI, Exper. 8, 258 (1952).

mit

$$\left. \begin{aligned} m_0 - i_0 + i_0 M_0 &= H_0 = 1 \\ m_1 + i_0 M_1 &= H_1 = \overline{a_{\overline{n}|}}(i_0) \\ m_2 + i_0 M_2 &= H_2 = \frac{2}{i_0} (H_1 - n v_0^{n-1}) \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

auf

$$\begin{aligned} K_0 &= 1 + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 \frac{H_2}{2!} + \dots \\ &= 1 + \varepsilon H_1 \left( 1 + \frac{\varepsilon H_2}{2 H_1} + \dots \right) \\ &\sim 1 + \frac{\varepsilon H_1}{1 - \frac{\varepsilon H_2}{2 H_1}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Wenn noch  $\Delta = K_0 - 1$  bezeichnet, folgt für

$$\varepsilon = \frac{2 \Delta \cdot H_1}{\Delta \cdot H_2 + 2 H_1^2} \quad (8)$$

und für  $i$

$$i = \frac{1 + i_0}{1 + \varepsilon} - 1. \quad (9)$$

Die Parameter  $H_1$  und  $H_2$  sind aus (6) sehr leicht zu ermitteln; die Annäherung in (7) gibt für die praktisch vorkommenden Dauern eine absolut ausreichende Genauigkeit, wie die folgende Zusammenstellung zeigt.

n	i <sub>0</sub> = 0,03		K <sub>0</sub> (gegeben)
	i genau	i nach (8) und (9)	
20	0,020	0,020 023	1,1635
	0,025	0,025 003	1,0779
	0,035	0,034 997	0,9289
	0,040	0,039 977	0,8641
30	0,020	0,020 044	1,2240
	0,025	0,025 005	1,1047
	0,035	0,034 995	0,9080
	0,040	0,039 958	0,8271

Die Methode ist verschiedener Verallgemeinerungen fähig, wie zum Beispiel Rückzahlung der Schuld zu einem Kurs  $\neq 1$ , Zinszahlung unterjährig, Laufzeit nicht ganzzahlig, Tilgung während der Vertragsdauer usw. Auf die allgemeine Fassung des Verfahrens werden wir anderorts eintreten.  
E. ZWINGGI

*Versicherungstechnische Abteilung der Mathematischen Anstalt der Universität Basel, den 24. Juli 1953.*

### Summary

A method for the calculation of the effective rate of interest of loans redeemable at par and bearing annual interest is represented, when the current quotation is given.