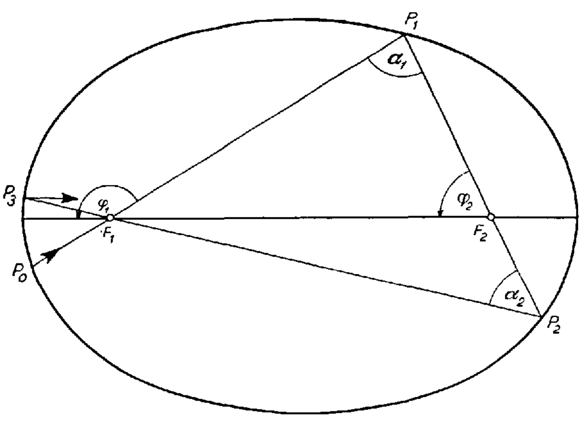
Brèves communications - Kurze Mitteilungen
Brevi comunicazioni - Brief Reports

Über einen Ausnahmefall des Wiederkehrsatzes von Poincaré

Bei der Untersuchung der Stabilität des Planetensystems fand POINCARÉ[1] den folgenden Satz, der für die *statistische Mechanik* von grundlegender Bedeutung geworden ist:

Eine inkompressible Flüssigkeit befinde sich in einem Raum von beschränktem Volumen in einer stationären Bewegung. Durchläuft ein Teilchen zur Zeit $t = 0$ den Punkt P_0, so ist es «unendlich wahrscheinlich», daß das Teilchen im Laufe seiner Bewegung immer wieder in beliebige Nähe des Punktes P_0 gelangen wird.

Wie schon POINCARÉ selbst und später auch HADAMARD und CARATHÉODORY[2] bemerkt haben, läßt sich der Begriff «unendlich wahrscheinlich» mit Hilfe des LEBESGUEschen Maßes sauber fassen: die Punkte, für die *keine Wiederkehr* im Sinne des Satzes stattfindet, bilden eine *Menge vom Maße* 0.



Bekanntlich läßt sich der Wiederkehrsatz auf ein abgeschlossenes mechanisches System anwenden, dessen Phasenraum endlich ist. Er besagt, daß der Phasenpunkt des Systems im Laufe der Bewegung immer wieder der ursprünglichen Lage beliebig nahekommen muß. Ausnahmen können stattfinden. Aber die Ausnahmepunkte des Phasenraumes bilden eine Menge vom Maße 0.

In der vorliegenden Mitteilung möchten wir auf eine solche Ausnahme zurückkommen, die von G. D. BIRKHOFF[3] in einem größeren Zusammenhang gestreift wurde. Das Beispiel besitzt den Vorteil, daß es sich, wie wir zeigen werden, mit einfachen Hilfsmitteln darlegen läßt:

Vorgelegt sei ein Billard, das von einer Ellipse begrenzt wird. Die punktförmig vorausgesetzte Kugel bewege sich auf dem horizontalen Tisch reibungsfrei, so daß sie am Rande unendlich oft reflektiert wird. Im Laufe ihrer Bewegung wird die Kugel nach dem Wiederkehrsatz jeder Phase immer wieder beliebig nahekommen. Eine Ausnahme bilden aber die Bahnen durch die Brennpunkte der Ellipse. Wir behaupten nämlich: *Wenn die Kugel durch einen Brennpunkt der Ellipse läuft, so konvergiert ihre Bahn gegen die große Achse der Ellipse.*

Zum Beweis nehmen wir an, die Bahn beginne in einem Punkte P_0 der Ellipse, der wie in der Figur außerhalb der großen Achse liegen möge.

Die Kugel laufe von P_0 aus durch den einen Brennpunkt F_1. Im Punkte P_1 der Ellipse werde sie reflektiert. Daraufhin muß die Kugel, einer bekannten Eigenschaft der Ellipse zufolge, den andern Brennpunkt F_2 passieren. Die nächste Reflexion erfolge im Punkte P_2, worauf die Kugel von neuem durch F_1 läuft, usw.

Mit φ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ bezeichnen wir den Winkel, um den man das n-te Bahnstück $P_{n-1} P_n$ im positiven Sinne drehen muß, bis es mit der großen Achse zusammenfällt. Die Winkel φ_n liegen offenbar alle im Intervall $0 \leqq \varphi_n < \pi$.

Ferner seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ die Winkel zwischen den Bahnstücken in den Punkten $P_1, P_2, \ldots$. Die Konvergenz der Bahn gegen die große Achse folgt unmittelbar, wenn wir beweisen können, daß

$$\alpha_n \to 0.$$

Um dies zu zeigen, entnehmen wir dem Dreieck $F_1F_2P_1$ die Relation $\varphi_2 = \varphi_1 - \alpha_1$ und entsprechend aus den Dreiecken $F_1F_2P_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - \alpha_n.$$

Folglich nehmen die Winkel φ_n wegen $\alpha_n \geqq 0$ monoton ab und streben gegen einen gewissen Grenzwert $\varphi \geqq 0$. Dies führt zu $\alpha_n \to 0$, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Will man die Überlegung auf $\varphi_n \to 0$ zuspitzen, so hat man auf das Dreieck $F_1F_2P_n$ hinterher den Sinussatz anzuwenden. Es ist zu beachten, daß ein kreisförmiges Billard im Gegensatz zum elliptischen keinen Ausnahmefall zum Wiederkehrsatz enthält.

ED. BATSCHELET

Mathematisches Seminar der Universität Basel, den 2. April 1948.

Summary

In an elliptical billiard there exists, in contrast to a circular one, an exception to POINCARÉ's recurrence theorem, in as much as the path of a billiard-ball that goes through a focus of the ellipse converges toward the long axis.

[1] H. POINCARÉ, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, t. 3, chap. 26, p. 140 ff.

[2] J. HADAMARD, J. Math., 5e sér. *3*, 331 (1897). – C. CARATHÉODORY, Sitzungsber. der Preuß. Akad. (1919), 2. Halbbd., p. 580 ff.

[3] G. D. BIRKHOFF, Dynamical Systems (1927), p. 251.

Application of Partition Chromatography to Mixtures insoluble in Water

(The analysis of fatty acid esters)

In partition chromatography silica gel, starch, and cellulose have been used as a carrier for the stationary water phase, the latter substance being in the form of a paper strip[1]. The passage of a second phase, which is

[1] R. CONSDEN, A. H. GORDON and A. J. P. MARTIN, Biochem. J. *38*, 224 (1944).