Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
60, 41–70 (1982)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Martingales dépendant d'un paramètre: une formule d'Ito

Alain-Sol Sznitman*

Laboratoire de Probabilités, Université Paris VI, Tour 46/56 – 3ème étage, 4, Place Jussieu, F-75230 Paris Cedex 05, France

Summary. We develop an Ito formula about a regular family of martingales in which we replace the parameter by a continuous semi-martingale. We give an application to an averaging problem, under mixing assumptions, in a stochastic differential equation with small parameter.

Introduction

Soit (M^x) $x \in R^d$ une famille de martingales réelles sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, F. F_t, P)$. Dans ce qui suit nous cherchons un développement de $M(X_t, t)$ quand X_t est une semi-martingale continue à valeurs dans R^d, sous certaines hypothèses de régularité sur la famille (M^x).

Dans le cadre de la théorie des flots stochastiques, on peut trouver dans les travaux de Bismut [2] et Kunita [9] des formules concernant le développement de $M(X_t, t)$ lorsque:

$$M_t^x = \sum_{i=1}^{m} \int_0^t \phi_i(x, s, \omega)\, dN_s^i$$

où $N_.^i$ sont des semi-martingales continues.

Ces résultats sont obtenus sous des hypothèses de différentiabilité sur les applications:

$$x \to \phi_i(x, s, \omega) \quad \text{et} \quad x \to M(x, s, \omega).$$

L'originalité du travail qui suit réside peut-être dans le fait que les hypothèses de régularité qui sont utilisées ici pour obtenir le développement de $M(X_t, t)$ concernent la différentiabilité et le caractère hölderien de l'application $x \to M^x$ de R^d dans H espace de Hilbert des martingales de carré intégrable.

La troisième partie illustre l'utilité d'un tel type de formule, par un exemple d'application à un problème d'effet de moyenne dans une équation différentielle stochastique.

---

* Laboratoire de Probabilités, associé C.N.R.S., n° 224

0044-3719/82/0060/0041/$06.00

Décrivons maintenant les résultats obtenus:

Le développement formel de $M(X_t, t)$ fair apparaître un terme que l'on peut noter de manière intuitivement parlante:

$$\int_0^t dM_s^{X_s}. \tag{0.1}$$

La première partie de l'article s'attaque à la définition de cette intégrale stochastique.
Sous l'hypothèse:

$$M^{\cdot} \text{ est dans } C^{k,a}(R^d, H) \tag{0.2}$$

(k fois différentiable et à dérivée d'ordre k localement hölderienne d'ordre a) avec $k+a>\frac{d}{2}$, on montre que pour $N \in H$ on peut trouver un processus $a(x, s, \omega)$ continu en x, qui est une version prévisible de $d\frac{\langle M^x, N\rangle}{d\langle N\rangle}$ pour chaque x, et que $a(x, s, \omega)$ verifie des conditions de domination lorsque x reste dans un compact.

On peut alors définir $\int_0^{\cdot} dM_s^{X_s}$ (que nous noterons $M_{\cdot}^X$) comme l'unique martingale localement de carré intégrable, nulle en 0, vérifiant:

$$\left\langle \int_0^{\cdot} dM_s^{X_s}, N \right\rangle_t = \int_0^t a(X_s(\omega), s, \omega)\, d\langle N\rangle_s \qquad \text{pour } N \in H. \tag{0.3}$$

On obtient aussi au passage le fait que sous l'hypothèse (0.2) les processus croissants $\langle M^x\rangle$ ont des accroissements dominés par les accroissements d'un processus croissant intégrable fixe, lorsque x varie dans un compact de R^d.

Cette première partie utilise fortement le lemme 1 qui est un type de critère de Kolmogorov (voir Neveu [14] et [15]).

Il est assez étonnant de noter que pour obtenir ces résultats, il ne suffit pas d'imposer des conditions de régularité hölderienne $C^{0,a}$ (a fixé) à l'application $M^{\cdot}$ dans un espace H^p d'ordre élevé comme le montre l'exemple:

$$M_t^x = \int_0^t \operatorname{sign}(x - B_s)\, dB_s$$

où $B_{\cdot}$ est un mouvement brownien et $x \in R$, (voir Yor [27] et la remarque qui suit la proposition 1).

Dans la seconde partie, sous l'hypothèse:

$$M^{\cdot} \text{ est dans } C^{k,a}(R^d, H^p) \text{ et dans } C^{k',a'}(R^d, H)$$

avec $p>1$, $k+a>\frac{d}{p}+2$ et $k'+a'>\frac{d}{2}+1$, les sauts des M^x sont uniformément bornés, nous établissons que pour X semi-martingale continue à valeurs dans R^d:

$$\begin{aligned} M(X_t, t) = M(X_0, 0) &+ \sum_{i=j}^{d} \int_0^t \frac{\partial M}{\partial x_i}(X_s, s)\, dX_s^i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial^2 M}{\partial x_i \partial x_j}(X_s, s)\, d\langle X^i, X^j\rangle_s \\ &+ \sum_{i=1}^{d} \left\langle X^i, \frac{\partial M^X}{\partial x_i}\right\rangle_t + M_t^X \end{aligned} \tag{0.4}$$

où $M(x,s)$, $\frac{\partial M}{\partial x_i}(x,s)$, et $\frac{\partial^2 M}{\partial x_i \partial x_j}(x,s)$ sont des versions continues en x dont on prouve l'existence.

Nous allons maintenant aborder le contenu de la troisième partie qui est à l'origine de ce travail.

La motivation première était d'étudier les résultats de Khashminski [6, 7], et Papanicolaou-Varadhan [19].

La situation traitée chez Khashminski [6, 7] est de manière simplifiée la suivante:

on se place sur un espace (Ω, F_{ab}, F, P) où les tribus F_{ab} croissent avec l'intervalle $[a, b]$ et vérifient une hypothèse de mélange relative à P du type:

$$\|E(A/F_{os}) - E(A)\|_\infty \leqq r(t-s)\, \|A\|_\infty \quad \text{si } s<t \quad \text{et } A \in bF_{t,\infty} \tag{0.5}$$

où $r(\,.\,)$ est une fonction positive telle que $u^6 r(u) \downarrow 0$, quand u tend vers $+\infty$.

Si $F(x,t,\omega)$ est une application sur $R^d \times R_+ \times \Omega$ à valeurs dans R^d, $F_{t,t}$-measurable pour chaque x et t, vérifiant $E(F(x,t,\omega)) = 0$, sous des hypothèses de différentiabilité en x sur F et de convergence de moyennes temporelles de certaines fonctions déterministes liées à F, on montre que les processus X^ε définis par:

$$\begin{aligned} dX_t^\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon} F\left(X_t^\varepsilon, \frac{t}{\varepsilon^2}, \omega\right) dt \\ X_0^\varepsilon &= x_0 \end{aligned} \tag{0.6}$$

convergent en loi vers une diffusion dont on calcule les caractéristiques locales.

On pourra voir des applications de tels résultats chez Papanicolaou [17].

L'article de Papanicolaou-Varadhan [19] présente un théorème abstrait et ses applications dans le cadre d'une évolution aléatoire dans un espace de Banach.

Parallèlement, chez Papanicolaou-Stroock-Varadhan [20], on peut trouver l'étude du comportement asymptotique des lois des x^ε solutions de:

$$\begin{aligned} dx_t^\varepsilon &= F(x_t^\varepsilon, y_{t/\varepsilon^2})\, dt \\ x_0^\varepsilon &= x_0 \end{aligned} \tag{0.7}$$

où y_t est un processus de diffusion ou de saut, qui vérifie des conditions de récurrence dont nous allons parler plus bas. Pour des résultats de ce type, on pourra se reporter à Papanicolaou-Stroock-Varadhan [20], et aussi à Freidlin [5] et à Brancovan-Bronner-Priouret [3] pour les questions de grandes déviations liées.

Des systémes tels que (0.7), où généralisant (0.7) interviennent, entre autres, en théorie du transport, dans l'étude du comportement asymptotiques des équations de Kolmogorov associées aux générateurs L^ε de $(x^\varepsilon, y^\varepsilon)$. On pourra voir à ce sujet Papanicolaou [18] et aussi Benssoussan-Lions-Papanicolaou [1].

Plaçons-nous par exemple dans le cas où y_t est une diffusion de générateur L. On fait des hypothèses de récurrence sur y_t qui sont essentiellement du type suivant:

On suppose que y admet une probabilité invariante m et que pour toute f continue bornée, vérifiant $m(f)=0$, on peut trouver une solution g bornée à l'équation:

$$Lg = -f. \tag{0.8}$$

Si $m(F(x,.))=0$, pour tout x, on peut montrer en utilisant une technique de martingales, que les processus x^ε convergent en loi vers une diffusion.

Cette démonstration possède l'avantage de la simplicité sur les démonstrations qui concernent les hypothèses mélange du type (0.5).

L'idée utilisée est la suivante:

Si on note g_x la solution de $Lg_x = -F(x,.)$, $x_t^\varepsilon + \varepsilon g(x_t^\varepsilon, y_{t/\varepsilon^2})$ possède un développement en semi-martingale où n'apparaît plus le terme singulier $\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t F(x_s^\varepsilon, y_{s/\varepsilon^2})\,ds$.

Nous avons suivi cette démarche pour étudier sous des hypothèses de mélange le comportement asymptotique des processus x^ε solutions de:

$$\begin{aligned} dx_t^\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon} F(x_t^\varepsilon, t/\varepsilon^2, \omega)\,dt + \sigma(x_t^\varepsilon, t/\varepsilon^2, \omega)\,d\varepsilon B_{t/\varepsilon^2} \\ x_0^\varepsilon &= x_0 \end{aligned} \tag{0.9}$$

où B_t est un mouvement brownien.

On utilise de manière inattendue dans ce contexte une technique de martingale.

On remplace le problème (0.8) par:

(0.10) étant donnée $f(t,\omega)$ $F_{t,t}$-measurable, bornée vérifiant $E(f(t,\omega))=0$, trouver $G(t,\omega)$ bornée telle que:

$$G(t,\omega) + \int_0^t f(s,\omega)\,ds \quad \text{est une martingale càdlàg.}$$

Si f est progressivement measurable, les conditions de mélange que nous supposons assurent l'existence d'une solution à (0.10).

(Nous supposons essentiellement que la fonction r qui intervient dans (0.5) est intégrable sur R_+, dx.)

Si on note G^x la solution de (0.10) associée à $F(x,s)$, on étudie avec les méthodes des deux premières parties

$$x_t^\varepsilon + \varepsilon G(x_t^\varepsilon, t/\varepsilon^2, \omega). \tag{0.11}$$

Il est à noter que les résultats que nous obtenons (voir théorème 2, et la remarque qui le suit) permettent dans le cas $\sigma=0$, d'affaiblir certaines des hypothèses de Khashminski [6, 7].

Première partie

Dans cette partie nous allons considérer une famille (M^x) $x \in R^d$ de martingales vérifiant des hypothèses de régularité, en vue de définir l'intégrale stochastique $\int_0^t dM_s^{X_s}$ (que nous noterons plus synthétiquement M_t^X) de la famille (M^x) le long d'un processus X continu adapté, à valeurs dans R^d.

Formellement on attend d'une définition raisonnable d'une telle intégrale le fait que si:

$$M_t^x = \int_0^t a(x,s,\omega)\, dM_s, \text{ on } a: \tag{1.1}$$

$$M_t^X = \int_0^t a(X_s(\omega), s, \omega)\, dM_s. \tag{1.2}$$

Mais immédiatement se pose le problème de savoir si le processus $a(X_s(\omega), s, \omega)$ reste essentiellement inchangé si on choisit différents processus a permettant d'écrire (1.1).

Exemple. Soit (Ω, F, F_t, P) satisfaisant aux conditions habituelles (voir Meyer [13]), B_t un F_t-mouvement brownien, et

$$M_t^x = \int_0^t \operatorname{sign}_-(x-B_s)\, dB_s = \int_0^t \operatorname{sign}_+(x-B_s)\, dB_s \tag{1.3}$$

$$\text{où } \operatorname{sign}_-(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leqq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad \operatorname{sign}_+(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqq 0. \end{cases}$$

Notons $\mathscr{P}$ la tribu prévisible sur $\Omega \times R_+$, et T un réel strictement positif.

Considérons la classe R_g (resp. R_d) des processus $a(x,s,\omega)$ sur $R \times [0,T] \times \Omega$ continus à gauche (resp. à droite) dans la variable x, et dans $L^2(\mathscr{P}, dP \cdot dt)$ pour chaque x.

Tout élément a de R_g (resp. R_d) vérifiant:

si $x \in R$ et $t \leqq T$ $M_t^x = \int_0^t a(x,s,\omega)\, dB_s$ où M_t^x est donné par (1.3), est tel qu'il existe un ensemble N de $[0,T] \times \Omega$, $dP \cdot dt$ négligeable pour lequel:

$a(x,s,\omega) = \operatorname{sign}_-(x - B_s(\omega))$ (resp. $a(x,s,\omega) = \operatorname{sign}_+(x - B_s(\omega))$ sur $R \times ([0,T] \times \Omega - N)$.

Cependant si l'on veut définir $M_t^{B_\cdot}$ en s'inspirant de (1.2) on a l'ambiguité suivante:

$$\int_0^t \operatorname{sign}_-(B_s - B_s)\, dB_s = -B_t \quad \text{et} \quad \int_0^t \operatorname{sign}_+(B_s - B_s)\, dB_s = B_t.$$

Ceci va nous conduire à imposer des conditions de régularité sur la famille M^x pour pouvoir définir M_t^X.

Commençons par fixer les notations:

Soit (Ω, F, F_t, P) un espace de probabilités muni d'une filtration satisfaisant aux conditions habituelles. On note $\mathscr{P}$ la tribu prévisible sur $\Omega \times R_+$, H l'espace de Hilbert des martingales réelles de carré intégrable, qu'on identifie par le biais des variables terminales à $L^2(F_\infty)$, et H_0 le sous espace de H des martingales de carré intégrable nulles en 0. En vue de l'application donnée en troisième partie nous considérons des martingales qui ne sont pas nécessairement continues.

Si N est un élément de H_0, on note H_N le sous espace stable engendré par N ($H_N = \{h \cdot N,\ h \in L^2(\mathscr{P}, dP \cdot d\langle N\rangle)\}$ où $h \cdot N$ dénote l'intégrale stochastique $\int_0^\cdot h(s, \omega)\, dN_s$; pour ce point on peut se reporter à Meyer [12]) et p_N la projection orthogonale de H_0 sur H_N.

Si E est un espace de Banach, k un entier positif, $a \in [0, 1]$, nous dirons qu'une application f de R^d dans E est de classe $C^{k,a}$ (ou appartient à $C^{k,a}(R^d, E)$) si f est k fois continument différentiable et si les dérivées partielles d'ordre k sont localement hölderiennes d'ordre a sur R^d.

On notera, si D est une partie bornée de R^d:

$$\|f\|_{k,D} = \|f\|_{k,0,D} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \sup_{x \in D} \|D^\alpha f(x)\|_E \tag{1.4}$$

pour $f \in C^k(\mathbb{R}, E)$

$$\|f\|_{k,a,D} = \|f\|_{k,0,D} + \sum_{|\alpha|=k} \sup_{\substack{x \neq x' \\ x, x' \in D}} \frac{\|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(x')\|}{|x - x'|^a}; \quad 0 < a \leq 1$$

pour $f \in C^{k,a}(\mathbb{R}^d, E)$.

Nous utiliserons le fait que lorsque f est une fonction positive C^∞ à support compact sur R^d vérifiant:

$$\int f(x)\, dx = 1 \quad \text{et} \quad h \in C^{k,a}(R^d, E)$$
$$\|h(\,.\,) - n^d \int f(n(x-y))\, h(y)\, dy\|_{k,a',D}$$

tend vers 0, pour D partie bornée de R^d et $0 \leq a' < a$ si $a > 0$ et $a' = 0$ si $a = 0$.

Nous allons commencer par démontrer un lemme qui est une version du critère de Kolmogorov et qui nous sera utile dans la suite.

Lemme 1. *Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace de probabilité. Pour toute application $x \to A_x$ de classe $C^{k,a}$ de R^d dans $L^p(\Omega, \mathscr{A}, P)$ $(p > 1)$ avec $k + a > \frac{d}{p} + j$ $(j \in N)$, il existe une application A de $R^d \times \Omega$ dans R essentiellement unique telle que:*

a) *pour chaque* $\omega \in \Omega$ $x \to A(x, \omega)$ *est de classe* C^j *de* R^d *dans* R.

b) *pour chaque* $x \in R^d$ $A(x, .)$ *est* $\mathscr{A}$*-mesurable, et les dérivées* $D^\alpha A(x, \omega)$ *pour tout multi-indice* α *tel que* $0 \leqq |\alpha| \leqq j$ *sont indistinguables de* $D^\alpha A_x(L^p(P))$.

De plus si $B = B(x_0, R)$ *est une boule de* R^d, *il existe une constante* $C_{k,a,p,B} \geqq 0$ *telle que pour tout* $A \in C^{k,a}(R^d, L^p(P))$ *on ait:*

$$\| \; \|A(.,\omega)\|_{j,B} \|_p \leqq C_{k,a,p,B} \|A.\|_{k,a,B} \tag{1.5}$$

où $A(x, \omega)$ *est une version régulière de* $A.$ *vérifiant le* a) *et* b).

Démonstration. Quitte à considérer $C^{k-1,1}(R^d, L^p(P))$ nous supposerons $a > 0$.

Soit $x \to A_x$ dans $C^{k,a}(R^d, L^p(P))$, on peut choisir une application $Z(x, \omega)$ de $R^d \times \Omega$ dans R measurable, qui pour chaque x est indistinguable de A_x et chaque ω est dans $L^p_{\mathrm{loc}}(R^d, dx)$ (en utilisant le théorème de Fubini).

Considérons maintenant une fonction f positive C^∞ à support compact sur R^d et telle que $\int f(x)\,dx = 1$.

On définit:

$$A^n(x, \omega) = n^d \int f(n(x-y))\, Z(y, \omega)\, dy.$$

Les applications $A^n(x, \;)$ sont de classe C^∞ en x pour chaque ω, de plus les applications $x \to A^n(x, .)$ de R^d dans $L^p(P)$ vérifient:

$$\lim \|A^n_{.} - A.\|_{k,\alpha,D} = 0$$

pour toute partie D bornée de R^d et $0 \leqq \alpha < a$.

Fixons $a' \in]0, a[$ tel que $k + a' > \dfrac{d}{p} + j$.

Soit $B = B(x_0, R)$ une boule de R^d, il existe $K \geqq 0$ telle que pour toute $f \in C^\infty(R^d, R)$:

$$\|f\|_{j,B} \leqq K \left[\int_B |f(x)|^p d + \ldots + \int_B \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha f(x)|^p dx \right.$$
$$\left. + \iint_{B \times B} \sum_{|\alpha|=k} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|^p}{|x-y|^{a'p+d}} dx\,dy \right]^{1/p} \tag{1.6}$$

pour ceci on pourra se reporter à Triebel [24] p. 323 et 328, et Uspenski [25], [2].

Choisissons $a'' \in]a', a[$.

Appliquons l'inégalité précédente aux fonctions $A^n(.,\omega) - A^m(.,\omega)$, en intégrant les deux membres élevés à la puissance p, il vient:

$$E[\|A^n(.,\omega) - A^m(.,\omega)\|^p_{j,B}]^{1/p} \leqq K' \|A^n_{.} - A^m_{.}\|_{k,a'',B}.$$

On peut alors extraire une suite n_k telle que:

$$\sum \|A^{n_k}(.,\omega) - A^{n_{k+1}}(.,\omega)\|_{j,B}$$

converge p.s. et dans $L^p(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

On en déduit qu'en dehors d'un ensemble P-négligeable $A^{n_k}(.,\omega)$ converge au sens de la norme $\| \; \|_{j,B}$ vers une application $A(x, \omega)$ dans $C^j(B, R)$ pour chaque ω. Comme d'autre part $D^\alpha A^{n_k}(x,.)$ converge vers $D^\alpha A_x$ pour $0 \leqq |\alpha| \leqq j$ dans $L^p(P)$, $D^\alpha A(x,\omega)$ est indistinguable de $D^\alpha A_x$, pour $0 \leqq |\alpha| < j$ si $x \in B$. De plus:

$$\| \ \|A(.,\omega)\|_{j,B}\|_p \leqq K' \|A.\|_{k,a'',B} \leqq K'' \|A.\|_{k,a,B}.$$

En considérant les boules $B(0,n)$ on obtient facilement l'existence d'une version $A(x,\omega)$ vérifiant le a) et b).

L'estimation (1.5) se déduit alors facilement de ce qui précède. □

Nous allons maintenant appliquer le lemme 1 pour obtenir la

Proposition 1. *Soit $x \to M^x$ une application de R^d dans H_0 de classe $C^{k,a}$ avec $k+a > \frac{d}{2} + j$ $(j \in N)$.*

Soit $N \in H_0$, il existe une application $a(x,s,\omega)$ de $R^d \times R_+ \times \Omega$ dans R vérifiant:

a) *si $(s,\omega) \in R_+ \times \Omega$ $x \to a(x,s,\omega)$ est de classe C^j,*

b) *si $x \in R^d$ et α est un multi-indice de longueur $0 \leqq |\alpha| \leqq j$,*

$$D^\alpha a(x,s,\omega) \in L^2(\mathscr{P}, dP \cdot d\langle N \rangle) \quad \text{et} \quad \langle D^\alpha M, N \rangle_t = \int_0^t D^\alpha a(x,s,\omega)\, d\langle N \rangle_s$$

P-essentiellement,

c) *si $B = B(x_0, R^d)$ est une boule de R^d, $g_B(s,\omega) = \|a(.,s,\omega)\|_{j,B}$ est dans $L^2(\mathscr{P}, dP \cdot d\langle N \rangle)$ et vérifie:*

$$\|g_B\|_{L^2(\mathscr{P}, dP \cdot d\langle N \rangle)} \leqq C_{k,a,B} \|p_N(M^\cdot)\|_{k,a,B} \tag{1.7}$$

où la constante $\geqq 0\, C_{k,a,B}$ est indépendante de $M^\cdot$, et $\| \ \|_{k,a,B}$ est donné par (1.5).

De plus si a_1 et a_2 vérifient a) *et* b), *il existe un ensemble N $dP \cdot d\langle N \rangle$ négligeable tel que a_1 et a_2 coïncident sur $R^d \times (R_+ \times \Omega - N)$.*

Démonstration. Commençons par montrer l'existence de $a(.,.,.)$.

Soit U_N l'isomorphisme de H_N sur $L^2(\mathscr{P}, dP \cdot d\langle N \rangle)$, si $h_x = U_N \circ p_n(M^x)$ $x \to h_x$ est de classe $C^{k,a}$ de R^d dans $L^2(\mathscr{P}, dP \cdot d\langle N \rangle)$.

On applique alors le lemme 1 à l'espace de probabilités

$$\left(\Omega \times R_+, \mathscr{P}, \frac{1}{\|N\|_H^2} dP \cdot d\langle N \rangle\right).$$

Soit $\bar{a}$ une version régulière donnée par le lemme 1, pour clore la démonstration de l'existence de la fonction a, il suffit de montrer que:

$$\langle D^\alpha M^x, N \rangle_t = \int_0^t D^\alpha \bar{a}(x,s,\omega)\, d\langle N \rangle_s \qquad P\text{-essentiellement,}$$

pour α multi-indice de longueur $0 \leqq |\alpha| \leqq j$.

Or $D^\alpha \bar{a}(x,.,.) = U_N \circ p_N(D^\alpha M^x)$ dans $L^2(\mathscr{P}, dP \cdot d\langle N \rangle)$ d'où:

$$\langle D^\alpha M^x, N \rangle_t = \langle p_N(D^\alpha M^x), N \rangle_t = \int_0^t D^\alpha \bar{a}(x,s,\omega)\, d\langle N \rangle_s \qquad P\text{-essentiellement.}$$

Pour l'unicité il suffit de remarquer que si a_1 et a_2 vérifient a) et b), alors $\forall x \in R^d$ $a_1(x,.,.)=a_2(x,.,.)$ $dP \cdot d\langle N\rangle$ p.s., et la continuité permet de conclure. $\square$

Notation. Si $x \to M^x$ vérifie les conditions de la proposition 1, et si $N \in H_0$ on appellera version régulière de $\frac{d\langle M^x, N\rangle}{d\langle N\rangle}$ une application $a(x,s,\omega)$ vérifiant les conditions a), b), c) de la proposition 1, de plus on notera a_N une telle version (qui est essentiellement unique).

Remarque. 1) Le c) de la proposition 1 permet de choisir une version du processus $\langle N\rangle$ telle que pour $\omega \in \Omega$ et $t \in R_+$:

$x \to \int_0^t a(x,s,\omega)\, d\langle N\rangle_s$ est continu sur R^d et dominé uniformément en t et en x, quand x reste dans un compact de R^d par un élément de $L^1(P)$.

2) Le lemme 1 peut laisser espérer que si $x \to M^x$ à valeurs dans un espace H^p de martingales ($p \geqq 2$) est $C^{0,a}$ avec $p \cdot a > d$, on pourra trouver une densité prévisible $\frac{d\langle M^x, N\rangle}{d\langle N\rangle}$ continue en x.

Ce résultat est inexact, il suffit de considérer:

$$M_t^x = \int_0^t \operatorname{sign}(x - B_s)\, dB_s,\ t \leqq T,$$

comme au (1.3); cette application appartient à $C^{0,\frac{1}{2}}(R, H^p)$ pour $p \geqq 2$, voir Yor [27], et cependant on ne peut trouver de densité prévisible (ou même mesurable) $\frac{d\langle M^x, N\rangle}{d\langle N\rangle}$ continue en x.

Dans ce qui suit nous dirons que A est un processus croissant intégrable si A est continu à droite croissant adpté, nul en 0, et tel que A_∞ est intégrable.

Le lemme 1 va nous permettre de montrer que si $M^\cdot$ est de classe $C^{k,a}$ avec $k + a > \frac{d}{2}$ de R^d dans H_0, il existe un processus A croissant intégrable qui «domine» les processus $\langle M^x\rangle$ quand x reste dans un compact de R^d.

Plus précisément on a:

Proposition 2. *Soit $x \to M^x$ une application de $C^{k,a}(R^d, H_0)$ avec $k + a > \frac{d}{2}$, soit B une boule de R^d, il existe un processus croissant intégrable A tel que:*

$$\text{si } x \in B \text{ et } s < t\ \langle M^x\rangle_t - \langle M^x\rangle_s \leqq A_t - A_s\ P \text{ p.s.} \tag{1.8}$$

Démonstration. Soit $\tilde{H}$ le sous espace stable de H_0 engendré par la famille M^x, $x \in R^d$. $\tilde{H}$ est séparable, on peut alors trouver une suite (éventuellement finie) d'éléments N_i de H_0 fortement orthogonaux deux à deux engendrant $\tilde{H}$ et tels que $\sum \|N_i\|_H^2 < \infty$ (voir Kunita-Watanabe [10]).

Nous démontrerons la proposition dans le cas d'une suite infinie, le cas d'une suite finie étant plus direct.

Soit l un entier $\geqq 1$, on note $[1, l]$ le segment de $\mathbb{N}\{1, \ldots, l\}$.

Considérons U_l l'isomorphisme de l'espace stable H_l engendré par

$$N_1, \ldots, N_l \text{ sur } L^2\left(\Omega \times \mathbb{R}_+ \times [1, l], \mathscr{P} \otimes \mathscr{P}([1, l]), dP \cdot \sum_{i=1}^{l} d\langle N_i \rangle \times \delta_i\right) = \hat{L}^2$$

(pour alléger l'écriture).

Soit p_l la projection orthogonale de H_0 sur H_l. Le lemme 1 nous donne une version régulière de $U_l \circ p_l(M^{\cdot})$: $a_i(x, s, \omega)$ où $i \in [1, l]$, $x \in R^d$, $\omega \in \Omega$.

De plus si B est une boule de R^d on a:

$f_l(i, s, \omega) \overset{\text{def}}{=} \sup_{x \in B} |a_i(x, s, \omega)|$ est un élément de $\hat{L}^2$ de norme inférieure à:

$$C \cdot \|M^{\cdot}\|_{k, a, B}.$$

où C est une constante qui ne dépend ni de l ni de $M^{\cdot}$ (voir démonstration du lemme 1).

Considérons le processus croissant intégrable $K_t = \sum_{i \geqq 1} \langle N_i \rangle_t$, et m la mesure $dP \cdot dK = \sum_{i \geqq 1} dP \cdot d\langle N_i \rangle$ sur $(\Omega \times R_+, \mathscr{P})$.

Soit pour chaque i d_i une densité de $dP \cdot d\langle N_i \rangle$ par rapport à m (on a aussi le fait que en dehors d'un ensemble P-négligeable $d_i(\omega, .)$ est une densité de $d\langle N_i \rangle(\omega)$ par rapport à $dK(\omega)$).

On a:

$$\text{Si } y \in B \sum_{i \leqq l} a_i^2(y, s, \omega)\, d_i \leqq \sum_{i \leqq l} f_l^2(i, s, \omega)\, d_i \overset{\text{def}}{=} g_l(s, \omega).$$

On a de plus $E\left[\int_0^\infty g_l(s, \omega)\, dK_s\right] \leqq C^2 \|M^{\cdot}\|_{k, a, B}^2$.

Par conséquent $g_l(s, \omega)$ est une suite croissante qui converge m-p.s. vers $a(s, \omega)$ qui vérifie: $E\left[\int_0^\infty a(s, \omega)\, dK_s\right] \leqq C^2 \|M\|_{k, a, B}^2$.

De plus si $y \in B$:

$$\langle P_l(M^y), P_l(M^y) \rangle_s^t = \sum_{i \leqq l} \int_s^t a_i^2(y, s, \omega)\, d_i\, dK_s \leqq \int_s^t a(s, \omega)\, dK_s\, P\text{-p.s.}$$

Le membre de gauche de l'inégalité précédente converge dans $L^1(P)$ vers $\langle M^y \rangle_t - \langle M^y \rangle_s$, on en déduit que:

$$\text{pour } y \in B \langle M^y \rangle_t - \langle M^y \rangle_s \leqq \int_s^t a(s, \omega)\, dK_s\, P\text{-p.s.}$$

et donc le processus croissant intégrable $\int_0^{\cdot} a(s, \omega)\, dK_s$ vérifie les conditions de la proposition. □

Nous allons maintenant montrer la

Proposition 3. *Soit $x \to M^x$ une application de classe $C^{k, a}\left(k + a > \frac{d}{2}\right)$ de R^d dans H_0, et X un processus prévisible à valeurs dans une boule B de R^d.*

L'application L de H_0 dans R définie (en vertu de la proposition 1) *par:*

$$L(N)=E\left[\int_0^\infty a(X_s(\omega),s,\omega)\,d\langle N\rangle_s\right] \qquad N\in H_0 \tag{1.9}$$

est linéaire et continue.

De plus il existe une constante C indépendante de $M^{\cdot}$ telle que:

$$\|L\|_{H_0^*}\leqq C\cdot\|M^{\cdot}\|_{k,a,B} \tag{1.10}$$

et si A est un processus croissant intégrable dominant les $\langle M^x\rangle$ au sens de (1.8) *pour $x\in B$ on a:*

$$\|L\|_{H_0^*}\leqq(E(A_\infty))^{1/2}. \tag{1.11}$$

Démonstration. Montrons que L est linéaire, nous allons nous limiter à montrer le fait que si N et N' sont dans $H_0, L(N)+L(N')=L(N+N')$ (le fait que $L(\lambda N)_{\lambda\in\mathbb{R}}=\lambda L(N)$ est encore plus simple à montrer).

Soit dm la mesure $dP\cdot d\langle N\rangle+dP\cdot d\langle N'\rangle$ sur la tribu $\mathscr{P}$.

Si b,b',b'', sont des densités par rapport à dm des mesures $dP\cdot d\langle N\rangle$, $dP\cdot d\langle N'\rangle$, $dP\cdot d\langle N+N'\rangle$ (toute autre mesure que dm par rapport à laquelle ces trois mesures seraient absolument continues conviendrait de même), on a:

$$dm\text{ p.s. }\left[\forall x\in R^d\; a_N(x,s,\omega)\cdot b+a_{N'}(x,s,\omega)\cdot b'=a_{N+N'}(x,s,\omega)\cdot b''\right]$$

en effet les deux membres définissent pour chaque x de R^d une densité par rapport à dm de $dP\cdot d\langle N+N',M^x\rangle$.

On en déduit immédiatement que $L(N+N')=L(N)+L(N')$.

Montrons que L est continue et vérifie (1.10).

Ceci provient de l'inégalité (1.7) de la proposition 1 qui permet d'écrire:

$$\text{si } N\in H_0\;\; |L(N)|^2\leqq E\left[\int_0^\infty a_N^2(X_s(\omega),s,\omega)\,d\langle N\rangle_s\right]\times\|N\|_{H_0}^2\leqq C^2\,\|N\|_{H_0}^2\,\|M^{\cdot}\|_{k,a,B}.$$

Enfin montrons (1.11):

Supposons que X prenne seulement un nombre fini de valeurs a_i $i\in[1,k]$, et définissons l'élément I de H_0 par:

$$I_t=\int_0^t h_s(\omega)\,dK_s$$

où $h_s(\omega)$ est le vecteur ligne $(1(X_s(\omega)=a_i))$ $i\in[1,k]$ et K_t la martingale vectorielle dont les composantes sont les $M_t^{a_i}$ $i\in[1,k]$.

Il est facile de voir que dans ce cas on a:

$$L(N)=E(I_\infty N_\infty)$$

et donc si A est un processus croissant intégrable dont les accroissements dominent ceux des M^{a_i} on a:

$$E(I_\infty^2)=E\left[\int_0^\infty\sum_{i=1}^d 1(X_s=a_i)\,d\langle M^{a_i}\rangle_s\right]\leqq E[A_\infty]$$

et donc $\|L\|_{H_0^*}\leqq E(A_\infty)^{1/2}$.

Dans le cas général on utilise une suite X^m de processus étagés sur $\mathscr{P}$ à valeurs dans B convergeant simplement vers X et le fait que:

$$|L(N)| = \lim_{p\to\infty} E\left[\int_0^\infty a_N(X_s^m(\omega), s, \omega)\, d\langle N\rangle_s\right] \leqq \|N\|_{H_0^\cdot}(E(A_\infty))^{\frac{1}{2}}$$

et on obtient la proposition.

Remarquons que si les accroissements de A dominent ceux des processus $\langle M^x\rangle\, x\in R^d$ le lemme de Fatou permet d'écrire pour un processus X prévisible à valeurs dans R^d:

$$E\left[\int_0^\infty a_N^2(X_s, s, \omega)\, d\langle N\rangle_s\right] \leqq E[A_\infty]$$

et par conséquent on voit que:

$$L(N) = E\left[\int_0^\infty a_N(X_s(\omega), s, \omega)\, d\langle N\rangle_s\right]$$

définit une forme linéaire continue sur H_0 dont la norme est majorée par $E(A_\infty)^{\frac{1}{2}}$. □

Nous allons maintenant utiliser la proposition 3 pour définir l'intégrale stochastique M_t^X dans le cas d'un processus continu à valeurs dans R^d.

Nous nous restreignons au cas où X est continu principalement pour ne pas nous heurter à des difficultés de localisation, du fait que les martingales que nous considérons ne sont pas continues.

Proposition 4. *Soit $x\to M^x$ une application de classe $C^{k,a}\left(k+a>\frac{d}{2}\right)$ de R^d dans H_0 et H un processus continu adapté à valeurs dans R^d. Il existe une martingale localement dans L^2, nulle en $0, M^X$, essentiellement unique, vérifiant pour N dans H_0:*

$$\langle M^X, N\rangle = \int_0^\cdot a_N(X_s(\omega), s, \omega)\, d\langle N\rangle_s \qquad P\text{-essentiellement.} \tag{1.12}$$

Si de plus X est à valeurs dans une boule B de R^d, il existe une constante $C_{k,a,B}\geqq 0$ telle que pour toute $M\in C^{k,a}(R^d, H_0)$

$$\|M^X\|_{H_0} \leqq C_{k,a,B} \cdot \|M\|_{k,a,B}. \tag{1.13}$$

Démonstration. L'unicité est immédiatement à démontrer.

Pour l'existence, si l'on suppose dans un premier temps X à valeurs dans une boule B de R^d, d'après la proposition 3 il existe un unique élément M^X de H_0 tel que:

$$\forall N\in H_0 \qquad E[\langle M^X, N\rangle_\infty] = E\left[\int_0^\infty a_N(X_s, s, \omega)\, d\langle N\rangle_s\right]$$

on en déduit par un argument classique (voir Meyer [12]) que pour tout N dans H_0:

$$\langle M^X, N\rangle_t = \int_0^t a_N(X_s, s, \omega)\, d\langle N\rangle_s.$$

Dans le cas où X n'est pas borné, il suffit de considérer les temps d'arrêt $T_n = \inf\{t \geqq 0, |X_t| \geqq n\}$ qui croissent vers $+\infty$, et M^X la martingale localement dans L^2 définie par:

$$M^X_{T_n \wedge t} = M^{X^{T_n}}_{T_n \wedge t}$$

où $X^T n$ désigne le processus $X(T_n \wedge t, \omega)$. □

Remarque. Soit $x \to M^x$ et X vérifiant les conditions de la proposition 4, on suppose X à valeurs dans un compact, soit H un sous espace stable de H_0, p la projection sur H et $\tilde{M}^x = p \circ M^x$, il est facile de voir que:

$$p(M^X) = \tilde{M}^X.$$

Une application de ce résultat est le fait que si $N^i i \in N$ est une suite de martingales fortement orthogonales engendrant H_0 et si a_i sont des versions régulières de $\dfrac{d\langle M^x, N_i\rangle}{d\langle N_i\rangle}$ on a:

$$M^X = \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{\infty} a_i(X_s, s, \omega)\, dN^i_s$$

où la série précédente converge dans H_0.

Notation. Si M et N sont dans H on définit $\langle M, N\rangle$ par $\langle p_0(M), p_0(N)\rangle_t$ où p_0 est la projection (orthogonale) sur H_0. Lorsque $x \to M^x$ appartient à $C^{k,a}(R^d, H)$ $\left(k+a > \dfrac{d}{2}\right)$ et X est un processus continu adapté à valeurs dans R^d, on pose:

$$M^X = \tilde{M}^X$$

où $\tilde{M} = p_0 \circ M$.

Deuxième partie

Le but de cette partie est de trouver un développement (voir théorème 1) de $M(X_t, t)$ lorsque X est une semi-martingale continue à valeurs dans R^d, et $x \to M^x$ est une application de R^d dans H qui vérifie des conditions de régularité que nous préciserons dans la suite. Nous allons commencer par un résultat d'existence de version régulière de M^x.

Proposition 5. *Soit $x \to M^x$ une application de classe $C^{k,a}$ de R^d dans l'espace H^p des martingales de puissance p-ième intégrable $\left(\text{avec: } p > 1, \text{ et } k+a > \dfrac{d}{p} + j \text{ où } j \in N\right)$, il existe une application $M(x, s, \omega)$ de $R^d \times R_+ \times \Omega$ dans R essentiellement unique vérifiant:*

a) *Pour ω fixé, $x \to M(x, t, \omega)$ est de classe C^j, et $D^\alpha M(x, t, \omega)$ est continue en x uniformément en t pour tout multi-indice α de longueur $0 \leqq |\alpha| \leqq j$.*

b) *Pour $x \in R^d$, $\omega \in \Omega$ $t \to D^\alpha M(x, t, \omega)$ est càdlàg, $0 \leqq |\alpha| \leqq j$.*

c) *Pour* $x \in R^d$, $D^\alpha M(x,.,.) = D^\alpha M^x$ *dans* H^p $0 \leqq |\alpha| \leqq j$.

d) *Si B est une boule de* R^d, $\sup_{t \geqq 0} \|M(x,t,\omega)\|_{j,B}$ *est dans* $L^p(P)$.

Démonstration. Admettons dans un premier temps l'existence d'une application $\bar{M}(x,t,\omega)$ sur $R^d \times R_+ \times \Omega$ à valeurs réelles, mesurable, indistinguable pour chaque x de $M^x_.$ et vérifiant en outre:

pour chaque x et ω $t \to \bar{M}(x,t,\omega)$ est càdlàg

pour chaque t $(x,\omega) \to \bar{M}(x,t,\omega)$ est $\bigcap_{s>t} B(R^d) \otimes F_s$-mesurable

et enfin pour toute boule B de R^d, $g(\omega) = \sup_{\substack{x \in B \\ t \geqq 0}} |\bar{M}(x,t,\omega)|$ est une application finie et dans $L^p(P)$.

Alors en utilisant l'inégalité de Doob (voir Meyer [13]), la démonstration est analogue à celle du lemme 1, à savoir:

quitte à considérer $C^{k-1,1}$ on suppose $a>0$, on choisit $f \geqq 0$ C^∞ à support compact dans R^d, telle que $\int f(x)\,dx = 1$.

On pose:

$$M^n(x,t,\omega) = n^d \int f(n(x-y))\,\bar{M}(y,t,\omega)\,dy.$$

Etant donné les propriétés de $\bar{M}$, on a immédiatement le fait que: $x \to M^n(x,t,\omega)$ est de classe C^∞, pour chaque x et ω $M^n(x,.,\omega)$ est càdlàg, la continuité en x des $D^\alpha M^n(x,t,\omega)$ est uniforme en t, enfin l'application $x \to M^n(x,.,.)$ est à valeurs dans H^p et de classe C^∞, (les dérivées étant représentées par les $D^\alpha M^n(x,.,.)$).

On choisit $a' \in]0,a[$ tel que $k + a' > \frac{d}{p} + j$, et si B est une boule de R^d on écrit en utilisant l'inégalité (1.5):

$$\begin{aligned}
&\Big\|\sup_{t \geqq 0} \|M^n(.,t,\omega) - M^m(.,t,\omega)\|_{j,B}\Big\|_p^p \\
&\leqq K^p \left\| \sup_{t \geqq 0} \left[\int_B |M^n(x,t,\omega) - M^m(x,t,\omega)|^p\,dx + \dots \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \iint_{B \times B} \sum_{|\alpha|=k} \frac{|(M^n - M^m)(x,t,\omega) - (M^n - M^m)(y,t,\omega)|}{|x-y|^{d+a'p}}\,dx\,dy \right] \right\|_p^p \\
&\leqq K^p \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \left[\int_B \|M^n_x - M^m_x\|_p^p\,dx + \dots \right. \\
&\qquad \left. + \iint_{B \times B} \sum_{|\alpha|=k} \frac{\|D^\alpha(M^n - M^m)_x - D^\alpha(M^n - M^m)_y\|_p^p}{|x-y|^{d+a'p}}\,dx\,dy \right] \\
&\leqq (K')^p \|M^n_. - M^m_.\|_{k,a'',B}
\end{aligned}$$

où $a'' \in]a',a[$.

On conclut alors la démonstration comme au lemme 1.

Montrons maintenant l'existence de l'application $\bar{M}$.

Elle résulte d'une modification d'un lemme qui se trouve chez Doleans-Dade [4] ou encore chez Stricker-Yor [23] (lemme 1):

le lemme 1 de la première partie nous dit d'une part (en utilisant l'inégalité de Doob) que pour chaque $N \geqq 1$, il existe $g_N(\omega) \in L^p(P)$ telle que:

$$\forall x \in B(0, N) \ [\sup_{t \geqq 0} |M_t^x(\omega)| \leqq g_N(\omega) \ P.\text{p.s.}]$$

et d'autre part pour chaque $t \geqq 0$ il existe une application $H_t(x, \omega)$ continue en x pour chaque ω, F_t-mesurable et indistinguable de M_t^x pour chaque x.

On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des dyadiques de R_+ $\left(\text{réels de la forme } \frac{k}{2^n} k \in N,\ n \in N\right)$ et pour $b < c$ rationnels on note $M_b^c(N, x, \omega)$ le nombre de montées de $H.(x, \omega)$ sur $\mathbb{D} \cap [0, N[$, par dessus l'intervalle a, b. M_b^c est alors mesurable en (x, ω) et on introduit

$$\begin{aligned} C = &\{(x, \omega) \exists (b, c) \exists N \geqq 1 \ b < c \quad \text{et} \quad M_b^c(N, x, \omega) = \infty\} \\ &\cup \{(x, \omega) \exists N \geqq 1, x \leqq |N| \text{ et } \sup_{t \geqq 0} |H_t(x, \omega) > g_N(\omega)\} \end{aligned}$$

C est $B(R^d) \otimes F$-mesurable et pour tout x:

$$C_x = \{\omega : (x, \omega) \in C\} \qquad \text{est } P\text{-négligeable.}$$

On pose alors pour $(x, t, \omega)\, R^d \times R_+ \times \Omega$:

$$\begin{aligned} \bar{M}(x, t, \omega) &= 0 \quad \text{si } (x, \omega) \in C \\ &= \lim_{s \downarrow t\, s > t} H_s(x, \omega) \quad \text{si } (x, \omega) \notin C. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que $\bar{M}$ est mesurable et vérifie les propriétés annoncées en début de démonstration. □

Nous allons maintenant construire des approximations de l'intégrale stochastique M^X en utilisant une technique de convolution.

Lemme 2. *Soit $x \to M^x$ une application de classe $C^{k,a}\left(k + a > \frac{d}{2}\right)$ de R^d dans H, $M(x, t, \omega)$ une version régulière (voir proposition 5) de M_t^x, et μ une mesure de radon positive à support compact sur R^d.*

$\tilde{M}(t, \omega) = \int d\mu(x)\, M(x, t, \omega)$ est une martingale càdlàg de H, et si $N \in H_0$

$$\langle \tilde{M}, N \rangle_t = \int_0^t \left(\int d\mu(x)\, a_N(x, s, \omega)\right) d\langle N \rangle_s \qquad P\text{-essentiellement.} \tag{2.1}$$

Démonstration. $\tilde{M}$ est clairement une martingale càdlàg de H (grâce aux conditions de domination de la proposition 5) et:

$$\begin{aligned} &\tilde{M}_t N_t - \int_0^t \left(\int d\mu(x)\, a_N(x, s, \omega)\right) d\langle N \rangle_s \\ &\quad = \int d\mu(x) \left[M(x, t, \omega) N_t(\omega) - \int_0^t a_N(x, t, \omega)\, d\langle N \rangle_s\right] \end{aligned}$$

est une martingale, d'où l'on déduit la formule (2.1). □

Lemme 3. *Soit* $x \to M^x$ *une application* $C^{k,a}\left(k+a>\frac{d}{2}\right)$ *de* R^d *dans* H *et* X *continu adapté à valeurs dans une boule* B *de* R^d. *Si* f *est positive de classe* C^∞ *à support compact dans* R^d *et* $\int f(x)=1$, $\int dy \int_0^t f_n(X_s-y)\,dM_s^y$ *(définie grâce au lemme 2) converge fortement dans* H_0 *vers* M^X, *où* $f_n(x)=n^d f(nx)$.

Démonstration. Soit $M(y,t,\omega)$ une version régulière de M_t^y, et

$$M^n(x,t,\omega)=\int dy\, f_n(x-y)\, M(y,t,\omega).$$

Clairement $x \to M^n(x,.,.)$ est une application de classe C^∞ de R^d dans H. Nous allons dans un premier temps montrer que:

$$I^n \overset{\text{def}}{=} \int dy \int_0^{\cdot} f_n(X_t-y)\,dM_t^y=(M^n)_{\cdot}^X.$$

Pour cela remarquons que si $N \in H_0$, d'après le lemme 2, on a:

$$\langle I^n, N\rangle_t=\int_0^t \left(\int dy\, f_n(X_s-y)\, a_N(y,s,\omega)\right) d\langle N\rangle_s$$

or:

$$\langle (M^n)^x, N\rangle_t=\int_0^t \left(\int dy f_n(x-y)\, a_N(y,s,\omega)\right) d\langle N\rangle_s \qquad \text{si } x \in R^d$$

donc:

$$\langle I^n, N\rangle_t=\langle (M^n)^X, N\rangle_t \qquad P\text{-essentiellement, d'où } I^n=(M^n)^X.$$

Nous allons maintenant montrer que I^n converge dans H vers M^X.

Ceci résulte de (1.13) et de ce que:

$\|M^n-M\|_{k,a',B}$ tend vers 0 avec $a' \in]0,a[$ si $a>0$ tel que $k+a'>\frac{d}{2}$ et $a'=0$ si $a=0$.

Nous pouvons maintenant montrer le

Théorème 1. *Soit* $x \to M^x$ *une application de* R^d *dans* $H \cap H^p (p>1)$, *qui appartient à* $C^{k,a}(R^d,H)$ *et* $C^{k',a'}(R^d,H^p)$, *avec* $k+a>\frac{d}{2}+1$ *et* $k'+a'>\frac{d}{p}+2$.

On suppose que les sauts des martingales $D^\alpha M^x \, 0 \leq |\alpha| \leq 2$ *sont uniformément bornés.*

Soit X *une semi-martingale continue à valeurs dans* R^d, *on a:*

$$\begin{aligned} M(X_t,t)=M(X_0,0)&+\sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial M}{\partial x_i}(X_s,s)\,dX_s^i \\ &+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 M}{\partial x_i x_j}(X_s,s)\,d\langle X^i,X^j\rangle_s \\ &+\sum_{i=1}^d \left\langle X^i, \frac{\partial M^X}{\partial x_i}\right\rangle_t + M_t^X. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Démonstration. Nous allons commencer par localiser le problème.

Soit r_n une suite de réels >0 tendant vers $+\infty$, $B_n = B(0, r_n)$, et $B'_n = B(0, r_n + 1)$.

Les conditions de domination sur $D^\alpha M(x, s, \omega)$ $0 \leqq |\alpha| \leqq 2$, permettent d'affirmer que le processus croissant $\sup\{|D^\alpha M(x, s, \omega)|;\ x \in B'_n,\ 0 \leqq s \leqq t,\ 0 \leqq |\alpha| \leqq 2\} = A^n_t(\omega)$ est fini.

De plus les sauts de A^n_t sont uniformément bornés.

Soit $(T_n) n \in N$ une suite de temps d'arrêt croissant vers $+\infty$ telle que X^{T_n} soit à valeurs dans B_n, le processus croissant de X et la variation du processus à variations bornées attaché à X, arrêtés en T_n soient uniformément bornés.

Soit de plus pour chaque n $(T_{n,m}) m \in N$ une suite de temps d'arrêt croissant vers $+\infty$ telle que $A^n_\cdot$ arrêté en $T_{n,m}$ soit borné.

Si pour chaque n et m on sait démontrer la formule (2.2) relativement au processus $X^{T_n \wedge T_{n,m}}$ et à la famille $M^x_{T_n \wedge T_{n,m} \wedge t}$ (qui vérifie les hypothèses du théorème 1), en faisant tendre successivement m puis n vers l'infini on obtiendra (2.2) pour X et M^x.

La localisation précédente nous permet de nous borner à montrer (2.2) dans le case où X est à valeurs dans $B = B(0, r)$, $\langle X \rangle$, la variation du processus A continu à variations bornées attaché à

$$X, |D^\alpha M(x, t, \omega)| 0 \leqq |\alpha| \leqq 2, x \in B' = B(0, r+1),$$

sont uniformément bornés.

X s'écrit sous la forme $X = N + A$ où N est une martingale continue bornée.

Soit f une fonction $\geqq 0$ de classe C^∞ à support dans $B(0, 1)$ telle que $\int f(x)\, dx = 1$. Notons f_n la suite de fonctions définie par:

$$f_n(x) = n^d f(n x).$$

La formule d'Ito (voir Meyer [12], nous sommes dans le cas discontinu) nous permet d'écrire pour $y \in B'$:

$$\begin{aligned} & f_n(X_t - y)\, M(y, t, \omega) \\ & = f_n(X_0 - y)\, M(y, 0, \omega) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(X_s - y)\, M(y, s, \omega)\, dN^i_s \\ & \quad + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(X_s - y)\, M(y, s, \omega)\, dA^i_s \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_i \partial x_j}(X_s - y)\, M(y, s, \omega)\, d\langle X^i, X^j \rangle_s \\ & \quad + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(X_s - y)\, a_N(y, s, \omega)\, d\langle N^i \rangle_s + \int_0^t f_n(X_s - y)\, dM^y_s. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Remarquons que les conditions sur le support de f permettent de trouver une constante $K_n \geqq 0$ telle que:

$$|f_n(X_s - y)\, M(y, s, \omega) - f_n(X_s - y')\, M(y', s, \omega)| \leqq K_n \cdot |y - y'| \quad \text{si } y, y' \in R^d.$$

On en déduit que $y \to \int_0^{\cdot} f_n(X_s - y) M(y,s,\omega)\, dN_s^i$ est dans $C^{0,1}(R^d, H^p)$ pour tout $p \geqq 1$. La proposition 5 nous fournit une version régulière de la martingale précédente; l'égalité (2.3) vaut donc en dehors d'un ensemble P-négligeable indépendant de $y \in B'$. Une variante du lemme 2 permet d'écrire:

$$\begin{aligned}\int_{B'} dy\, f_n(X_t - y) M(y,t,\omega) &= \int_{B'} dy\, f_n(X_0 - y) M(y,0,\omega)\\ &+ \sum_{i=1}^d \int_0^t \left(\int_{B'} dy \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(X_s - y) M(y,s,\omega)\right) dX_s^i\\ &+ \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \left(\int_{B'} dy \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_i \partial x_j}(X_s - y) M(y,s,\omega)\right) d\langle X^i, X^j\rangle_s\\ &+ \sum_{i=1}^d \int_0^t \left(\int_{B'} dy \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(X_s, s)\, a_N(y,s,\omega)\right) d\langle X^i\rangle_s\\ &+ \int_{B'} dy \int_0^t f_n(X_s - y)\, dM_s^y. \end{aligned} \tag{2.4}$$

En chaque $t_0 \in R_+$, le membre de gauche de (2.4) converge dans L^2 vers $M(X_t, t_0)$ (de même le premier terme du membre de droite converge dans L^2 vers $M(X_0, 0)$). Le second et le troisième terme du membre de droite de (2.4) convergent dans L^2 respectivement vers:

$$\sum_{i=1}^d \int_0^{t_0} \frac{\partial M}{\partial x_i}(X_s, s, \omega)\, dX_s^i \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^{t_0} \frac{\partial^2 M}{\partial x_i \partial x_j}(X_s, s, \omega)\, d\langle X^i, X^j\rangle_s$$

Le quatrième terme converge dans L^2 vers:

$$\sum_{i=1}^d \int_0^{t_0} \frac{\partial a_n}{\partial x_i}(X_s, s, \omega)\, d\langle X^i\rangle_s$$

qui n'est autre que: $\sum_{i=1}^d \left\langle X^i, \frac{\partial M}{\partial x_i}\right\rangle_{t_0}$.

Enfin le lemme 3 montre que le dernier terme converge dans L^2 vers $M_{t_0}^X$. On obtient donc à la limite:

$$\begin{aligned} M(X_{t_0}, t_0) = M(X_0, 0) &+ \sum_{i=1}^d \int_0^{t_0} \frac{\partial M}{\partial x_i}(X_s, s)\, dX_s^i\\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^{t_0} \frac{\partial^2 M}{\partial x_i \partial x_j}(X_s, s)\, d\langle X^i, X^j\rangle_s\\ &+ \sum_{i=1}^d \left\langle X^i, \frac{\partial M^X}{\partial x_i}\right\rangle_{t_0} + M_{t_0}^X \qquad \forall t_0 \in \mathbb{R}_+ \end{aligned} \tag{2.5}$$

On en déduit l'égalité (2.5) au sens des processus indistinguables puisque les deux membres de (2.5) définissent des processus continus à droite. □

La démonstration précédente nous permet aussi d'obtenir une variante du théorème 1:

Théorème 1'. *Soit $M(x,t,\omega)$ une application sur $R^d \times R_+ \times \Omega$ à valeurs dans R, de classe C^2 en x, les $D^\alpha M(x,t,\omega)$ $0 \leqq |\alpha| \leqq 2$ étant continues en x uniformément lorsque t reste dans un intervalle compact, pour ω fixé. On suppose de plus que pour chaque $x, M(x,.,.)$ est une martingale càdlàg de H, et $x \to M(x,.,.)$ est dans $C^{k,a}(R^d, H)$ avec $k+a>1+\frac{d}{2}$, et les sauts des $D^\alpha M^x$, $0 \leqq |\alpha| \leqq 2$, sont uniformément bornées.*

Si X est une semi-martingale continue à valeurs dans R^d, on a la formule (2.2).

Remarque. 1) La démonstration du théorème 1 permet aussi de voir que si: X est un processus continu adapté à variations bornées à valeurs dans R^d, $M(x,t,\omega)$ définit pour chaque $x \in R^d$ une martingale réelle càdlàg, $M(x,t,\omega)$ est de classe C^1 en x, les $D^\alpha M(x,t,\omega)$ étant continues en x uniformément lorsque t reste dans un intervalle compact, et à sauts uniformément bornés $0 \leqq |\alpha| \leqq 1$,

$$\tilde{M}_t = M(X_t, t) - M(X_0, 0) - \int_0^t \frac{\partial M}{\partial x_i}(X_s, s)\, dX_s^i \tag{2.6}$$

est une martingale localement bornée, nulle en 0.

On ne dispose plus a priori de l'expression (1.12) pour exprimer $\langle M, N\rangle$ quand $N \in H_0$, cependant si on reprend la démonstration du théorème 1, on peut remarquer que le terme $\int dy \int_0^t f_n(X_s - y)\, dM_s^y$ qui apparaît dans la formule (2.4) $\Big($et qui a un sens grâce à la formule (2.3) qui fournit une version régulière de $\int_0^t f_n(X_s - y)\, dM_s^y\Big)$ converge vers $\tilde{M}$. (qui a été localisée ainsi que M., au cours de la démonstration) dans H, indépendamment de f.

Ceci montre qu'on peut généraliser la définition de M^X en vue d'obtenir des énoncés du type du théorème 1. Le problème est alors de disposer de conditions commodes assurant l'existence de M^X.

2) Dans le cas où $\langle X^i, M^y\rangle = 0$ pour tout i et y on peut modifier l'énoncé qu'on a donné au 1) afin d'obtenir une formule analogue à (2.6) $\Big($mais comportant alors des termes $\int_0^t \frac{\partial^2 M}{\partial x_i \partial x_j}(X_s, s)\, d\langle X^i, X^j\rangle_s\Big)$. Nous allons terminer cette partie par un lemme:

Lemme 4. *Soit $F(x,t,\omega)$ une application de $R^d \times R_+ \times \Omega$ à valeurs dans R qui pour chaque x est progressivement measurable, et qui est de classe C^2 en x, les $D^\alpha F(x,t,\omega)$ $0 \leqq |\alpha| \leqq 2$ étant bornées. Soit X une semi-martingale continue à* *valeurs dans* R^d, *et* $A(x,t,\omega)=\int_0^t F(x,t,\omega)\,ds$, *on a:*

$$A(X_t,t)=\sum_{i=1}^{d}\int_0^t \frac{\partial A}{\partial x_i}(X_s,s)\,dX_s^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\int_0^t \frac{\partial^2 A}{\partial x_i \partial x_j}(X_s,s)\,d\langle X^i,X^j\rangle_s + \int_0^t F(X_s,s)\,ds. \tag{2.7}$$

Démonstration. Il suffit simplement de reprendre la démonstration du théorème 1 (qui est alors plus simple):

Après avoir localisé, on écrit la formule d'Ito pour $f_n(X_t-y)A(y,t)$ que l'on intègre ensuite par rapport à y (où $f_n(.)=n^d f(n.)$ avec $f\geqq 0$ de classe C^∞ à support compact sur R^d et $\int f(x)\,dx=1$) $\square$

Troisième partie

Dans cette partie nous allons considérer un espace de probabilité filtré muni d'un mouvement brownien d-dimensionnel B_t, et nous allons chercher à montrer que les processus x^ε définis par:

$$\begin{aligned} dx_t^\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon}F(x_t^\varepsilon, t/\varepsilon^2,\omega)\,dt + \sigma(x_t^\varepsilon, t/\varepsilon^2,\omega)\,\varepsilon\, dB_{t/\varepsilon^2} \\ x_0^\varepsilon &= x_0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

où F et σ sont des applications sur $R^d\times R_+\times\Omega$ à valeurs dans R^d et $M_d(R)$ (matrices $d\times d$) respectivement, convergent en loi vers une diffusion sous des hypothèses que nous allons préciser, lorsque ε tend vers 0.

Commençons par fixer les notations:

$(\Omega, F, F_t P)$ est un espace de probabilité muni d'une filtration satisfaisant aux conditions habituelles et d'un F_t-mouvement brownien d-dimensionnel B_t $t\geqq 0$.

On note L l'espace de Banach des processus réels progressivement mesurables bornés, muni de la norme de la convergence uniforme, et C l'espace de Banach des processus réels X_t, $t\geqq 0$, càdlàg adaptés, définis à une indistinguabilité près, muni de la norme $\|X\|_C=\sup_{t\geqq 0}\|X_t\|_\infty$.

Dans la proposition qui va suivre nous allons considérer la situation suivante:

$\tilde{L}$ est un espace vectoriel normé, j est une application linéaire continue de $\tilde{L}$ dans L et J est une application linéaire continue de $\tilde{L}$ dans C vérifiant:

$$\text{si } f\in\tilde{L},\ J(f)_t+\int_0^t j(f)_s\,ds \qquad \text{est une } F_t\text{-martingale.}$$

Commençons par donner deux exemples de triplets $(\tilde{L}, j, J)$ vérifiant les hypothèses (3.2):

Exemple. 1) soit $Y.$ un processus de Markov à valeurs dans $(E, \mathscr{E})$ espace mesurable, défini sur (Ω, F, F_t, P) satisfaisant aux conditions habituelles, et admettant un semi-groupe de transition P_t, $t \geqq 0$, mesurable.

On suppose que $f(Y_t)$ est progressivement mesurable quand $f \in b\mathscr{E}$, et qu'il existe une probabilité m sur $(E, \mathscr{E})$ invariante par P_t, et $K \geqq 0$ tels que:

$$\text{si } f \in b\mathscr{E} \quad \text{et} \quad m(f)=0, \qquad \sup_{x \in E} \int_0^\infty |P_s(f(x)| \, ds \leqq K \|f\|_\infty. \tag{3.3}$$

Soit $\tilde{L} = \{f \in b\mathscr{E}, m(f)=0\}$ et j l'application de $\tilde{L}$ dans L définie par:

$$j(f)_s(\omega) = f(Y_s(\omega)), \qquad \text{si on note } R(f) = \int_0^\infty P_s f \, ds \qquad \text{pour } f \in \tilde{L},$$

$R(f)(Y_t) + \int_0^t f(Y_s) \, ds$ est une martingale (non nécessairement régulière) qui admet une version càdlàg essentiellement unique, en vertu des hypothéses sur la filtration F_t. Si $J(f)$ est la version càdlàg (essentiellement unique) de $R(f)(Y.)$, le triplet $(\tilde{L}, j, J)$ vérifie (3.2).

On a ce type de situation dans le cas d'une diffusion récurrente sur une variété compacte (voir Brancovan-Bronner-Priouret [3]). On peut généraliser ces résultats à l'aide des noyaux potentiels récurrents et des fonctions spéciales (voir Neveu [16] et Revuz [22]).

2) Le deuxième exemple va être l'objet du

Lemme 5. *Considérons $(\Omega, F, F_{a,b}, P)$ un espace de probabilité muni de tribus $F_{a,b}$ qui croissent avec l'intervalle $[a,b]$. On suppose que la tribu F est complète, que les tribus $F_{a,b}$ contiennent les négligeables de F, que la filtration F_t $(=F_{0,t})$ vérifie les conditions habituelles, et que l'on a l'hypothèse de mélange:*

$$\|E(A/F_s) - E(A)\|_\infty \leqq r(t-s) \|A\|_\infty \qquad \text{si } t > s, \ A \in bF_{t,\infty} \tag{3.4}$$

où r est une fonction positive intégrable sur R_+, dx. (On note $F_{t,\infty} = \bigvee_{u \geqq t} F_{t,u}$).

Si $\tilde{L}$ est le sous-espace de Banach de L formé des processus X_t, progressivement mesurables bornés tels que $\forall t \geqq 0$ X_t est $F_{t,t}$-mesurable et $E(X_t)=0$, il existe une application linéaire continue J de $\tilde{L}$ à valeurs dans C telle que:

$$J(X)_t + \int_0^t X_s \, ds \qquad \textit{est une } F_t\textit{-martingale pour } X \in \tilde{L}.$$

Démonstration. Soit $X \in \tilde{L}$, nous allons montrer dans un premier temps que si $t \in R_+$, $E\left(\int_t^{t+A} X_u \, du / F_t\right)$ converge en norme dans $L^\infty(P)$ vers une limite que nous noterons G_t.

En effet:

$$\text{Si } B \in F_t \quad \text{et} \quad A < A', \qquad \left| E\left(1_B \cdot \int_{t+A}^{t+A'} X_u \, du\right) \right| \leqq \int_{t+A}^{t+A'} |E(1_B \cdot X_u)| \, du$$
$$\leqq \int_{t+A}^{t+A'} r(u-t) \, du \cdot \|X\|_L \cdot P(B).$$

On en déduit que:

$$\left\| E\left(\int_{t+A}^{t+A'} X_u\, du/F_t\right)\right\|_\infty \leqq \int_{t+A}^{t+A'} r(u-t)\, du \cdot \|X\|_L.$$

On a donc la convergence annoncée, de plus la limite G_t vérifie:

$$\|G_t\|_\infty \leqq \int_0^\infty r(u)\, du \cdot \|X\|_L.$$

Il est facile de voir que $M_t = G_t + \int_0^t X u\, du$ est une martingale (non forcément régulière) qui admet en vertu des hypothèses sur la filtration F_t une version essentiellement unique continue à droite. On en déduit l'application linéaire continue J satisfaisant aux conditions du lemme. □

Remarque. Considérons $(\tilde{L}, j, J)$ satisfaisant à (3.2). Soit $x \to f_x$ une application appartenant à $C^k(R^d, \tilde{L})$, $J(f_.)$ appartient alors à $C^k(R^d, C)$, et il n'est pas difficilé de montrer qu'il existe une application $G(x,t,\omega)$ sur $R^d \times R_+ \times \Omega$ à valeurs dans R vérifiant:

$G(x,t,\omega)$ est de classe C^k en x, les $D^\alpha G(x,t,\omega)$ $0 \leqq |\alpha| \leqq k$ sont continues en x uniformément en t, et càdlàg en t.

Pour chaque x les $D^\alpha G(x,.,.)$ $0 \leqq |\alpha| \leqq k$ sont indistinguables des $J(D^\alpha f_x)$.

On en déduit immédiatement que $M(x,t,\omega) = \int_0^t j(f_x)_s\, ds + G(x,t,\omega)$ vérifie les mêmes propriétés que G, lorsque t reste inférieur à $T \in R_+$ fixé.

Dans la suite, nous conserverons ces notations.

Nous allons maintenant montrer la

Proposition 6. *Considérons: un triplet $(\tilde{L}, j, J)$ vérifiant la propriété (3.2), $\sigma(x,t,\omega)$ une application de $R^d \times R_+ \times \Omega$ dans $M_d(R)$ bornée, uniformément lipschitzienne en x, et progressivement measurable pour chaque x, pour $i \in (1,d)$ des applications $f_.^i \in C^{k,a}(R^d, \tilde{L})$ avec $k + a > \frac{d}{2} + 1$, $k \geqq 2$ et $\|D^\alpha f_.^i\|_{\tilde{L}}$ bornées pour $0 \leqq |\alpha| \leqq 2$. (lorsque $\sigma = 0$, on suppose simplement les $f_.^i$ de classe C^1, et les $\|D^\alpha f_.^i\|_{\tilde{L}}$ $0 \leqq |\alpha| \leqq 1$ bornées).*

On note $a_{k,l}(x,s,\omega)$ une version régulière de $d\frac{\langle M^{k,x}, B^l\rangle}{ds}$ (voir proposition 1) et on suppose $a_{k,l}$ et $\frac{\partial a_{k,l}}{\partial x_m}$ $k,l,m \in (1,d)$ bornés.

Alors les processus x_t^ε, $t \geqq 0$, solutions de:

$$\begin{aligned} dx_t^\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon} F(x_t^\varepsilon, t/\varepsilon^2, \omega)\, dt + \sigma(x_t^\varepsilon, t/\varepsilon^2, \omega)\, dB_t^\varepsilon \\ x_0^\varepsilon &= x_0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

où $F^i(x,t,\omega) = j(f_x^i)_t(\omega)$ et $B_t^\varepsilon = \varepsilon B_{t/\varepsilon^2}$, ont des lois étroitement relativement compactes, de plus si g est de classe C^∞ à support compact dans R^d à valeurs *dans R:*

$$g(x_t^\varepsilon)=g(x_0)+\int_0^t f_i(x_s^\varepsilon)\left[\frac{\partial G^i}{\partial x_k}F^k+\sigma_{k,l}\frac{\partial a_{i,l}}{\partial x_k}\right](x_s, s/\varepsilon^2)\,ds$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t f_{i,j}(x_s^\varepsilon)\left[F^iG^j+F^jG^i+\sigma^{i,k}\sigma^{j,k}+a_{i,k}\sigma_{j,k}+a_{j,k}\sigma_{i,k}\right](x_s^\varepsilon, s/\varepsilon^2)\,ds$$
$$+\text{martingale}+O(\varepsilon) \tag{3.6}$$

où le terme $O(\varepsilon)$ doit être entendu au sens de la norme uniforme lorsque t reste dans un intervalle compact de R_+.

Démonstration. Commençons par démontrer l'étroite compacité relative des lois des processus x^ε. Il nous suffit clairement de démontrer l'étroite compacité relative d'une suite x^{ε_n} où ε_n tend vers 0 (si $\limsup \varepsilon_n>0$, on peut extraire une sous-suite étroitement convergente).

Posons $N_t^\varepsilon=(\varepsilon G^i(x_t^\varepsilon, t/\varepsilon^2, \omega))$ $i\in(1, d)$.
Nous allons étudier une perturbation de x_t^ε par N_t^ε.

Les formules (2.2) du théorème 1', (2.7) du lemme 4 (et dans le cas $\sigma=0$, la remarque 1) qui suit le théorème 1') permettent d'écrire:

$$dN_t^{k,\varepsilon}=\varepsilon\frac{\partial G^k}{\partial x_i}(x_t^\varepsilon, t/\varepsilon^2)\,dx_t^{i,\varepsilon}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G^k}{\partial x_i\partial x_j}(x_t^\varepsilon, t/\varepsilon^2)\,d\langle x^{i,\varepsilon}, x^{j,\varepsilon}\rangle_t$$
$$+\sigma_{i,j}\cdot\frac{\partial a_{k,j}}{\partial x_i}(x_t^\varepsilon, t/\varepsilon^2)\,dt-\frac{1}{\varepsilon}F^k(x_t^\varepsilon, t/\varepsilon^2)\,dt+dM_t^{k,x^\varepsilon}. \tag{3.7}$$

où $M_\cdot^{k,x^\varepsilon}$ est l'intégrale stochastique de la famille $\varepsilon M_{t/\varepsilon^2}^{k,x}$ (F_{t/ε^2}-martingales) le long du processus x^ε.
(Dans le cas où $\sigma=0$, on obtient:

$$dN_t^{k,\varepsilon}=\varepsilon\frac{\partial G^k}{\partial x_i}(x_t^\varepsilon, t/\varepsilon^2)\,dx_t^{i,\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon}F^k(x_t^\varepsilon, t/\varepsilon^2)\,dt+d\tilde{M}_t^{k,\varepsilon}$$

oú $\tilde{M}_t^{k,\varepsilon}$ est une martingale.)

Nous allons traiter le cas $\sigma\neq 0$, le cas $\sigma=0$ s'en déduisant immédiatement.

Le développement de $x_t^\varepsilon+N_t^\varepsilon$ permet d'écrire:

$$x_t^{k,\varepsilon}=x_0^k+\int_0^t\left[\frac{\partial G^k}{\partial x_i}F^i+\sigma_{i,j}\frac{\partial a_{k,j}}{\partial x_i}\right](x_s^\varepsilon, s/\varepsilon^2)\,ds+\int_0^t\sigma_{k,l}(x_s^\varepsilon, s/\varepsilon^2)\,dB_s^{l,\varepsilon}$$
$$+\int_0^t\varepsilon\frac{\partial G^k}{\partial x_i}\sigma_{i,l}(x_s^\varepsilon, s/\varepsilon^2)\,dB_s^{l,\varepsilon}+dM_t^{k,x^\varepsilon}+O(\varepsilon).$$

Nous allons maintenant utiliser le critère d'étroite compacité relative d'Aldous sous la forme qui se trouve chez Metivier [11].

Si les S^ε (on supprime l'indice n pour ne pas surcharger l'écriture) sont des $F_t^\varepsilon(=F_{t/\varepsilon^2})$-temps d'arrêt uniformément bornés par $T\in R_+$, et si $\delta>0$:

$$E[\sup_{a\leqq\delta}|x_{S^\varepsilon+a}^{i,\varepsilon}-x_{S^\varepsilon}^i|^2]\leqq C\delta^2+CE[\sup_{a\leqq\delta}|M_{S^\varepsilon+a}^{i,x^\varepsilon}-M_{S^\varepsilon}^{i,x^\varepsilon}|^2]+C\delta+O(\varepsilon).$$

Le second terme du membre de droite est inférieur à:

$$4CE[\langle M^{i,x^\varepsilon}\rangle_{S^\varepsilon}^{S^\varepsilon+\delta}]$$

or la formule d'Ito et (3.7) (ne pas oublier que les termes ne sont pas tous continus) permettent d'écrire:

$$(N_t^{k,\varepsilon})^2=2\int_0^t N_s^{k,\varepsilon}\left(\frac{\partial G^k}{\partial x^i}F^i-\frac{1}{\varepsilon}F^k+\sigma_{i,j}\frac{\partial a_{k,j}}{\partial x_i}\right)(x_s^\varepsilon, s/\varepsilon^2)\,ds+\langle M^{k,x^\varepsilon}\rangle_t$$
$$+\text{martingale}+O(\varepsilon).$$

On en déduit que:

$$E[\sup_{a\leqq\delta}|X_{S^\varepsilon+a}^{i,\varepsilon}-x_{S^\varepsilon}^{i,\varepsilon}|^2]\leqq C'\delta^2+C'\delta+O(\varepsilon)$$

ce qui nous donne, en vertu du critère d'Aldous, l'étroite compacité cherchée.

Montrons maintenant la formule (3.6):
la formule d'Ito permet d'écrire:

$$\begin{aligned}g(x_t^\varepsilon)+g_i'(x_t^\varepsilon)\cdot N_t^{i,\varepsilon}&=g(x_0)+g_i'(x_0)N_0^{i,\varepsilon}+\int_0^t g_i'(x_s^\varepsilon)\,dx_s^{i,\varepsilon}\\&+\frac{1}{2}\int_0^t g_{i,j}''(x_s^\varepsilon)\,d\langle x^{i,\varepsilon},x^{j,\varepsilon}\rangle_s+\int_0^t g_i'(x_s^\varepsilon)\,dN_s^{i,\varepsilon}\\&+\int_0^t g_{i,j}''(x_s^\varepsilon)N_s^{i,\varepsilon}dx_s^{j,\varepsilon}+\int_0^t g_{i,j}''(x_s^\varepsilon)\,d\langle X^{j,\varepsilon},N^{i,\varepsilon}\rangle_s\\&+\frac{1}{2}\int_0^t g_{i,j,k}'''(x_t^\varepsilon)N_s^{i,\varepsilon}d\langle x^{j,\varepsilon},x^{k,\varepsilon}\rangle_s.\end{aligned}$$

On en déduit:

$$\begin{aligned}g(x_t^\varepsilon)=g(x_0)&+\int_0^t g_i'(x_s^\varepsilon)\left[\frac{\partial G^i}{\partial x^k}F^k+\sigma_{k,l}\frac{\partial a_{i,l}}{\partial x_k}\right](x_s^\varepsilon,s/\varepsilon^2)\,ds\\&+\frac{1}{2}\int_0^t g_{i,j}''(x_s^\varepsilon)[F^iG^j+F^jG^i+\sigma^{i,k}\sigma^{j,k}+a^{i,k}\sigma^{j,k}+a^{j,k}\sigma^{i,k}](x_s^\varepsilon,s/\varepsilon^2)\,ds\\&+\text{martingale}+O(\varepsilon).\end{aligned}$$

qui n'est autre que la formule (3.6). □

Remarque. En vertu de la remarque 2) suivant le théorème 1', on obtient le fait que la proposition 6 reste valide, dans le cas où les martingales $N^{i,x}$ et $M^{j,x'}$ sont fortement orthogonales pour tout x, x', i, j $\left(\text{en posant } N_t^x=\int_0^t \sigma(x,s,\omega)\,dB_s\right)$ en faisant seulement l'hypothèse:

$f_\cdot\in C^2(R^d,\tilde{L})$ et $\|D^\alpha f_\cdot\|_{\tilde{L}}$ bornée pour $0\leqq|\alpha|\leqq 2$.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le

Théorème 2. *Considérons $(\Omega, F, F_{a,b}, P)$ vérifiant les hypothèses du lemme 5 relativement à une fonction r qui vérifie en outre: $u\cdot r(u)$ décroit, et tend vers 0 en $+\infty$.*

Considérons sur $R^d \times R_+ \times \Omega$ *deux applications* $F(x,t,\omega)$ *et* $\sigma(x,t,\omega)$ *à valeurs respectivement dans* R^d *et* $M_d(R)$.

On suppose que:

pour chaque $x F(x,.,.)$ *et* $\sigma(x,.,.)$ *sont progressivement mesurables,* σ *est uniformément lipschitzienne en* x *et bornée,* $x \to F^i(x,.,.)$ $i \in (1,d)$ *est une application de* $C^{k,a}(R^d, L)$ *avec* $k+a > \frac{d}{2}+1$ *et* $k \geqq 2$, *et* $\left\| \frac{\partial^{|\alpha|} F^i}{\partial x^\alpha}(x,.,.) \right\|_L$ *est bornée pour* $0 \leqq |\alpha| \leqq 2$.

(Dans le cas $\sigma = 0$, *on suppose seulement* F *de classe* C^1 *en* x, *à dérivées uniformément lipschitziennes en* x, *et les* $\left\| \frac{\partial^{|\alpha|} F^i}{\partial x^\alpha} \right\|_L$ *uniformément bornées pour* $0 \leqq |\alpha| \leqq 1$), *pour chaque* x *et* t $E(F(x,t,\omega)) = 0$, $\sigma(x,t,\omega)$ *et* $F(x,t,\omega)$ *sont* $F_{t,t}$*-mesurables, les versions régulières,* $a_{i,j}(x,s,\omega)$ *de* $\frac{d\langle M^{i,x}, B^j\rangle}{ds}$ *sont bornées ainsi que leurs dérivées, qui sont uniformément lipschitziennes,* $i,j \in (1,d)$, *pour chaque* x *et* t $a_{i,j}(x,t,\omega)$ *est* $F_{t,t}$*-mesurable,* $i,j \in (1,d)$, *il existe des fonctions* $A_{i,j}$ *et* B_i, $i,j \in (1,d)$, *sur* R^d *à valeurs réelles telles que:*

$$\text{a)}\quad \delta_T = \sup_{x,t} \left| \frac{1}{T} E(\{(M^{i,x} + N^{i,x})(M^{j,x} + N^{j,x})\}_t^{t+T}) - A_{i,j}(x) \right| \tag{3.8}$$

tend vers 0 *lorsque* T *tend vers* $+\infty$, $\forall i,j$

$$\text{b)}\quad \delta'_T = \sup_{x,t} \left| \frac{1}{T} \left[\int_t^{t+T} \int_t^s E\left(\frac{\partial F^i}{\partial x}(x,s,\omega) \cdot F(x,u,\omega) \right) ds\, du + E\left(\left\{ \frac{\partial M^{i,x} \cdot N^x}{\partial x} \right\}_t^{t+T} \right) \right] - B_i(x) \right|$$

tend vers 0 *quand* T *tend vers* $+\infty$, $\forall i$.

Où N_t^x *est la martingale d-dimensionnelle* $\int_0^t \sigma(x,s,\omega)\, dB_s$.

Si le problème des martingales (x_0, A, B) *possède une unique solution* P_0, *les processus* x_t^ε $t \geqq 0$ *solutions de:*

$$dx_t^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} F(x_t, t/\varepsilon^2, \omega)\, dt + \sigma(x_t, t/\varepsilon^2, \omega)\, dB_t^\varepsilon$$
$$x_0^\varepsilon = x_0$$

où B_t^ε *est le* F_{t/ε^2}-mouvement brownien $\varepsilon B_{t/\varepsilon^2}$ *convergent en loi vers* P_0, *lorsque* ε *tend vers* 0.

(Voir la remarque qui suit le théorème pour des compléments.)

Démonstration. Pour obtenir le théorème, en vertu de la proposition 6, il nous suffit de montrer que tout point limite des lois des processus x^ε est solution du problème des martingales (x_0, A, B).

Pour cela nous allons appliquer aux termes qui apparaissent dans la formule (3.6) le lemme suivant:

Lemme 6. *Soit* $H(x,t,\omega)$ *un processus réel mesurable pour chaque* x, *borné, uniformément lipschitzien en* x.

On suppose qu'il existe une fonction $w \geqq 0$ *sur* R_+, *décroissante, tendant vers* 0 *en* $+\infty$, *et une fonction* $\bar{H}$ *sur* R^d *telles que:*

$$\text{si } x \in R^d \quad \text{et} \quad s<t, \quad \|E(H(x,t,\omega)/F_s) - E(H(x,t,\omega))\|_\infty \leqq w(t-s), \tag{3.9}$$

$$\eta_T = \sup_{t,x} \left| \frac{1}{T} \int_t^{t+T} E(H(x,s,\omega)) - \bar{H}(x)\, ds \right| \tag{3.10}$$

tend vers 0 *quand* T *tend vers* $+\infty$.

Alors

$$\text{si } s<t \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \left\| E\left(\int_s^t H(x_u^\varepsilon, u/\varepsilon^2, \omega) - \bar{H}(x_u^\varepsilon)\, du / F_{s/\varepsilon^2} \right) \right\|_2 = 0.$$

Démonstration. Commençons par remarquer qu'il suffit d'effectuer la démonstration dans les deux cas particuliers suivants:

a) pour tout x et t, $E(H(x,t,\omega)) = 0$,

b) $H(x,t)$ est déterministe, et $\bar{H}=0$.

Nous allons traiter le cas a), le b) étant plus facile.

Soit $\phi^\varepsilon L^2(F_s^\varepsilon)$, on a:

$$\left| E\left(\phi^\varepsilon \cdot \int_s^t H(x_u^\varepsilon, u/\varepsilon^2, \omega)\, du\right) \right| \leqq A^\varepsilon + B^\varepsilon \quad \text{où:}$$

$$A^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} dv \left| E\left(\phi^\varepsilon \cdot \int_0^t H(x_u^\varepsilon, u/\varepsilon^2) - H\left(x_u^\varepsilon, u/\varepsilon^2 + v + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) du \right) \right|$$

et

$$B^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}\, E\left(\int_0^t \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} H\left(x_u^\varepsilon, u/\varepsilon^2 + v + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \cdot \phi^\varepsilon\, du\, dv \right) \Bigg|.$$

Commençons par étudier A_t^ε:

On a:

$$\left| \int_0^t H(x_u^\varepsilon, u/\varepsilon^2)\, du - \int_0^t H\left(x_u^\varepsilon, u/\varepsilon^2 + v + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) du \right|$$

$$\leqq \left| \int_0^t H(x_u^\varepsilon, u/\varepsilon^2)\, du - \int_{v\varepsilon^2 + \varepsilon^{3/2}}^{t + v\varepsilon^2 + \varepsilon^{3/2}} H(x_{u - v\varepsilon^2 - \varepsilon^{3/2}}^\varepsilon, u/\varepsilon^2)\, du \right|$$

$$\leqq 2C'(v\varepsilon^2 + \varepsilon^{3/2}) + \left| \int_{(v\varepsilon^2 + \varepsilon^{3/2}) \wedge t}^t H(x_u^\varepsilon, u/\varepsilon^2) - H(x_{u - v\varepsilon^2 - \varepsilon^{3/2}}^\varepsilon, u/\varepsilon^2)\, du \right|$$

$$\leqq 2C'(v\varepsilon^2 + \varepsilon^{3/2}) + K'' \int_{(v\varepsilon^2 + \varepsilon^{3/2}) \wedge t}^t |x_u^\varepsilon - x_{u - v\varepsilon^2 - \varepsilon^{3/2}}^\varepsilon|\, du$$

or: $E(|x_{s''} - x_{s'}|^2)^{1/2} \leqq K' \left(\dfrac{s'' - s'}{\varepsilon} + \sqrt{s'' - s'} \right)$ si $s'' > s'$.

On en déduit:

$$A^\varepsilon \leqq \left[C\varepsilon^{3/2} + t \cdot K \sqrt{\varepsilon} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} (v\varepsilon + \sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon^2 v + \varepsilon^{3/2}})\, dv \right] \cdot \|\phi^\varepsilon\|_2$$

$$\leqq [C\varepsilon^{3/2} + t \cdot K \sqrt{\varepsilon} (\tfrac{1}{2} + \sqrt{\varepsilon} + \tfrac{4}{3}\sqrt{2}\, \varepsilon^{9/4})] \cdot \|\phi^\varepsilon\|_2$$

Occupons nous du terme B^ε.

Du fait de la continuité en x et $H(x,t)$ et de (3.9) on a:

$$\left\| E\left(H\left(x_u^\varepsilon, u/\varepsilon^2+v+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\Big/F_{u/\varepsilon^2}\right)\right\|_\infty \leqq w\left(v+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\leqq w\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right).$$

Donc:

$$B^\varepsilon \leqq t\,w\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\cdot \|\phi^\varepsilon\|_2$$

au vu des majorations de A^ε et B^ε, on obtient:

$$\left\| E\left(\int_s^t H(x_u^\varepsilon, u/\varepsilon^2, \omega)\,du/F_{u/\varepsilon^2}\right)\right\|_2 \leqq t\,w\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+O(\sqrt{\varepsilon})\quad (s \text{ et } t \text{ fixés})$$

d'où le lemme. □

Avant de pouvoir appliquer le lemme prècédent aux termes qui apparaissent dans la formule (3.6), faisons la remarque suivante:
si h et h' sont dans $\tilde{L}$, et si J est l'application linéaire continue de $\tilde{L}$ dans C construite au lemme 5,

$$\text{pour } s<t: \tag{3.11}$$

$$\|E(J(h)_t\cdot h'_t/F_s)-E(J(h)_t h'_t)\|_\infty \leqq \|h\|_L\cdot\|h'\|_L\left(2\int_{t-s}^\infty r(u)\,du+(t-s)\,r(t-s)\right).$$

En effet, si $B\in F_s$:

$$|E[1_B\cdot(J(h)_t h'_t - E[J(h)_t h'_t])]| \leqq \int_{t+t-s}^\infty |E[1_B(h_u h'_t - E[h_u h'_t])]|\,du$$
$$+\int_t^{t+(t-s)} |E[1_B(h_u h'_t - E[h_u h'_t])]|\,du \leqq 2\int_{(t-s)} r(u)\,du\times P(B)\times\|h\|_L\|h'\|_L$$
$$+(t-s)\,r(t-s)\,\|h\|_L\|h'\|_L\cdot P(B).$$

On en déduit (3.11).

Terminons la démonstration du théorème:
si f à valeurs réelles est de classe C^∞ à support compact sur R^d:

$$f(x_t^\varepsilon)=f(x_0)+\int_0^t f_i(x_s^\varepsilon)\left[\frac{\partial G^i}{\partial x_k}F^k+\frac{\partial a_{i,l}}{\partial x_k}\sigma_{k,l}\right](x_s^\varepsilon, s/\varepsilon^2)\,ds$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t f''_{i,j}(x_s^\varepsilon)[F^iG^j+F^jG^i+\sigma^{i,k}\sigma^{j,k}+a^{i,k}\sigma^{j,k}+a^{j,k}\sigma^{i,k}](x_s^\varepsilon, s/\varepsilon^2)\,ds$$
$$+\text{martingale}+O(\varepsilon).$$

Or, d'après la formule d'Ito:

$$G_t^{i,x}G_t^{j,x}=\int_0^t (F^{i,x}G^{j,x}+F^{j,x}G^{i,x})_s\,ds+\text{martingale}+\langle M^{i,x}, M^{j,x}\rangle_t$$

en utilisant (3.8) a) on voit que les hypothèses du lemme 6 sont vérifiées pour $f_{i,j}(x)\cdot(F^i G^j+F^j G^i+\sigma_{i,k}\cdot\sigma_{j,k}+a_{i,k}\sigma_{j,k}+a_{j,k}\sigma_{i,k})\ (x,s,\omega)$ relativement à la fonction $A_{i,j}(.)$.

De même comme:

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T} E\left[\left(\frac{\partial G^i}{\partial x_k}F^k+\frac{\partial a_{i,l}}{\partial x_k}\sigma_{k,l}\right)(x,s)\right]ds$$
$$=\frac{1}{T}\int_t^{t+T} du\int_t^u E\left[\frac{\partial F^i}{\partial x}(x,u,\omega)\cdot F(x,v,\omega)\right]dv+\frac{1}{T}E\left[\left\{\frac{\partial M^i}{\partial x}(x,.)\cdot N^x_{\cdot}\right\}_t^{t+T}\right]$$
$$+\frac{1}{T}\int_t^{t+T} du\int_{t+T}^{\infty} E\left[\frac{\partial F^i}{\partial x}(x,v,\omega)\cdot F(x,u,\omega)\right]dv$$

et le dernier terme est inférieur en valeur absolue à:

$$\frac{1}{T}\cdot C.\int_t^{t+T}\phi(u)\,du \quad \text{où} \quad \phi(u)=\int_u^{+\infty} r(v)\,dv.$$

On voit que les hypothèses du lemme 6 sont vérifiées pour:

$$f_i(x)\cdot\left(\frac{\partial G^i}{\partial x_k}\cdot F^k+\frac{\partial a_{i,m}}{\partial x_k}\cdot\sigma_{k,m}\right)(x,s,\omega)$$

d'où le théorème. □

Remarques. 1) la condition (3.8) a) peut se récrire:

$$\delta''_T=\sup_{t,x}\left|\frac{1}{T}E\left(\left(\int_t^{t+T}F^i(x,u)\,du+\int_t^{t+T}\sigma_{i,k}(x,u)\,db^k_u\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.\left(\int_t^{t+T}F^j(x,u)\,du+\int_t^{t+T}\sigma_{j,k}(x,u)\,dB^k_u\right)\right)-A_{i,j}(x)\right|$$

tend vers 0 quand T tend vers $+\infty$, $\forall i,j$.

2) Dans le cas $\sigma=0$, les hypothèses du théorème 2) assurent l'unicité de la solution du problème des martingales (x_0,A,B).

En effet, la démonstration précédente permet de voir que:

$$A_{i,j}(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T E(h_{i,j}(x,t,\omega))\,dt,$$

où $h_{i,j}(x,t,\omega)=(F^iG^j+F^jG^i)\ (x,t,\omega)$, sous les hypothèses du théorème 2, $h_{i,j}$ est continument différentiable en x, bornée, à dérivées bornée et uniformément lipschitziennes.

On en déduit que $A_{i,j}$ est bornée, continument différentiable, à dérivées bornées et uniformément lipschitziennes (les dérivées en question ne sont autres que:

$$\frac{\partial A_{i,j}}{\partial x_m}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T E\left(\frac{\partial h_{i,j}}{\partial x_m}(x,t,\omega)\right)dt,$$

cette dernière limite existant parce que les fonctions

$$D_h(T)=\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{h}[E(h_{i,j}(x+he_m,t,\omega)-h_{i,j}(x,t,\omega))]\,dt$$

convergent uniformément sur $R_{+,*}$ vers:

$\frac{1}{T}\int_0^T E\left(\frac{\partial h_{i,j}}{\partial x_m}(x,t,\omega)\right)dt$ lorsque h tend vers 0 (e_i est la base canonique de R^d)).

On en déduit que $\sqrt{A(.)}$ est uniformément lipschitzienne bornée (ceci résulte d'une légère modification du théorème 3, p. 84 de Priouret [21]), et donc le problème des martingales (x_0, A, B) possède une unique solution.

On peut noter que le théorème 2 établit la convergence en loi des processus x^ε (dans le cas $\sigma=0$) sous des hypothèses de mélange sur les tribus $F_{a,b}$ et de différentiabilité sur F plus faibles que celles de Khashminski [6, 7].

3) Dans le cas où les martingales $N^{i,x}$ et $M^{j,x'}$ sont orthogonales deux à deux, pour tout i,j,x,x', on obtient le résultat du théorème 2, en supposant seulement comme condition de différentiabilité sur F que: $x\to F(x,.,.)$ est dans $C^2(R^d,L)$ et que les $\left\|\frac{\partial^{|\alpha|}F}{\partial x\alpha}(x,.,.)\right\|_L$ sont bornées, $0\leqq|\alpha|\leqq 2$ (pour cela voir la remarque suivant la proposition 6).

Bibliographie

1. Bensoussan, A., Lions, J.L., Papanicolaou, G.: Asymptotic analysis for periodic structures Amsterdam-New York-Oxford: North-Holland 1980
2. Bismut, J.M.: Flot stochastique et formule d'Ito Stratonavitch généralisée. C.R. Acad. Sci. Paris série A **290**, 483–486 (1980)
3. Brancovan, B., Bronner, F., Priouret, P.: Grandes déviations pour les solutions de certains systèmes différentiels. Publications du Laboratoire Probabilités Paris VI. 1981
4. Doleans-Dade, C.: Intégrales stochastiques dépendant d'un paramètre. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris **16**, 23–34 (1967)
5. Freidlin, M.I.: The Averaging principle and theorems on large deviations. Russian Math., Surveys **33.5**, 117–176 (1978)
6. Khashminski, R.Z.: On stochastic Processes defined by differential equations with small parameter. Theory Probab Appl. **11**, 211–228 (1966)
7. Khashminski, R.Z.: A limit theorem for the solutions of differential equations with random right hand-sides. Theory Probab Appl. **11**, 390–406 (1966)
8. Khashminski, R.Z.: On the Averaging Principle for Ito's stochastic differential equations. Kybernetica (Prague) **4**, 260–277 (1968)
9. Kunita, H.: Some extensions of Ito's formula. Durham, N.C.: Naison de Publication
10. Kunita, H., Watanabe, S.: On square Integrable Martingales. Nagoya Math. J. **30**, 209–245 (1967)
11. Metivier, M.: Sufficient conditions for tightess ans weak convergence of processes. University of Minnesota Internal Report
12. Meyer, P.A.: Un cours sur les Intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités X Springer Lecture Note **511**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer
13. Meyer, P.A.: Probabilités et Potentiel. Paris: Hermann 1966
14. Neveu, J.: Bases mathematiques du Calcul des Probabilités. Paris: Masson 1970
15. Neveu, J.: Cours de 3ème cycle sur les Intégrales stochastiques. Université de Paris VI, 1971–1972
16. Neveu, J.: Potentiel Markovien Récurrent des chaînes de Harris. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **XXII**, 2, 85–130 (1972)
17. Papanicolaou, G.: Wave Propagation in a one-dimensional random medium. Siam J. Appl. Math., **21**, 13–18 (1971)

18. Papanicolaou, G.: Asymptotic analysis of Transport Processes. Bull. Amer. Math. Soc. **81**, 330–392 (1975)
19. Papanicolaou, G., Varadhan, S.R.S.: A limit theorem with strong Mixing in Banach Space and two applications to stochastic differential equations Comm. Pure Appl. Math. **XXII**, 497–524 (1973)
20. Papanicolaou, G., Stroock, D.W., Varadhan, S.R.S.: Martingale Approach to some limit theorems. Statistical Mechanics conference. M. Reed Editor. Duke University math séries Vol. **3**, Durham, N.C. 1977
21. Priouret, P.: Processus de diffusion et équations différentielles stochastiques. Ecole d'été de Saint-Flour. Springer Lecture Notes in Maths. n° **390**, 37–113. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1973
22. Revuz, D.: Markov Chains. Amsterdam: North-Holland
23. Stricker, C., Yor, M.: Calcul Stochastique dépendant d'un paramètre. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **45**, 109–133 (1978)
24. Triebel, H.: Interpolation Theory, Function spaces, différential operators. Amsterdam-New York-Oxford: North-Holland 1978
25. Uspenskii, S.V.: An imbedding theorem for S.L. Sobolev classes W_p^r of fractionnal order. Soviet Math. Dokl. **1**, 132–133 (1960)
26. Uspenskii, S.V.: Properties of the classes W_p^r with fractionnal derivatives on differentiable manifolds. Soviet Math. Dokl. **1**, 495–497 (1960)
27. Yor, M.: Sur la continuité des temps locaux associés à certaines semimartingales. Temps locaux. Asterisque **52–53**, 23–35 (1978)

Reçcu le 9 Juillet 1981; en forme révisée le 10 Janvier 1982