EXPERIENTIA

Vol. X - Fasc. 12 | Pag. 481–520 | 15. XII. 1954

Brèves communications - Kurze Mitteilungen
Brevi comunicazioni - Brief Reports

Les auteurs sont seuls responsables des opinions exprimées dans ces communications. – Für die kurzen Mitteilungen ist ausschliesslich der Autor verantwortlich. – Per le brevi comunicazioni è responsabile solo l'autore. – The editors do not hold themselves responsible for the opinions expressed by their correspondents.

Eine Bemerkung zur Langevin-Gleichung

Wir bezeichnen als «Langevin-Gleichung» die zuerst von LANGEVIN[1] zur Diskussion der Brownschen Bewegung benützte stochastische Differentialgleichung

$$\dot{u}(t) = -\beta\, u(t) + A(t). \tag{1}$$

Hier ist $u(t)$ die Geschwindigkeit des betrachteten «Brownschen Teilchens» zur Zeit t; $-\beta\, u(t)$ entspricht der Bremsung des Teilchens, und $A(t)$ bedeutet die zeitlich unregelmässige Störung seiner Bewegung.

In der vorliegenden Note machen wir eine Bemerkung zur Behandlung dieser Gleichung für den Fall, dass die «Bremsung» oder, allgemeiner, der der systematischen Kraft entsprechende Term nicht wie in (1) der Geschwindigkeit $u(t)$ proportional ist.

Für diese Diskussion gehen wir aus von der als Differenzengleichung geschriebenen Gleichung (1)

$$u_{\nu+1} = u_\nu (1 - \beta \Delta t) + A_\nu \Delta t \tag{2}$$

und verallgemeinern diese zu

$$u_{\nu+1} = f(u_\nu) + A_\nu \Delta t\,, \tag{3}$$

wo $f(u_\nu)$ nun nicht mehr linear zu sein braucht.

Die wechselseitigen Beziehungen zwischen dieser Differenzengleichung (3) und der ihr entsprechenden Differentialgleichung, der Verallgemeinerung von (1) im engeren Sinne, sollen hier nicht betrachtet werden[2].

Wir setzen voraus, dass die Verteilungsfunktion der stochastischen Grössen $A_\nu\, \Delta t$, beziehungsweise A_ν, zeitunabhängig ist, das heisst also, dass alle A_ν dieselbe Verteilungsfunktion besitzen; weiter setzen wir voraus, dass die A_ν untereinander und von den u_ν statistisch unabhängig sind.

Es sei nun $w_\nu(x)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte von u_ν und $\alpha(x)$ die charakteristische Funktion von $A_\nu \Delta t$[3]. Dann folgt aus (3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, w_{\nu+1}(x)\, dx = \alpha(t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{itf(x)}\, w_\nu(x)\, dx \tag{4}$$

Aus (4) folgt weiter: Konvergiert die Verteilungsfunktion der u_ν für $\nu \to \infty$ gegen $w_\infty(x) = w(x)$, so ist diese Funktion eine Lösung der Integralgleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, w(x)\, dx = \alpha(t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{itf(x)}\, w(x)\, dx\,. \tag{5}$$

Weiter ist bekanntlich einzig eine *lineare* Funktion einer normal verteilten stochastischen Grösse wieder normal verteilt. Somit folgt aus (3):

Sind die Grössen $A_\nu \Delta t$, beziehungsweise A_ν, *normal verteilt, so ist u_ν dann und nur dann normal verteilt, wenn $f(u_\nu) = a\, u_\nu + b$ ist*[1].

Setzt man also Normalverteilung von A_ν und u_ν voraus, so ist zwar in Gleichung (3) bzw. in (1) ein Ersatz von $-\beta\, u(t)$ durch $-\beta\, u(t) + \text{const}$ möglich, es verbietet sich jedoch eine weitergehende Verallgemeinerung im Sinne von (3)[2,3].

Ist aber $f(u_\nu) = a\, u_\nu + b$ und sind die A_ν normal verteilt mit der Streuung $\sigma^2(A)$, so folgt aus (3) für die Streuung von u_∞

$$\sigma^2(u_\infty) = \frac{\sigma^2(A)\, \Delta t^2}{1 - a^2}\,. \tag{6}$$

Der eine von uns (K.-F. M.) dankt dem Schweizerischen Nationalfonds für die Gewährung eines Stipendiums.

K.-F. MOPPERT und F. GRÜN

Basel, Nauenstrasse 16 [4], *und Physikalisch-Chemische Anstalt der Universität Basel, den 18. September 1954.*

Résumé

Quelques questions concernant une généralisation de l'équation de LANGEVIN sont discutées.

[1] P. LANGEVIN, C. r. Acad. Sci. *146*, 530 (1908).

[2] Vgl. zu dieser Frage: P. LÉVY, *Processus stochastiques et mouvement Brownien* (Gauthier-Villars, Paris 1948).

[3] Für diese Begriffe und die zugehörigen Rechnungen siehe zum Beispiel H. CRAMÉR, Mathematical Methods of Statistics (Princeton University Press, Princeton, 1946).

[1] Damit Konvergenz eintreten kann, muss $0 \leq a \leq 1$ sein.

[2] Sind die einzelnen $A\nu$ ihrerseits als Summen vieler statistisch unabhängiger Grössen aufzufassen, so folgt aus dem zentralen Grenzwertsatz die Normalverteilung der $A\nu$.

[3] Vgl. den ähnlichen, aber anders formulierten und anders hergeleiteten Befund von S. CHANDRSEKHAR, Rev. mod. Phys. *21*, 383 (1949).

[4] Jetzt Universität Hobart, Hobart, Tasmanien.

Kinetische Isotopeneffekte bei elektrophilen aromatischen Substitutionen

Heute wird allgemein angenommen, dass sämtliche elektrophilen aromatischen Substitutionen über einen zweistufigen Mechanismus ablaufen: