Probab. Th. Rel. Fields 73, 135–148 (1986)

Probability Theory and Related Fields

Etude Asymptotique par des mesures de $\mathbb{R}^3$ de saucisses de Wiener localisées

Sophie Weinryb

Centre de Mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique, F-91128 Palaiseau Cédex, France

Summary. Let $(B_t)_{t\geqq 0}$ be a Brownian Motion in $\mathbb{R}^3$. We denote its Wiener sausage by $w_t^{1/n}$:

$$w_t^{1/n}=\left\{m\in\mathbb{R}^3/\exists\, s\leqq t,\ \|B_s-m\|\leqq\frac{1}{n}\right\}.$$

Spitzer has proved in 64 that $\lim\limits_{n\to\infty}[n\cdot\operatorname{Vol}(w_t^{1/n})]=2\pi t$.

If K is a closed set in $\mathbb{R}^3$, we have extended this result to a localized Wiener sausage $w_t^{1/n}(K)$ and to a measure μ whose support lies in K. We define:

$$w_t^{1/n}(K)=\left\{m\in\mathbb{R}^3/\exists\, s\leqq t,\ \|B_s-m\|\leqq\frac{1}{n}\ \text{and}\ B_s\in K\right\}.$$

If there exists a function of "local capacity", C_K, with respect to K and if μ satisfies some integrability properties, then

$$\lim_{n\to\infty} n\,\mu(w_t^{1/n}(K))=\int_0^t C_K(B_s)\,dA_s^\mu,$$

where $(A_t^\mu)_t$ is the additive functional which is related to μ and to $(B_t)_{t\geqq 0}$.

Finally we have applied this result to solve an homogeneization problem concerning a Brownian motion when it is absorbed on a collection of small disks in a plane.

Dans un article paru en 1964, Spitzer avait étudié le volume de la saucisse de Wiener dans $\mathbb{R}^3$ lorsque le rayon tendait vers 0 [1]. Plus récemment J.F. Le Gall a obtenu des résultats analogues pour le volume de cette saucisse par une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue [2].

Nous nous proposons ici d'obtenir des résultats du même type concernant une classe plus large de mesures et surtout un ensemble aléatoire pouvant être strictement inclus dans la saucisse de Wiener. On verra par l'application qui est faite de cette estimation qu'il s'agit là d'une question assez naturelle. La démonstration repose en grande partie sur la relation de théorie du potentiel existant entre une mesure de $\mathbb{R}^3$ à potentiel newtonien borné et un processus additif à variation bornée dont le support est formé des temps de passage do brownien dans le support de la mesure.

Ce résultat nous permet de résoudre directement un problème «d'homogénéisation» concernant des lois subordonnées à celle du brownien de $\mathbb{R}^3$ réfléchi sur le plan $\{z=0\}$. Plus précisément ces lois, $(P^n)_n$, sont celles du brownien réfléchi, tué au premier temps d'entrée dans la réunion de n disques du plan $\{z=0\}$ de rayon $\frac{1}{n}$. G. Del Grosso, R. Figari et E. Orlandi ont obtenu un autre type de convergence [3] à l'aide de méthodes utilisées par Papanicolaou et Varadhan [4] pour résoudre un problème analogue avec cette fois des sphères de $\mathbb{R}^3$.

1. Le théorème de convergence

Soit K un fermé de $\mathbb{R}^3$, notons $w_t^{1/n}(K)$ la «saucisse de Wiener» construite à partir de l'intersection de la trajectoire brownienne de $\mathbb{R}^3$ avec K. Plus précisément:

$$w_t^{1/n}(K)=\left\{m\in\mathbb{R}^3 \text{ tel que } \exists\, s\leqq t, \|B_s-m\|\leqq\frac{1}{n} \text{ et } B_s\in K\right\}$$

soit μ une mesure finie de $\mathbb{R}^3$ ne chargeant pas les polaires et portée par un compact $K'\subset K$. Nous noterons $(A_t^\mu)_t$ le processus additif prévisible qui lui est associé; c'est-à-dire que, si $U\mu$ désigne le potentiel newtonien de μ, $U\mu(B_t)+A_t^\mu$ est une martingale et le potentiel se déduit du processus additif par la relation:

$$\forall M\in\mathbb{R}^3, \qquad U\mu(M)=E_M\{A_\infty^\mu\}.$$

Nous nous proposons de montrer le théorème suivant:

Théorème 1. *Si le potentiel* $U\mu$ *est borné, si* $U\mu$ *est continu, et si* $\forall m\in K'\ c^n(m)\equiv$ *capacité* $[B(0,1)\cap n(K-m)]$ *(où* $n(K-m)=\{u\in\mathbb{R}^3/\exists\, k\in K$ *tel que* $u=n(k-m)\}$*) converge vers une limite* $C_K(m)$ *quand* n *tend vers l'infini, alors:*

$$\lim_{n\to\infty} n\,\mu(w_t^{1/n}(K))=\int_0^t C_K(B_s)\,dA_s^\mu \quad (\text{dans } L^2).$$

Remarques. a) Par linéarité, on supposera dans la démonstration que μ est positive.

b) La condition de convergence des fonctions $(C^n(m))_n$ n'est pas trop restrictive dans la pratique car elle est vérifiée automatiquement si l'intersection de la frontière de K avec K' est régulière (en effet, si $m\in\mathring{K}$, $c^n(m)$ converge stationnairement vers la capacité de la boule unité).

c) On retrouve par ce théorème les résultats classiques de la saucisse de Wiener [2] en prenant $K=\mathbb{R}^3$ et $\mu(dM)=V(M)\,dM$ qui est associée à $A_t^\mu = \int_0^t V(B_s)\,ds$. Dans ce cas $\forall m\in\mathbb{R}^3$, $c^n(m)=\text{cap.}\,B(0,1)=2\Pi$.

Démonstration. Notons T_m^n le temps d'atteinte du compact $B(m,1/n)\cap K$. Nous désignerons par v_m^n la mesure d'équilibre de ce compact et par $A_m^n(t)$ l'unique processus prévisible additif qui lui est associé. On constate tout d'abord que:

$$n\,\mu(w_t^{1/n}(K))=n\int \mu(dm)\,1_{\{T_m^n\leqq t\}}.$$

L'étape essentielle de la démonstration consiste à montrer qu'on peut remplacer dans l'expression précédente $1_{\{T_m^n\leqq t\}}$ par $A_m^n(t)$ lorsque n est grand. C'est l'objet du lemme suivant:

Lemme. $\lim\limits_{n\to\infty} E_M([n\int \mu(dm)(1_{\{T_m^n\leqq t\}}-A_m^n(t))]^2)=0.$

Preuve du lemme. Il nous faut étudier $\lim\limits_{n\to\infty} E_M[X_n(t)]$ où:

$$X_n(t)\equiv n^2\iint \mu(dm)\,\mu(dm')(1_{\{T_m^n\leqq t\}}-A_m^n(t))(1_{\{T_{m'}^n\leqq t\}}-A_{m'}^n(t)).$$

Par symétrie nous supposerons que $\{T_m^n\leqq T_{m'}^n\leqq t\}$ et nous étudierons séparément $E_M[X_n^1(t)]$ et $E_M[X_n^2(t)]$ où:

$$X_1^n(t)=n^2\iint \mu(dm)\,\mu(dm')\,1_{\{T_m^n\leqq T_{m'}^n\leqq t\}}(1-A_{m'}^n(t))$$
$$X_2^n(t)=n^2\iint \mu(dm)\,\mu(dm')\,1_{\{T_m^n\leqq T_{m'}^n\leqq t\}}A_m^n(t)(A_{m'}^n(t)-1).$$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} E_M[X_1^n(t)]=0.$

En conditionnant par rapport à $\mathscr{F}_{T_{m'}^n}$, $E_M[X^n(t)]$ s'écrit:

$$\begin{aligned}&n^2\iint \mu(dm)\,\mu(dm')\,E_M[1_{\{T_m^n\leqq T_{m'}^n\leqq t\}}\cdot E[1-A_{m'}^n(t-T_{m'}^n)\circ\Theta_{T_{m'}^n}/\mathscr{F}_{T_{m'}^n}]]\\ &\quad=n^2\iint \mu(dm)\,\mu(dm')\,E_M[1_{\{T_m^n\leqq T_{m'}^n\leqq t\}}\cdot E_{B_{T_{m'}^n}}[1-A_{m'}^n(t-T_{m'}^n)]].\end{aligned}$$

Or, par définition de $A_m^n(t)$, processus de Meyer du potentiel $P_M[T_m^n<\infty]$, on peut écrire:

$$E_M[P_{B_s}[T_m^n<\infty]]=P_M[T_m^n<\infty]-E_M[A_m^n(s)]$$

d'où:

$$P_M[T_m^n<s]-E_M[A_m^n(s)]=P_M[T_m^n<s;\ T_m^n\circ\Theta_s<\infty].$$

Appliquant ceci pour $M=B_{T_{m'}^n}$ et $s=t-T_{m'}^n$ il vient:

$$\begin{aligned}E_{B_{T_{m'}^n}}[1-A_{m'}^n(t-T_{m'}^n)]&=P_{B_{T_{m'}^n}}[T_{m'}^n\circ\Theta_{t-T_{m'}^n}<\infty]\\ &=E[T_{m'}^n\circ\Theta_t<\infty/\mathscr{F}_{T_{m'}^n}]\end{aligned}$$

reportant ceci dans $E_M[X_1^n(t)]$, on obtient:

$$E_M[X_1^n(t)]=n^2\iint \mu(dm)\,\mu(dm')\,P_M[T_m^n\leqq T_{m'}^n<t;\ T_{m'}^n\circ\Theta_t<\infty].$$

Donc $E_M[X_1^n(t)]$ est positive et il nous suffit de la majorer par une quantité tendant vers 0.

Nous allons calculer $E_M[X_1^n(t)]$ en distinguant:

$$\begin{cases} \text{soit:} & d\left(B_t, B\left(m', \frac{1}{n}\right)\right) \leqq \delta_n, \\ \text{soit:} & d\left(B_t, B\left(m', \frac{1}{n}\right)\right) > \delta_n \end{cases}$$

(où d désigne la distance dans $\mathbb{R}^3$) pour une suite de réels strictement positifs $(\delta_n)_n$ que nous choisirons convenablement par la suite.

Si $d\left(B_t, B\left(m', \frac{1}{n}\right)\right) \leqq \delta_n$:

$$E_M[n^2 \iint \mu(dm)\,\mu(dm')_{\{T_m^n \leqq T_{m'}^n \leqq t\}} \times 1_{\{T_{m'}^n \circ \Theta_t < \infty\}} \times 1_{\left\{d\left(B_t, B\left(m', \frac{1}{n}\right)\right) \leqq \delta_n\right\}}]$$

$$\leqq n^2 \iint \mu(dm)\,\mu(dm') \left(P_M\left(d\left(B_t, B\left(m', \frac{1}{n}\right)\right) \leqq \delta_n\right) \times P_M(T_m^n \leqq T_{m'}^n < t)\right)^{1/2}$$

$$\leqq n^2 c(t) \left(\frac{2}{n} + 2\delta_n\right)^{3/2} \iint \mu(dm)\,\mu(dm')(P_M(T_m^n \leqq T_{m'}^n \leqq t))^{1/2}$$

(où $c(t)$ est une constante ne dépendant que de t).

Montrons à présent l'évaluation $(*)$:

$$n^2 \iint \mu(dm)\,\mu(dm')\,P_M(T_m^n \leqq T_{m'}^n \leqq t) \leqq c_1 \qquad (*)$$

(où c_1 est une constante).

En effet, en conditionnant par $\mathscr{F}_{T_m^n}$ et en majorant $P_x(T_{m'}^n \leqq t)$ par $P_x(T_{m'}^n < \infty) = U v_{m'}^n(x)$, on obtient:

$$n^2 \iint \mu(dm)\,\mu(dm')\,P_M(T_m^n \leqq T_{m'}^n \leqq t) \leqq n^2 \iint \mu(dm)\,\mu(dm')\,E_M[1_{\{T_m^n \leqq t\}}\, U v_{m'}^n(B_{T_m^n})].$$

De plus si $\tilde{v}_{m'}^n$ désigne la mesure d'équilibre du compact $B(0,1) \cap n(K - m')$, on obtient par scaling:

$$U v_{m'}^n(M) = U \tilde{v}_{m'}^n(n(M - m')) \leqq U b(n(M - m'))$$

où b est la mesure d'équilibre de $B(0,1)$. On en déduit que l'expression que nous calculons est majorée par:

$$n^2 \iint \mu(dm)\,\mu(dm')\,E_M\left[1_{\{T_m^n \leqq t\}} \int_{\partial B(0,1)} \frac{b(dy)}{2\Pi \|n(B_{T_m^n} - m') - y\|}\right]$$

$$= n \int \mu(dm)\,E_M\left[1_{\{T_m^n \leqq t\}} \int_{\partial B(0,1)} b(dy) \frac{1}{2\Pi} \int \frac{\mu(dm')}{\left\|B_{T_m^n} - m' - \frac{y}{n}\right\|}\right]$$

$$\leqq c \int n\mu(dm)\,P_M(T_m^n \leqq t) \text{ (puisque } U\mu \text{ est borné)}$$

$$\leqq c \int \mu(dm) \int_{\partial B(0,1)} \frac{b(dy)}{\left\|M - m - \frac{y}{n}\right\|} \leqq c^2.$$

Appliquant (*) à notre calcul, on trouve finalement, si $d\left(B_t, B\left(m', \frac{1}{n}\right)\right) \leqq \delta_n$, une majoration par: $n\,c(t)(C_1)^{1/2}\left(\frac{2}{n}+2\delta_n\right)^{3/2}$.

Si $d\left(B_t, B\left(m', \frac{1}{n}\right)\right) > \delta_n$:

En conditionnant par rapport à $\mathscr{F}_t$, on obtient:

$$E_M[n^2 \iint \mu(dm)\,\mu(m')\, 1_{\{T_m^n < T_{m'}^n < t\}} \times 1_{\left\{d\left(B_t, B\left(m', \frac{1}{n}\right)\right) > \delta_n\right\}} \times 1_{\{T_{m'}^n \circ \Theta_t < \infty\}}]$$
$$= n^2 \iint \mu(dm)\,\mu(dm')\, E_M[1_{\{T_m^n < T_{m'}^n < t\}} \times 1_{\left\{d\left(B_t, B\left(m', \frac{1}{n}\right)\right) > \delta_n\right\}}\, U\nu_{m'}^n(B_t)]$$

qui est majoré d'après le calcul précédent par:

$$n \iint \mu(dm)\,\mu(dm')\, E_M 1_{\{T_m^n < T_{m'}^n < t\}} \times 1_{\left\{d\left(B_t, B\left(m', \frac{1}{n}\right)\right) > \delta_n\right\}} \int_{\partial B(0,1)} \frac{b(dy)}{2\Pi \left\|B_t - m' - \frac{y}{n}\right\|}$$
$$\leqq \frac{\alpha_0}{2\Pi} \times \frac{1}{\delta_n}\, n \iint \mu(dm)\,\mu(dm')\, P_M(T_m^n < T_{m'}^n < t)$$

(où α_0 est la capacité de la boule unité). Grâce à (*) ceci est majoré par $\frac{c_1 \alpha_0}{2\Pi\,\delta_n \times n}$. En rapprochant les 2 cas, on trouve donc:

$$E_M X_1^n(t) \leqq c_2 \left[n\left(\frac{2}{n}+2\delta\right)^{3/2} + \frac{1}{n\,\delta_n}\right] \quad (c_2 = \text{cste}).$$

Cette expression tend vers 0 en choisissant $\delta_n = \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in]\frac{2}{3}, 1[$. Ce qui prouve (i).

Montrons à présent (ii):

(ii) $\lim_{n\to\infty} E_M X_2^n(t) \equiv \lim_{n\to\infty} E_M[n^2 \iint \mu(dm)\,\mu(dm')\, 1_{\{T_m^n < T_{m'}^n < t\}^m} A_m^n(t)(A_{m'}^n(t)-1)] \leqq 0$.

Rappelons que $A_m^n(t)$ désigne le processus croissant associé au potentiel du compact $B\left(m, \frac{1}{n}\right) \cap K$ que nous noterons $\bar{B}\left(m, \frac{1}{n}\right)$. Etudions séparément le cas où $\|m-m'\| > \delta_n > \frac{2}{n}$ et où $\|m-m'\| \leqq \delta_n$ pour une suite $(\delta_n)_n$ que nous choisirons plus tard.

Notons:

$$\begin{cases} Y_2^n(t) = n^2 \iint \mu(dm)\,\mu(dm')\, 1_{\{\|m-m'\| > \delta_n\}}\, 1_{\{T_m^n < T_{m'}^n < t\}} A_m^n(t)(A_{m'}^n(t)-1) \\ Z_2^n(t) = n^2 \iint_{\|m-m'\| \leqq \delta_n} \mu(dm)\,\mu(dm')\, 1_{\{T_{m'}^n \leqq T_{m'}^n \leqq t\}} A_m^n(t)(A_{m'}^n(t)-1) \end{cases}$$

Étude de $Y_2^n(t)(\|m-m'\| > \delta_n)$:

Dans ce cas $\bar{B}\left(m, \frac{1}{n}\right)$ et $\bar{B}\left(m', \frac{1}{n}\right)$ sont disjoints et nous allons calculer $E_M[1_{\{T_m^n < T_{m'}^n < t\}} A_m^n(t)\, A_{m'}^n(t)]$ par conditionnements successifs par rapport aux temps d'entrée dans $\bar{B}\left(m, \frac{1}{n}\right)$ et $\bar{B}\left(m', \frac{1}{n}\right)$. Plus précisément, notons:

$$\begin{aligned}
&T_0^n = T_m^n\\
&T_1^n = \inf\left\{t > T_0^n / B_t \in \bar{B}\left(m', \frac{1}{n}\right)\right\}\\
&T_{2k}^n = \inf\left\{t > T_{2k-1}^n / B_t \in \bar{B}\left(m, \frac{1}{n}\right)\right\} \text{ etc....}
\end{aligned}$$

Ecrivons:

$$\begin{aligned}
&E_M[1_{\{T_m^n < T_{m'}^n < t\}} A_m^n(t)\, A_{m'}^n(t)]\\
&\quad = E_M(1_{\{T_m^n < T_{m'}^n\}} \sum_{p \geqq 1} [(A_m^n \times A_{m'}^n)(t \wedge T_{p+1}^n) - (A_m^n \times A_{m'}^n)(t \wedge T_p^n)]
\end{aligned}$$

(car $A_m^n(t \wedge T_1^n) A_{m'}^n(t \wedge T_1^n) 1_{\{T_m^n < T_{m'}^n\}} = 0$). Conditionnons chaque terme de la somme par $\mathscr{F}_{T_p^n \wedge t}$; on ontient ainsi pour $p = 2k$

$$\begin{aligned}
&E_M[(A_m^n A_{m'}^n(t \wedge T_{2k+1}^n) - A_m^n A_{m'}^n(t \wedge T_{2k}^n))\, 1_{\{T_m^n < T_{m'}^n\}}]\\
&\quad = E_M[1_{T_m^n < T_{m'}^n} A_{m'}^n(t \wedge T_{2k}^n)\, E[A_m^n(t \wedge T_{2k+1}^n) - A_m^n(t \wedge T_{2k}^n) / \mathscr{F}_{t \wedge T_{2k}^n}].
\end{aligned}$$

Pour simplifier nous omettrons d'écrire dans le calcul l'indice n pour T_m^n et $A_m^n(t)$.

Calculons d'abord l'espérance conditionelle qui intervient dans l'expression ci-dessus et que nous noterons $\mathscr{E}_{2k}^n$; puisque A^m est additif, nous écrivons:

$$\mathscr{E}_{2k}^n = 1_{\{T_{2k}^n < t\}} E[A^m_{(t - T_{2k}^n) \wedge T_{m'} \circ \Theta_{T_{2k}^n}} \circ \Theta_{T_{2k}^n} / \mathscr{F}_{T_{2k}^n}]$$

(nous avons utilisé la définition de T_{2k+1}^n pour écrire $T_{2k+1}^n = T_{2k}^n + T_{m'} \circ \Theta_{T_{2k}^n}$). Utilisant la propriété de Markov, il vient:

$$\mathscr{E}_{2k}^n = 1_{T_{2k}^n < t} E_{B_{T_{2k}^n}}[A^m_{(t - T_{2k}^n) \wedge T_{m'}}].$$

Or la définition de A^m nous permet d'écrire $\forall M \in \bar{B}\left(m, \frac{1}{n}\right)$ et pour tout T, temps d'arrêt:

$$E_M[A_T^m] = P_M[T_m \circ \Theta_T = \infty].$$

Appliquant ceci pour $M = B_{T_{2k}^n}$ et $T = (t - T_{2k}^n) \wedge T_{m'}$, il vient:

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_{2k}^n &= 1_{\{T_{2k}^n < t\}} P_{B_{T_{2k}^n}}[T_m \circ \Theta_{T_{m'} \wedge (t - T_{2k}^n)} = \infty]\\
&= 1_{\{T_{2k}^n < t\}} E[1_{\{T_{2k}^n + T^m \circ \Theta_{(T_{2k}^n + T_{m'} \circ \Theta_{T_{2k}^n}) \wedge t} = \infty\}} / \mathscr{F}_{T_{2k}^n}].
\end{aligned}$$

Or

$$T_{2k}^n + T_{m'} \circ \Theta_{T_{2k}^n} = T_{2k+1}^n \quad \text{et} \quad (T_{2k}^n + T_m \circ \Theta_{T_{2k+1}^n \wedge t} = \infty) \subseteq (T_{2k+2}^n = \infty)$$

sur

$$(T_{2k}^n < t) \quad \text{d'où} \quad \mathscr{E}_{2k}^n \leqq 1_{\{T_{2k}^n < t\}} E[1_{\{T_{2k+2}^n = \infty\}} / \mathscr{F}_{T_{2k}^n}].$$

Reportant dans l'expression que l'on doit calculer et déconditionnant par rapport à $\mathscr{F}_{T^n_{2k}}$, il vient finalement:

$$E_M[1_{\{T_m<T_{m'}\}}A^{m'}_{T^n_{2k}}1_{\{T^n_{2k}<t\}}1_{\{T^n_{2k+2}=\infty\}}].$$

En sommant pour $p\geqq 1$, on obtient donc:

$$\begin{aligned}
&E_M[1_{\{T_m<T_{m'}\leqq t\}}A^m_t A^{m'}_t]\\
&\quad\leqq \sum_{k\geqq 1} E_M[A^m_t 1_{\{T^n_{2k-1}<t\}}1_{\{T^n_{2k+1}=\infty\}}1_{\{T_m<T_{m'}\}}]\\
&\qquad + E_M[A^{m'}_t 1_{\{T^n_{2k}<t\}}1_{\{T^n_{2k+2}=\infty\}}1_{\{T_m<T_{m'}\}}]\\
&\quad\leqq E_m[A^m_t 1_{\{T^n_1<t\}}1_{\{T_m<T_{m'}\}}+A^{m'}_t 1_{\{T^n_2<t;\,T_m<T_{m'}\}}]
\end{aligned}$$

d'où, pour la différence apparaissant dans $E_M[Y^n_2(t)]$, nous pouvons écrire:

$$E_M[1_{\{T_m<T_{m'}<t\}}(A^m_t A^{m'}_t-A^m_t)]\leqq E_M[A^{m'}_t 1_{\{T^n_2<t\}}1_{\{T_m<T_{m'}\}}].$$

Sur $(T_m<T_{m'})$, $T_{m'}=T^n_1$, nous pouvons donc écrire:

$$\begin{aligned}
E_M[A^{m'}_{T_{m'}}1_{\{T^n_2<t\}}1_{\{T_m<T_{m'}\}}]&=E_M[1_{\{T_m<T_{m'}<t\}}(A^{m'}_t-A^{m'}_{T_{m'}})1_{\{T_m\circ\Theta_{T_{m'}}<t-T_{m'}\}}]\\
&\leqq E_M[1_{\{T_m<T_{m'}<t\}}]\,E_{B_{T_{m'}}}[A^{m'}_t 1_{\{T_m<t\}}].
\end{aligned}$$

Pour revenir à $E_M[Y^n_2(t)]$, il nous faut montrer que l'intégrale de ce qui précède par rapport à $n^2 1_{\{\|m-m'\|>\delta_n\}}\mu(dm)\mu(dm')$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Précisément:

$$E_M[Y^n_2(t)]\leqq n^2\iint_{\|m-m'\|>\delta_n}\mu(dm)\mu(dm')E_M[1_{\{T^n_m<T^n_{m'}<t\}}E_{B_{T^n_{m'}}}[A^n_{m'}(t)1_{\{T^n_m<t\}}].$$

Nous notons $f(m,m',n)\equiv E_{B_{T^n_{m'}}}[A^n_{m'}(t)1_{\{T^n_m<t\}}]$ que nous allons d'abord majorer séparément. En utilisant le brownien $\beta_t=n(B_{\frac{t}{n^2}}-m')$, on montre par scaling que:

$$f(m,m',n)=E_{B_{T^n_{m'}}}[A^n_{m'}(t)1_{\{T^n_m<t\}}]\leqq E_{n(B_{T^n_{m'}}-m')}[\tilde{A}^n_{m'}(\infty)1_{\{T_{B(n(m-m'),1)}<\infty\}}]$$

où $\tilde{A}^n_{m'}$ est le processus additif associé au potentiel du compact $B(0,1)\cap n(K-m')$.

On remarque que $n(B_{T^n_{m'}}-m')\in B(0,1)$, l'expression précédente est donc majorée par:

$$\sup_{\|x\|\leqq 1}[E_x(\tilde{A}^n_{m'}(\infty))^2]^{1/2}\cdot[P_x(T_{B(n(m-m'),1)}<\infty)]^{1/2}.$$

Or, d'après [5] p. 175

$$E_x[(A^n_{m'}(\infty))^2]\leqq 2\|U\tilde{v}^n_{m'}\|^2_\infty\leqq 2$$

et

$$P_x(T_{B(n(m-m'),1)}<\infty)=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial(B(0,1))}\frac{b(dy)}{\|y-x+n(m-m')\|}\leqq\frac{\alpha_0}{(\|n(m-m')\|-2)2\pi}$$

(dès que $\|n(m-m')\|>2$).

Choissons $\delta_n=\frac{1}{n^\alpha}$ avec $0<\alpha<1$ de sorte que $\|n(m-m')\|>n^{1-\alpha}$ qui tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. D'où finalement:

$$(f(m,m',n))^2 \leqq \frac{2\alpha_0}{(n^{1-\alpha}-2)\,2\pi}.$$

On peut donc écrire pour c et c' constantes,

$$\begin{aligned} E_M[Y_2^n(t)] &\leqq \frac{Cn^2}{\sqrt{n^{1-\alpha}-1}} \iint_{\|m-m'\|>\delta_n} \mu(dm)\,\mu(dm')\,P_M[T_m^n \leqq T_{m'}^n < t] \\ &\leqq \frac{C'}{\sqrt{n^{1-\alpha}-1}} \iint_{\|m-m'\|>\delta_n} \frac{\mu(dm)\,\mu(dm')}{\|M-m\|\,\|m-m'\|} \end{aligned}$$

(d'après $(*)$) et ceci tend vers 0 quand n tend vers l'infini car $U\mu$ est borné.

Donc $\lim_{n\to\infty} E_M[Y_2^n(t)] \leqq 0$.

Étude de $Z_2^n(t)$ (cas où $\|m-m'\|\leqq\delta_n$)

$$E_M[Z_2^n(t)] = n^2 \iint_{\|m-m'\|\leqq\delta_n} \mu(dm)\,\mu(dm')\,E_M[1_{\{T_m^n \leqq T_{m'}^n \leqq t\}} A_m^n(t)(A_{m'}^n(t)-1)]$$

$$A_m^n(t) = A_m^n(T_{m'}^n) + A_m^n(t-T_{m'}^n)\circ\Theta_{T_{m'}^n}.$$

On peut donc décomposer l'espérance précédente en une somme de deux termes dont le premier s'écrit:

$$E_M[1_{\{T_m^n \leqq T_{m'}^n < t\}} A_m^n(T_{m'}^n)(A_{m'}^n(t)-1)].$$

Conditionnant par rapport à $\mathscr{F}_{T_{m'}^n}$, on obtient alors une majoration par:

$$E_M[1_{\{T_m^n \leqq T_{m'}^n \leqq t\}} A_m^n(T_{m'}^n)\,E_{B_{T_{m'}^n}}[A_{m'}^n(\infty)-1]] = 0$$

$\left(\text{car } \forall M' \in \bar{B}\left(m',\frac{1}{n}\right),\ E_{M'}[A_{m'}^n(\infty)] = P_{M'}[T_{\bar{B}\left(m',\frac{1}{n}\right)} < \infty] = 1\right)$.

Le second terme s'écrit:

$$\begin{aligned} &E_M[1_{\{T_m^n \leqq T_{m'}^n \leqq t\}}(A_m^n(t-T_{m'}^n)\cdot[A_{m'}^n(t-T_{m'}^n)-1])\circ\Theta_{T_{m'}^n}] \\ &\leqq E_M[1_{\{T_m^n \leqq T_{m'}^n \leqq t\}} E_{B_{T_{m'}^n}}[A_m^n(\infty)\,A_{m'}^n(\infty)]]. \end{aligned}$$

Or d'après [5], p. 175, si A est une fonctionnelle croissante associée au potentiel U_A, on peut écrire $E\cdot[A^2(\infty)] \leqq 2E\cdot[(U_A^*)^2]$.

Ici les potentiels associés aux A_m^n sont uniformément bornés par 1. Par Cauchy-Schwarz, on peut donc finalement écrire:

$$E_M[Z_2^n(t)] \leqq 2n^2 \iint_{\|m-m'\| \leqq \delta_n} \mu(dm)\,\mu(dm')\,P_M[T_m^n \leqq T_{m'}^n \leqq t]$$

$$\leqq 2 \iint_{\|m-m'\| \leqq \delta_n} n\mu(dm)\,\mu(dm')\,E_M\left[1_{\{T_m^n \leqq t\}} \int \frac{b(dy)}{2\Pi \left\| B_{T_m^n} - m' - \frac{y}{n} \right\|}\right]$$

$$\leqq 2\alpha_0 \int n\mu(dm)\,P_M[T_m^n < \infty] \sup_{(x,m)\in(K')^2} \int \frac{\mu(dm')}{2\Pi\,\|x-m'\|}\,\varphi_{\delta_n}(\|m'-m\|)$$

pour une suite convenable de fonctions $(\varphi_{\delta_n})_n$ décroissantes, continues, à support dans $[-\delta_n, 2\delta_n]$ et bornées par 1.

Notons $f_n(x,m) = \int \frac{\mu(dm')\,\varphi_{\delta_n}(\|m'-m\|)}{2\Pi\,\|x-m'\|}$. On obtient donc la majoration:

$$E_M[Z_2^n(t)] \leqq \left(2\alpha_0 \int \mu(dm) \int \frac{b(dy)}{2\Pi \left\| M - m - \frac{y}{n} \right\|}\right) \sup_{(x,m)\in(K')^2} f_n(x,m)$$

$$\leqq 2\alpha_0^2\,\|U\mu\|_\infty \sup_{(x,m)\in(K^1)^2} f_n(x,m)$$

$$f_n(x,m) = E_x\left[\int_0^\infty \varphi_{\delta_n}(\|m-B_s\|)\,dA_s^\mu\right].$$

Pour (x,m) fixés, l'expression précédente décroit vers 0 quand n tend vers l'infini car μ ne charge pas les points. Par ailleurs, puisque $U\mu$ est continu, on peut choisir (φ_{δ_n}) pour que f_n soit continue. Par le théorème de Dini on en déduit donc que la suite f_n tend uniformément vers 0 sur le compact $K' \times K'$. Donc $\sup_{(x,m)\in(K')^2} f_n(x,m)$ converge vers 0 quand n tend vers l'infini. Ce qui prouve que: $\lim_{n\to\infty} E_M[Z_2^n(t)] \leqq 0$ et achève la preuve de (ii) et du lemme.

Fin de la preuve du théorème 1

Grâce au lemme nous sommes amenés à étudier la limite dans L^2 de la suite de fonctionelles $(V_t^n)_n$ définies pas $V_t^n = n \int \mu(dm)\,A_m^n(t)$.

Remarquons d'abord que V_t^n est associée au potentiel:

$$G^n(M) = n \int \mu(dm)\,U v_m^n(M) = n \int \mu(dm)\,U \tilde{v}_m^n(n(M-m))$$

(par scaling) où $\tilde{v}_m^n$ est la mesure d'équilibre do compact $B(0,1) \cap n(K-m)$. Montrons la convergence dans L^2 des $(V_t^n)_n$ grâce au théorème suivant ([5] p. 225 et remarque p. 227).

Théorème. *Si X et $(X^n)_n$ sont des surmartingales positives de la classe (D), de processus croissants associés A et A^n, tels que:*

1) *les X^n appartiennent uniformément à la classe (D);*
2) *les $X^{n*} = \sup_t |X_t^n|$ sont uniformément bornées dans L^2;*

3) *pour tout temps d'arrêt* T, $(X^n_T)_n$ *converge faiblement vers* X_T *dans* L^1;
4) $\operatorname{Sup}_t |X_t - X^n_t|$ *converge vers* 0 *en probalité quand* n *tend vers* $+\infty$.

Alors $(A^n_T)_n$ *converge dans* L^2 *vers* A_T *pour tout* T *temps d'arrêt.*

Nous allons appliquer ce théorème aux surmartingales positives

$$X^n_t = G^n(B_t) \quad \text{et} \quad X_t = G(B_t) = \int \frac{\mu(dm)\, C_k(m)}{2\Pi \|B_t - m\|}$$

et aux processus croissants associés:

$$A^n_t = V^n_t \quad \text{et} \quad A_t = \int_0^t C_K(B_s)\, dA^\mu_s.$$

Les hypothèses 1 et 2 sont des conséquences du fait que $\operatorname{Sup}_M \operatorname{Sup}_n G^n(M) < \infty$. En effect, $\forall n \in N$, $\forall M \in \mathbb{R}^3$,

$$G^n(M) = n \int \mu(dm)\, U \tilde{v}^n_m(n(M-m)) \leqq n \int \mu(dm)\, U b(n(M-m))$$

(où b est la mesure d'équilibre de $B(0,1)$),

$$G^n(M) \leqq \int \mu(dm) \int \frac{b(dy)}{2\Pi \left\| M - M - \dfrac{y}{n} \right\|} \leqq \|U\mu\|_\infty \alpha_0.$$

Les hypothèses 3 et 4 découleront du lemme suivant:

Lemme. *La suite de fonctions* $(G^n)_n$ *converge vers* G *uniformément sur tout l'espace.*

Preuve du lemme. Montrons d'abord la convergence uniforme sur les compacts:

$$G^n(M) - G(M) = \int \frac{\mu(dm)}{2\Pi} \int \tilde{v}^n_m(dy) \left(\frac{1}{\left\| M - m - \dfrac{y}{n} \right\|} - \frac{1}{\|M-m\|} \right)$$
$$+ \int \mu(dm) \frac{(C^n(m) - C_K(m))}{2\Pi \|M-m\|}.$$

(Rappelons que l'on a noté dans l'énoncé du théorème $C^n(m)$ la masse totale de $\tilde{v}^n_m$).

Notons $\Delta^1_n(M)$ le premier terme de la somme écrite ci-dessus et $\Delta^2_n(M)$ le second.

$$|\Delta^1_n(M)| \leqq \int \frac{\mu(dm)}{2\Pi \|M-m\|} \int \frac{\tilde{v}^n_m(dy)}{\|n(M-m) - y\|}$$
$$= \int_{\|m-M\| > \delta} \frac{\mu(dm)}{2\Pi \|M-m\|} \int \frac{\tilde{v}^n_m(dy)}{\|n(M-m) - y\|}$$
$$+ \int_{\|m-M\| \leqq \delta} \frac{\mu(dm)}{2\Pi \|M-m\|} \int \frac{\tilde{v}^n_m(dy)}{\|n(M-m) - y\|} \quad (\text{pour } \delta > 0)$$
$$\leqq \alpha_0 \|U\mu\|_\infty \frac{1}{n\delta - 1} + \int \frac{\mu(dm)}{2\Pi \|M-m\|} \varphi_\delta(\|m-M\|)$$

où $(\varphi_\delta)_{\delta>0}$ est une suite convenable de fonctions continues à support dans $[-\delta, 2\delta]$, décroissante quand δ tend vers 0, avec $\|\varphi_\delta\|_\infty \leqq 1$.

Notons:

$$\Phi^\delta(M) = \int \frac{\mu(dm)\,\varphi_\delta(\|m-M\|)}{2\Pi\,\|M-m\|} = E_M\left[\int_0^\infty \varphi_\delta(B_s - M)\,dA_s^\mu\right].$$

Puisque μ ne charge pas les points, il est clair que $(\Phi^\delta)_\delta$ converge simplement vers 0 en décroissant. Par ailleurs, puisque U_μ est continu, on peut choisir $(\varphi_\delta)_\delta$ pour que Φ^δ soit aussi continue. On peut donc appliquer le théorème de Dini qui assure que $(\Phi^\delta)_\delta$ converge uniformément sur tout compact vers 0 quand δ tend vers 0. On choisit donc d'abord δ et ensuite n pour obtenir une majoration uniforme sur tout compact de $|\Delta_n^1|$.

$$|\Delta_n^2(M)| = \left|\int \frac{\mu(dm)(C^n(m) - C_K(m))}{2\Pi\,\|M-m\|}\right| = \Big|\int_{\|M-m\| \leqq \delta} (\quad) + \int_{\|M-m\| \leqq \delta} (\quad)\Big|$$

$$\leqq 2\alpha_0\,\Phi^\delta(M) + \frac{1}{\delta}\int \mu(dm)\,|C^n(m) - C_K(m)|.$$

On procède donc comme avec Δ_n^1 en remarquant par le théorème de convergence dominée que $\lim\limits_{n\to\infty} \int \mu(dm)|C^n(m) - C_K(m)| = 0$, ce qui prouve la convergence uniforme de G^n vers G sur tout compact.

Montrons à présent que $|G^n(M)|$ et $|G(M)|$ sont petits, uniformément en n quand $\|M\|$ est grand. En effet, si $\|M\| > N$ et si $B(0, R_0)$ est une boule contenant le support K' de μ, on peut écrire:

$$|G^n(M)| \leqq \frac{\alpha_0\,\mu(K')}{2\Pi(N - R_0 - 1)} \quad \text{qui tend vers 0 quand } N \text{ tend vers } +\infty,$$

uniformément en n. On a la même majoration pour $|G(M)|$. Ce qui achève la preuve du lemme.

On en déduit aisément que les hypothèses 3 et 4 sont vérifiées. Ce qui achève la preuve du théorème 1.

2. Application à un problème d'homogénéisation

Soit $(A, \mathscr{A}, P)$ un espace de probabilité sur lequel sont définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, n variables aléatoires $(\gamma_n^i(a))_{i=1}^n$, à valeurs dans $\mathscr{P} = \{z=0\}$ $(\subset \mathbb{R}^3)$, indépendendantes et de même loi définie par:

$$P(\gamma_n^i \in B) = \int_B V(m)\,dm \qquad (B \text{ borélien de } \mathscr{P})$$

où V est continue à support compact noté $K \subset \mathscr{P}$.

Notons:

$$\mathscr{C}^n(a) = \bigcup_{i=1}^n \left\{(x,y) \in \mathscr{P} / \|(x,y) - \gamma_n^i(a)\|_{\mathscr{P}} \leqq \frac{1}{n}\right\}$$

$$T^n(a) = \inf\{t > 0 / B_t \in \mathscr{C}^n(a)\}$$

où $(B_t)_t$ désigne le brownien de $\mathbb{R}^3$ réfléchi sur $\mathscr{P}$ (Remarquons que puisque $\mathscr{C}^n(a)$ est un compact de $\mathscr{P}$, la loi de $T^n(a)$ est la même que celle du temps d'atteinte de $\mathscr{C}^n(a)$ pour le brownien non réfléchi).

Nous nous proposons de montrer la convergence faible des lois browniennes subordonnées aux $(T^n(a))_n$ dans $L^2(A, \mathscr{A}, P)$. Soulignons que ce type de convergence est analogue à celui étudié par Kac dans [6] pour le probème des sphères traité ensuite par Papanicolaou et Varadhan dans [4].

Le théorème est le suivant:

Théorème 2. *Soit f continue, à support compact dans $\mathbb{R}^3$, pour tout $t \geqq 0$ $\forall M \in \mathbb{R}^3$:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A P(da) \left(E_M\left[f(B_t)\left(1_{t<T^n(a)} - \exp -\alpha \int_0^t v(M_s)\, dL_s^0(Z)\right)\right]\right)^2 = 0$$

où $\begin{cases} B_t = (M_t, Z_t) \text{ et } Z_t \text{ est la composante verticale} \\ L_t^0(Z) = \text{temps local en } 0 \text{ de } Z. \\ \alpha = \text{capacité du disque unité de } \mathscr{P}. \end{cases}$

Remarque. Le type de convergence démontré dans [3] par G. Del Grosso, R. Figari et E. Orlandi se rapproche de la convergence presque sûre sur $(A, \mathscr{A}, P)$. Plus précisément, sous les mêmes hypothèses que celles du théorème 2, leur résultat est le suivant:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall \delta > 0, \quad \forall T < \infty, \quad \exists N_0 \in \mathbb{N}$$

tel que $\forall N \geqq N_0$

$$\exists A_{\varepsilon,\delta}^N \subset A, \quad \forall a \in A_{\varepsilon,\delta}^N, \quad \exists G_\varepsilon^N(a) \subset \mathbb{R}^3 \setminus \mathscr{C}^n(a)$$

tels que

$$\forall a \in A_{\varepsilon,\delta}^N \operatorname*{Sup}_{0 \leqq t \leqq T} \sup_{M \in G_\varepsilon^N(a)} \left| E_M\left[f(B_t)\left(1_{t<T^n(a)} - \exp -\alpha \int_0^t V(M_s)\, dL_s^0(Z)\right)\right]\right| \leqq \varepsilon$$

et

$$\begin{cases} \operatorname{Vol}(\mathbb{R}^3 \setminus G_\varepsilon^N(a)) < \varepsilon \\ P(A \setminus A_{\varepsilon,\delta}^N) < \delta. \end{cases}$$

Démonstration du théorème 2. Pour montrer la convergence de $E_M[f(B_t)\, 1_{t<T^n(a)}]$ vers

$$E_M\left[f(B_t) \exp -\alpha \int_0^t V(M_s)\, dL_s^0(Z)\right]$$

dans $L^2(A, \mathscr{A}, P)$, il suffit de montrer, puisque la limite est constante relativement à $(A, \mathscr{A}, P)$:

1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_A P(da)\, E_M[f(B_t)\, 1_{\{t<T^n(a)\}}] = E_M\left[f(B_t) \exp -\alpha \int_0^t V(M_s)\, dL_s^0(Z)\right].$

2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_A P(da) (E_M[f(B_t)\, 1_{\{t<T^n(a)\}}])^2 = \left(E_M\left[f(B_t) \exp -\alpha \int_0^t V(M_s)\, dL_s^0(Z)\right]\right)^2.$

Preuve de 1. Avec les notations du 1°:

$$W_t^{1/n}(\mathscr{P})=\left\{m/\exists s\leqq t/|M_s-m|\leqq\frac{1}{n} \text{ et } Z_s=0\right\}$$

$$\begin{aligned}\int_A P(da)\,E_M[f(B_t)\,1_{\{t<T^n(a)\}}]&=\int_A P(da)\,E_M\left[f(B_t)\prod_{i=1}^{n}1_{\gamma_n^i(a)\notin W_t^{1/n}(\mathscr{P})}\right]\\&=E_M[f(B_t)(1-\int_{W_t^{1/n}(\mathscr{P})\cap\mathscr{P}}V(m)\,dm)^n]\end{aligned}$$

(en utilisant Fubini et la loi des γ_n^i). Si l'on note μ la mesure définie par $\mu(dx\,dy\,dz)=V(x,y)\,dx\,dy\,\varepsilon_{\{0\}}(dz)$, l'expression précédente s'écrit:

$$E_M[f(B_t)\exp n\log(1-\mu(W_t^{1/n}(\mathscr{P})))]$$

puisque f est bornée, si l'on peut appliquer le théorème de convergence du 1° à $(\mu,\mathscr{P})$, on en déduira que la suite précédente converge vers:

$$E_M\left[f(B_t)\exp-\int_0^t(C_{\mathscr{P}}(B_s)\,dA_s^\mu\right].$$

Or, $(\mathscr{P},\mu)$ vérifient les hypothèses du théorème:

- $\sup\limits_M U\mu(M)=\sup\limits_M\int_K\frac{V(m)}{2\Pi\|M-m\|}<\infty$;
- un calcul direct en coordonnées polaires montre que $U(\mu)$ est continue, car V est continue;
- $\|\mu\|=1$ (car V est une densité de probabilité) et μ ne charge pas les polaires;
- $\forall m\in K$, capacité $[B(0,1)\cap n(\mathscr{P}-m)]=$ Capacité $D(0,1)=\alpha$.

Par ailleurs nous pouvons expliciter A^μ en approximant μ par des mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue. On trouve en effet une approximation du temps local en 0 de Z par les fonctionnelles additives associées à ces mesures et on en déduit que:

$$A_t^\mu=\int_0^t V(M_s)\,dL_s^0(Z)$$

(où L_t^0 est le temps local au sens de Tanaka). Ce qui prouve l'assertion 1.

Preuve de 2. Calculons

$$\lim_{n\to\infty}\int_A P(da)\,E_M^2[f(B_t)]_{t<T^n(a)}],$$

soit Ω, un espace où sont définis deux browniens B et $\tilde{B}$ indépendants, partant tous deux du point M. Notons $\mathscr{P}_M(d\omega)$ le produit des deux mesures de Wiener qui régissent B et $\tilde{B}$, $w_t^{1/n}$ désigne la saucisse plane relative à B et $\tilde{w}_t^{1/n}$ celle qui est relative à $\tilde{B}$.

$$\begin{aligned}\int_A P(da)\,E_M^2[f(B_t)1_{t<T^n(a)}]&=\int_A P(da)\int_\Omega\mathscr{P}_M(d\omega)\,f(B_t(\omega))\,f(\tilde{B}(\omega))\,1_{t<T_\omega^n(a)\wedge\tilde{T}_\omega^n(a)}\\&=\int_\Omega\mathscr{P}_M(da)\,f(B_t(\omega))\,f(\tilde{B}_t(\omega))(1-\mu(w^{1/n}(t))-\mu(\tilde{w}^{1/n}(t))+\mu(w^{1/n}(t)\cap\tilde{w}^{1/n}(t)))^n.\end{aligned}$$

Comme pour le 1, ceci a la même limite que:

$$\int_\Omega \mathscr{P}_M(d\omega)\, f(B_t(\omega))\, f(\tilde{B}_t(\omega)) \exp[-n\,\mu(w^{1/n}(t)) - n\,\mu(\tilde{w}^{1/n}(t)) + n\,\mu(w^{1/n}(t) \cap \tilde{w}^{1/n}(t))].$$

Puisque f est bornée et que l'exponentielle est toujours bornée par 1, on montre facilement, grâce au théorème 1, que l'expression qui précède a même limite que:

$$\int_\Omega \mathscr{P}_M(d\omega)\, f(B_t(\omega))\, f(\tilde{B}_t(\omega)) \exp\left[-\alpha \int_0^t V(M_s)\, dL_s^0(Z) - \alpha \int_0^t V(\tilde{M}_s)\, d\tilde{L}_s^0(\tilde{Z}) + n(w_t^{1/n} \cap \tilde{w}_t^{1/n})\right].$$

L'assertion 2 sera donc démontrée si $n\,\mu(w_t^{1/n} \cap \tilde{w}_t^{1/n})$ converge vers 0 dans $L^1(\mathscr{P}_M)$. Or:

$$\mathscr{E}_M[n \int V(m)\, dm\, 1_{T_m^n \leqq t} 1_{\tilde{T}_m^n \leqq t}] = n \int V(m)\, dm\, E_M^2[1_{T_m^n \leqq t}]$$
$$\leqq \frac{(\text{cste})}{n} \int_{\|M-m\| > 3/n} V(m)\, dm \int \frac{b(dy)}{\left\|M - m - \frac{y}{n}\right\|^2} + n \int_{\|M-m\| \leqq 3/n} V(m)\, dm$$

qui est majoré par

$$\text{cste}\left[\frac{1}{n} \int_{K'} \frac{dm}{\|M-m\|^2}\, 1_{\|m-M\| > 3/n} + \frac{1}{n}\right]$$

(où dm est la mesure de Lebesgue sur le plan).

En passant en coordonnées polaires, la première intégrale s'écrit, pour un réel R_0 dépendant de K':

$$\frac{1}{n} \int_{3/n}^{R_0} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{n}\left[\log R_0 - \log \frac{3}{n}\right]$$

qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ce qui achève la preuve de l'assertion 2 et donc du théorème 2. □

Bibliographie

1. Spitzer, F.: Electrostatic capacity, heat flow and Brownian motion. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. **3**, 110–121 (1964)
2. Le Gall, J.F.: Sur la saucisse de Wiener et les points multiples du mouvement Brownien. (à paraître)
3. Del Grosso, G., Figari, R., Orlandi, E.: Diffusion processes in a region with perforated boundary. (à paraître)
4. Papanicolaou, G.C., Varadhan, S.R.: Diffusion in regions with many small holes. Stochastic Differential Systems Proceedings Vilnius (1978)
5. Dellacherie, C., Meyer, P.A.: Probabilities et potentiels (théorie des martingales). Hermann, Publication de l'Institut de Mathématiques de l'Université de Strasbourg XVII 1980
6. Kac, M.: Probabilistic methods in some problems of scattering theory. Rocky Mountain Journal (1974)

Received July 1, 1985