Probab. Th. Rel. Fields 83, 435–445 (1989)

Probability Theory and Related Fields

© Springer-Verlag 1989

Approximations finies de la mesure invariante do processus de contact sur-critique vu par la première particule

Antonio Galves* et Rinaldo Schinazi

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo,
Caixa Postal 20570 Ag. Iguatemi, Cep 01498 São Paulo S.P, Brasil

Summary. For each integer $n \geqq 1$ we consider the contact process as seen from the first particle and we do not allow the process to disappear or to have more than n particles. We prove that the invariant probability of this process converges to a limit when n goes to infinity. This limit is exactly the invariant probability measure of the usual contact process as seen from the first particle. Durrett [1] has proven the existence of this probability and Galves and Presutti [3] have shown its uniqueness. We get here a new proof of the existence of this probability and a complete convergence theorem for finite and infinite initial configurations.

Pour des processus attractifs (non vus par la première particule) Holley [5] a montré que les probabilités extrêmales peuvent être obtenues comme limites de probabilités ayant leur support sur les configurations ayant un nombre fini de particules, cf [6] (chap. 3 Th. 2.7) par exemple. Dans la démonstration de ce résultat il est essentiel que le processus considéré soit une fonction monotone de la configuration initiale.

Les systèmes de particules sur Z vus par la première particule, même lorsqu'ils sont attractifs, ne sont pas en général monotones et le résultat de Holley ne s'applique pas. Dans ce travail nous montrons qu'il est possible d'obtenir une telle approximation dans le cas du processus de contact sur-critique vu par la première particule. Plus précisément, définissons un processus vu de sa première particule $\xi_{t,n}$ qui évolue selon les règles du contact mais avec les conditions supplémentaires que s'il ne reste qu'une particule elle ne meurt pas, et s'il nait une $(n+1)$ iéme particule on fait disparaitre la dernière particule (à gauche) de manière à ne jamais dépasser n particules. Il est facile de prouver que $\xi_{t,n}$ est récurrent positif; appelons μ_n sa probabilité invariante. Nous montrons que la suite μ_n converge faiblement vers une probabilité $\tilde{\mu}$ qui est exactement la mesure de probabilité invariante dont l'existence a été prouvée par Durrett [2] et l'unicité par Galves et Presutti [3] pour le processus de contact sur-critique vu par la première particule.

* A.G bénéficie du support financier du C.N.P.q bourse 301301/79

Nous obtenons aussi un théorème de convergence complète, c'est à dire que nous montrons que pour toute distribution initiale il y a convergence en loi du processus. Ceci complète les résultats obtenus dans [3] pour les distributions initiales qui se concentrent sur les configurations infinies.

Nous allons maintenant énoncer de façon précise nos résultats; pour cela il nous faut un peu de notations.

Soit η une configuration du processus, c'est un élement de $\{0, 1\}^Z$, $\eta(x)=1$ indique qu'on a une particule en x, sinon $\eta(x)=0$. Nous noterons de plus, pour une configuration η:

$$|\eta| = \sum_{x \in Z} \eta(x)$$

$$r(\eta) = \sup\{x \in Z: \eta(x)=1\}$$

$$l(\eta) = \inf\{x \in Z: \eta(x)=1\}.$$

Définissons aussi:

$$X = \{\eta \in \{0,1\}^Z: r(\eta)=0\}$$

$$E = \{\eta \in \{0,1\}^Z: r(\eta) < \infty\}$$

$$\tilde{E} = \{\eta \in E: r(\eta)=0; |\eta| = \infty\}.$$

Appelons $*$ la configuration de X qui n'a qu'une seule particule, à l'origine. Soit S l'application de E dans X telle que:

$$S\eta(x) = (\eta(x + r(\eta))).$$

Pour une introduction au processus de contact ainsi que pour les résultats de base le lecteur pourra consulter [6] (chap. 6) pour le temps continu, et [1] pour le temps discret.

Le processus de contact peut être défini à l'aide d'une suite de processus ponctuels de Poisson indépendants. A chaque x dans Z nous associons trois processus de Poisson d'intensité respectivement 1, λ, λ. Le processus l'intensité 1 indique les instants où une particule éventuellement présente en x disparait. Le deuxième et troisième processus indiquent les instants où une particule éventuellement présente en x crée une nouvelle particule sur la position voisine $x+1$ et $x-1$ respectivement. Les créations n'ont pas lieu si la position est déjà occupée.

Etant donné une configuration η et un instant $s \geqq 0$ nous noterons $\xi_t^{(\eta,s)}$, pour $t \geqq s$, la configuration obtenue à l'instant t en partant à l'instant s de la configuration η et en utilisant les marques des processus de Poisson à partir de l'instant s. Nous nous intéressons au processus de contact vu par la première particule: $S\xi_t^{(\eta,s)}$.

Pour avoir les détails de cette construction le lecteur pourra consulter le paragraphe 2 de [3].

Rappelons qu'il existe un réel λ_c tel que:

$$1 < \lambda_c \leqq 2$$

et tel que si $\lambda<\lambda_c$ alors le processus de contact est ergodique: li converge en loi vers la configuration sans aucune particule, quelle que soit la configuration initiale. On dit que le processus est sous-critique. Au contraire si $\lambda>\lambda_c$ alors le processus a une probabilité positive de ne jamais atteindre la configuration sans aucune particule, quelle que soit la configuration initiale distincte de la configuration sans aucune particule. On dit que le processus est sur-critique. Dans toute la suite nous serons dans ce dernier cas.

Nous allons maintenant construire la mesure de probabilité $\tilde{\mu}$ invariante pour le processus de contact vu de la première particule. Rappelons que $\xi_{t,n}$ est un processus de «contact» à moins de n particules qui approche le processus de contact lorsque n tend vers l'infini.

Montrons maintenant que $\xi_{t,n}$ est récurrent positif pour tout $\lambda>0$. Nous considérons la chaine de Markov immergée $(\xi_{k,n})_{k\geqq 0}$ correspondant au processus $\xi_{t,n}$. Montrons qu'il existe un réel strictement positif $c(n)$ tel que:

$$\inf_{|\eta|\leqq n} P(\exists\, k\leqq n, \xi^{\eta}_{k,n}=*)\geqq c(n).$$

Remarquons que si η est une configuration avec m particules ($m\leqq n$), alors:

$$P(\exists\, k\leqq n, \xi^{\eta}_{k,n}=*)\geqq g(m)$$

où $g(m)=\prod_{k=2}^{m}\frac{k}{k+2\lambda+(k-1)\,2\lambda}$. En effet le taux de mort est 1, le taux de naissance externe est 2λ et le taux de naissance entre deux particules est toujours inférieur à 2λ. Définissons

$$c(n)=\frac{1}{(1+2\lambda)^n}$$

et nous aurons l'inégalité annoncée. Celle-ci entraine que le temps moyen d'attente pour un retour à $*$ est fini et donc la chaine $\xi_{k,n}$ est récurrente positive. Mais le temps moyen de passage d'un état à l'autre est uniformément borné pour $\xi_{t,n}$, c'est donc un processus récurrent positif sur un espace dénombrable, il admet une unique mesure de probabilité invariante que nous appelons μ_n. Comme la suite de mesures de probabilité μ_n se trouve dans un espace compact (X est compact), nous pouvons extraire de cette suite une sous-suite μ_{n_k} qui converge faiblement vers une mesure de probabilité $\tilde{\mu}$ dans X. La mesure de probabilité $\tilde{\mu}$ est construite.

Avec une configuration initiale finie nous savons que le processus de contact peut atteidre la configuration vide en un temps fini avec une probabilité positive. Appelons τ^{η} le premier instant où le processus avec la configuration initiale η atteint la configuration vide.

Prouvons que:

Théorème 1. *Pour toute configuration initiale η, nous avons*:

$$\lim_{t\to\infty} P(S\,\xi^{\eta}_t\in C;\, \tau^{\eta}=\infty)=P(\tau^{\eta}=\infty)\,\tilde{\mu}(C)$$

où C est un cylindre de X.

La démonstration de ce théorème est basée sur la construction suivante d'une version particulière du processus de contact que nous empruntons à [3]. Soit u un réel positif, η une configuration infinie de E. Appelons $\hat{\xi}_t^{(\eta,ku)}$ le processus défini pour $t \geqq ku$ et tel que:

$$\hat{\xi}_{ku}^{(\eta,ku)} = \eta.$$

Pour $n \geqq k$ et $nu \leqq t < (n+1)u$

$$\hat{\xi}_t^{(\eta,ku)} = \xi_t^{(S\zeta,nu)} + r(\zeta)$$

où $\zeta = \hat{\xi}_{nu}^{(\eta,ku)}$ et $\xi_t^{(S\zeta,nu)} + r(\zeta)$ désigne la configuration translatée de $\xi_t^{(S\zeta,nu)}$ par $r(\zeta)$. Si $k=0$, nous noterons $\hat{\xi}_t^{\eta}$. Dans la suite $u = \sqrt{t}$. Nous nous intéressons au processus de contact vu par la première particule:

$$\tilde{\xi}_t^{(\eta,ku)} = S\,\hat{\xi}_t^{(\eta,ku)}.$$

L'avantage de cette construction sur la construction habituelle est que le processus

$$\tilde{\xi}_t^{(r_{ku}(\eta),ku)}$$

défini pour $t > ku$ est indépendant du processus $\tilde{\xi}_t^{\eta}$ pour $t < ku$.

D'autre part définissons $\hat{\xi}_{t,n}^{(\eta,ku)}$. Ce processus suit la même évolution que $\hat{\xi}_t^{(\eta,ku)}$ avec les conditions supplémentaires que s'il ne reste qu'une particule elle ne meurt pas et s'il nait une $n+1$ ième particule on fait disparaitre la dernière à gauche. Définissons $\xi_{t,n}^{(\eta,ku)} = S\,\tilde{\xi}_{t,n}^{(\eta,ku)}$. Nous construisons $\hat{\xi}_{t,n}^{(\eta,ku)}$ et $\hat{\xi}_t^{(\eta,ku)}$ à l'aide des mêmes processus de Poissons. Une conséquence de ceci est qu'aux instants $nu (n \geqq k)$ les particules en 0 de $\xi_{t,n}^{(\eta,ku)}$ et $\tilde{\xi}_t^{(\eta,ku)}$ sont couplées. En particulier si t est tel que pour tout $ku < s < t$ on ait $0 < |\tilde{\xi}_s^{(*,ku)}| < n+1$ alors $\xi_{t,n}^{(*,ku)} = \tilde{\xi}_t^{(*,ku)}$. Avec cette version du processus de contact nous pouvons démontrer que:

Lemme fondamental.

$$\sup_{\eta' \in \tilde{E};\, |\eta| \leqq n} P\left(\tilde{\xi}_t^{\eta'}(x) \neq \xi_{t,n}^{\eta}(x) \text{ pour un } x \in C\right) \leqq b e^{-c\sqrt{t}} + c' \frac{(2\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}$$ *où b, c, c' sont des réels strictement positifs.*

Démonstration du Lemme. Appelons:

$$\tau^{(*,ku)} = \inf\{s > ku : |\hat{\xi}_s^{(*,ku)}| = 0\}$$
$$K = \inf\{k \geqq 0 : \tau^{(*,ku)} \geqq (k+1)u\}.$$

Notons que l'évènement $\{K \leqq k-1\}$ et le processus $\tilde{\xi}_t^{(*,k\sqrt{t})}$ sont indépendants.

Soit C un sous-ensemble cylindrique de X dont le support se trouve entre 0 et m_C, où m_C est un entier négatif. Nous désignerons par la même lettre C et son support. On a:

$$\sup_{\eta',\eta} P(\tilde{\xi}_t^{\eta'}(x) \neq \xi_{t,n}^{\eta}(x) \text{ pour un } x \text{ de } C) \leqq p_1(t)+p_2(t)+p_3(t)+p_4(t,n)$$

où

$$\begin{aligned}
p_1(t) &= P(K > \sqrt{t}) \\
p_2(t) &= \sum_{k<\sqrt{t}} P(K \geqq k-1)\, P((k+1)\sqrt{t} < \tau^{(*,k\sqrt{t})} < \infty) \\
p_3(t) &= \sum_{k<\sqrt{t}} P(K \geqq k-1)\, P(\tau^{(*,k\sqrt{t})} = \infty,\, l_t^{(*,k\sqrt{t})} > m_C) \\
p_4(t,n) &= \sum_{k<\sqrt{t}} P(K \geqq k-1)\, P(\tau^{(*,k\sqrt{t})} = \infty,\, l_t^{(*,k\sqrt{t})} < m_C\, \tilde{\xi}_t^{\eta'}(x) \neq \xi_{t,n}^{\eta}(x) \text{ pour un } x \text{ de } C)
\end{aligned}$$

où

$$l_t^{(*,k\sqrt{t})} = \min\{x : \tilde{\xi}_t^{(x,k\sqrt{t})}(x) = 1\}$$

Majorons ces probabilités: pour $p_1(t)$ en se servant du fait que K est une variable géométrique de paramètre $P(\tau^{(*,0)} > \sqrt{t})$, on obtient:

$$p_1(t) \leqq P(\tau^{(*,0)} < \sqrt{t})^{\sqrt{t}} < (1 - P(\tau^{(*,0)} = \infty))^{\sqrt{t}}.$$

Comme le processus est sur-critique $P(\tau^{(*,\infty)} = \infty) > 0$. Pour $p_2(t)$ nous nous servons d'un résultat de Durrett et Griffeath (cf [2]):

$$P(\sqrt{t} < \tau^{(*,k\sqrt{t})} < \infty) < b e^{-c\sqrt{t}}$$

pour b et c strictement positifs. Dans toute la suite b et c désigneront des constantes strictement positives qui pourront changer de valeur d'une ligne à l'autre. Pour $p_3(t)$ nous avons besoin d'une comparaison avec le processus de contact non vu de la première particule. Soit $\hat{\xi}_t^*$ ce processus avec $*$ comme configuration initiale. Appelons $\hat{r}_t^*$ et $\hat{l}_t^*$ la particule respectivement la plus à droite et la plus à gauche de ce processus. Chaque terme de la somme de $p_3(t)$ est inférieur à:

$$P(\tau^{(*,k\sqrt{t})} = \infty,\, l_s^{(*,k\sqrt{t})} > m_C \text{ pour un } s \geqq t).$$

En remplaçant $l_s^{(*,k\sqrt{t})}$ par $\hat{l}_{s-k\sqrt{t}}^* - \hat{r}_{s-k\sqrt{t}}^*$ et en faisant ensuite une translation sur le temps on obtient une majoration de l'expression précédente, car:

$$\{\hat{r}_s^* - \hat{l}_s^* < -m_C\} \text{ est inclus dans } \{\hat{r}_s^* < -m_C\} \cup \{\hat{l}_s^* > m_C\}$$

on obtient:

$$2P(|\hat{\xi}_t^*| \geqq 1 \text{ pour tout } t \geqq 0;\, \hat{r}_s^* < -m_C \text{ pour un } s \geqq \sqrt{t}).$$

Ceci est inférieur à:

$$2P(\hat{r}_s^1 < -m_C \text{ pour un } s \geqq \sqrt{t}) \tag{1}$$

où $\hat{r}_s^1 = r(\hat{\xi}_s^1)$ et 1 est la configuration avec tous les sites occupés à gauche de l'origine. Mais nous savons qu'il existe une constante a telle que:

$$\lim_{s \to \infty} \hat{r}_s^1 / s = a > 0.$$

D'autre part Durrett a prouvé dans [1] que:

Lemme 1. *$P(\hat{r}_s^1 \leqq (a-\delta)t) \leqq b e^{-ct}$ pour tout δ strictement positif.*

A partir de ce résultat, dans [3] il est prouvé que:

Lemme 2. $P\left(\inf_{s \geqq t} \frac{\hat{r}_s^1}{s} \leqq a - \delta\right) \leqq b e^{-ct}$.

Ce dernier résultat, appliqué à (1) prouve que $p_3(t) \leqq b e^{-c\sqrt{t}}$.

Pour $p_4(t, n)$ remarquons que $\tilde{\xi}_t^{(*, k\sqrt{t})}$ et $\xi_{t,n}^{(*, k\sqrt{t})}$ ne peuvent être différents que s'il existe un instant s entre $k\sqrt{t}$ et t tel que:

$$|\tilde{\xi}_s^{(*, k\sqrt{t})}| > n.$$

Considérons maintenant le processus qui a les mêmes taux de naissance mais des taux de mort nuls. Nous pouvons construire ce processus sur le même espace de probabilité que le processus de contact. Il est clair que le nombre de particules du processus auxiliaire est supérieur à celui du processus de contact et que ce nombre à l'instant s est une variable de Poisson de paramètre $2\lambda s$ que nous noterons $W(2\lambda s)$. Nous avons donc que:

$$P(\exists s \leqq t, |\tilde{\xi}_s^{(*, k\sqrt{t})}| > n) \leqq P(\exists s \leqq t, W(2\lambda s) > n).$$

Ce dernier terme est inférieur à:

$$P(W(2\lambda t) > n) \leqq \frac{(2\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Cette dernière inégalité provient de la formule de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction exponentielle entre les points 0 et $2\lambda t$. Ceci permet de conclure:

$$p_4(t, n) \leqq E(K) \frac{(2\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Nous avons donc prouvé le Lemme fondamental.

Démonstration du Théorème 1. Prouvons le théorème pour une configuration initiale η' infinie. Nous avons:

$$|P(\tilde{\xi}_t^{\eta'} \in C) - \int P(\xi_{t,n}^{\eta} \in C)\, d\mu_n(\eta)| \leqq \sup_{\eta} P(\tilde{\xi}_t^{\eta'}(x) \neq \xi_{t,n}^{\eta}(x) \text{ pour un } x \in C). \tag{2}$$

Par le lemme précédent ceci est inférieur à:

$$b e^{-c\sqrt{t}} + c' \frac{(2\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Dans l'inégalité (2), remplaçons n par n_k. A gauche de cette inégalité le terme représenté par l'intégrale est en fait $\mu_{n_k}(C)$ car μ_{n_k} est invariante pour le processus ξ_{t,n_k}. En faisant tendre n_k vers l'infini, $\mu_{n_k}(C)$ tend vers $\tilde{\mu}(C)$ et $\frac{(2\lambda t)^{n_k+1}}{(n_k+1)!}$ tend vers 0. Puis nous faisons tendre t vers l'infini, $b e^{-c\sqrt{t}}$ tend vers 0 et ceci prouve le théorème 1, pour les configurations infinies, puisque si η' est infinie on a $P(\tau^{\eta'} = \infty) = 1$.

Prouvons maintenant le théorème pour les configurations finies. Soit ζ une configuration finie. Evaluons:

$$|P(\xi^{\zeta}_{t+s} \in C; \tau^{\zeta} = \infty) - P(\tau^{\zeta} = \infty)\tilde{\mu}(C)| \tag{3}$$

On applique l'inégalité triangulaire et cette quantité est inférieure à:

$$p_5(t,s) + p_6(t,s) + p_7(t,s) + p_8(t,s)$$

où

$$p_5(t,s) = |P(\xi^{\zeta}_{t+s} \in C; \tau^{\zeta} = \infty) - \sum_{\eta \in A_N} P(\xi^{\zeta}_{t+s} \in C; \xi^{\zeta}_t = \eta)|$$

où $A_N = \{\eta : N < |\eta| < \infty\}$

$$p_6(t,s) = |\sum_{\eta \in A_N} P(\xi^{(\eta,t)}_{t+s} \in C; \xi^{\zeta}_t = \eta) - \sum_{\eta \in A_N} P(\xi^{(1,t)}_{t+s} \in C; \xi^{\zeta}_t = \eta)|$$

où 1 représente la configuration avec tous les sites occupés à gauche de l'origine

$$p_7(t,s) = |\sum_{\eta \in A_N} P(\xi^{(1,t)}_{t+s} \in C; \xi^{\zeta}_t = \eta) - P(\xi^{(1,t)}_{t+s} \in C; \tau^{\zeta} > t)|$$

$$p_8(t,s) = |P(\xi^{(1,t)}_{t+s} \in C; \tau^{\zeta} > t) - \tilde{\mu}(C) P(\tau^{\zeta} = \infty)|.$$

Nous avons:

$$p_5(t,s) \leqq P(0 < |\xi^{\zeta}_t| \leqq N)$$

$$p_6(t,s) \leqq \sup_{A_N} P(\xi^{(\eta,t)}_{t+s}(x) \neq \xi^{(1,t)}_{t+s}(x) \text{ pour un } x \in C).$$

Pour donner une majoration de la borne supérieure précédente nous décomposons l'évènement en question sur toutes les valeurs possibles de K, comme dans la première partie de notre démonstration. Cette borne supérieure est alors inférieure à:

$$p_1(s) + p_2(s) + p_3(s) + p(s, N)$$

où p_1, p_2, p_3 ont été définies dans la première partie de la démonstration. On a:

$$p(s,N)=\sum_{k<\sqrt{s}} P(K=k;\, N \text{ particules de } \eta \text{ meurent avant } k\sqrt{s})$$

Ceci est inférieur à:

$$\sqrt{s}(1-e^{-s})^N$$

Pour $p_7(t, s)$ nous avons la même majoration que pour $p_5(t, s)$. Pour $p_8(t, s)$ nous écrivons que:

$$\{\tau^\zeta > t\} \quad \text{et} \quad \{\tilde{\xi}_{t+s}^{(1,t)} \in C\}$$

sont indépendants et donc:

$$p_8(t,s)=|P(\tilde{\xi}_{t+s}^{(1,t)} \in C)P(\tau^\zeta > t)-\tilde{\mu}(C)P(\tau^\zeta=\infty)|$$

Mais

$$P(\tilde{\xi}_{t+s}^{(1,t)} \in C)=P(\tilde{\xi}_s^1 \in C).$$

On obtient finalement que (3) est inférieur à:

$$2P(0<|\tilde{\xi}_t^\zeta|<N)+p_1(s)+p_2(s)+p_3(s)+p(s,N)+p_8(t,s).$$

Nous faisons d'abord t tendre vers l'infini

$$P(0<|\tilde{\xi}_1^\zeta|<N)$$

tend vers 0 et nous avons dans $p_8(t, s)$ que $P(\tau^\zeta > t)$ tend vers $P(\tau^\zeta=\infty)$. Nous faisons ensuite N tendre vers l'infini et $p(s, N)$ tend vers 0. Finalement nous faisons tendre s vers l'infini et

$$p_1(s), \quad p_2(s), \quad p_3(s)$$

tendent vers 0. Lorsque s tend vers l'infini nous avons pour $p_8(t, s)$ que

$$P(\tilde{\xi}_s^1 \in C)$$

tend vers $\tilde{\mu}(C)$, grâce à la première partie de notre démonstration. Nous avons donc prouvé le théorème pour les configurations finies aussi.

Nous avons alors:

Corollaire 1. *Toute la suite μ_n converge vers $\tilde{\mu}$.*

Démonstration. Remarquons que la preuve du théorème 1 est valable pour toutes les valeurs d'adhérence de μ_n. Ceci prouve que μ_n n'a qu'une seule valeur d'adhérence, mais comme cette suite se trouve dans le compact X toute la suite μ_n converge vers $\tilde{\mu}$.

Si le processus de contact vu par la première particule était Feller le théorème 1 impliquerait que $\tilde{\mu}$ est invariante. Comme ce processus n'est Feller que sur les configurations infinies, il est essentiel, pour démontrer que $\tilde{\mu}$ est invariante, de montrer que:

Corollaire 2. *La mesure de probabilité $\tilde{\mu}$ ne charge que les configurations infinies.*

Démonstration. Nous allons montrer que $\tilde{\mu}$ ne charge pas les configurations finies. Pour celà nous allons nous servir de propriétés bien connues du processus de contact (non vu de la première particule), soit ξ_t^1 ce processus avec comme configuration initiale des particules dans tous les sites à gauche de 0. Appelons $\hat{r}_t^1$ la particule la plus à droite de ce processus. Nous savons que:

$$\lim_{t\to\infty} \hat{r}_t^1/t = a > 0.$$

Considérons:

$$\tilde{\mu}(\eta: \eta(x)=0 \text{ pour } x < -a\sqrt{t}/2). \tag{4}$$

Cette quantité est inférieure à:

$$\tilde{\mu}(\eta: \eta(x)=0 \text{ pour } -3a\sqrt{t}/4 < x < -a\sqrt{t}/2).$$

Nous pouvons nous servir du théorème 1 pour écrire que ceci est inférieur à:

$$P(\hat{\xi}_t^1(x)=0 \text{ pour } -3a\sqrt{t}/4 < x < -a\sqrt{t}/2) + e(t) \tag{5}$$

où $e(t)$ est une fonction qui converge verse 0 lorsque t tend vers l'infini. Notons que

$$C_t = \{x: -3a\sqrt{t}/4 < x < -a\sqrt{t}/2\}$$

est un cylindre qui dépend du temps mais dans la démonstration du théorème 1 il suffit de vérifier que $p_3(t)$ tend vers 0 dans ce cas aussi. C'est vrai car le Lemme 2 s'applique ici aussi.

Nous avons que (5) est égal à:

$$P(\xi_t^1(x)=0 \text{ pour } x \in C_t + \hat{r}_t^1) + e(t).$$

Rappelons que ξ_t^Z et ξ_t^1 coincident à gauche de $\hat{r}_t^1$, (5) est donc égal à:

$$P(\xi_t^Z(x)=0, x \in C_t + \hat{r}_t^1).$$

Ceci est inférieur à:

$$P(|\hat{r}_t^1| > 2\lambda t) + \sum_{z=-2\lambda t}^{z=2\lambda t} P(\xi_t^Z(x)=0, x \in C_t + z; \hat{r}_t^1 = z). \tag{6}$$

Chaque terme de la somme en (6) est inférieur à:

$$P(\xi_t^Z(x)=0, x \in C_t)$$

par dualité ceci est égal à:

$$P(\xi_t^{C_t}(x)=0, x \in Z).$$

Par le Th. 3.29 (Chap. 6) dans Liggett [6], ceci est inférieur à:

$$b e^{-c\sqrt{t}}$$

car $a\sqrt{t}/4$ est la longueur de C_t; b et c sont des constantes strictement positives. Il est donc clair que la somme en (6) est inférieure à:

$$4\lambda t e^{-c\sqrt{t}}.$$

Par ailleurs pour évaluer le premier terme de (6) il suffit de comparer le processus de contact avec ce même processus sans mort. Il est clair que nous pouvons construire ces deux processus de façon à ce que le processus sans mort contienne le processus de contact. Comme la position de la première particule du processus sans mort admet une distribution de Poisson, nous avons que:

$$P(\hat{r}_t^1 > 2\lambda t) \leqq P(W(\lambda t) \geqq 2\lambda t)$$

où $W(p)$ indique une variable de Poisson de paramètre p. Nous pouvons majorer ce qui précède par:

$$P(W(\lambda t) > 2\lambda t) < e^{-c' t}$$

où c' est une constante. Pour $(P(\hat{r}_u^1 < -2\lambda t)$ nous pouvons appliquer le Lemme 1 et nous obtenons le même type de majoration. Finalement nous obtenons que (6) est inférieur à:

$$4\lambda t c e^{-c'\sqrt{t}}$$

pour des constantes c et c'. Ceci montre que (4) tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini, et comme (4) tend aussi vers $\tilde{\mu}(\eta$: η est finie) nous pouvons conclure que $\tilde{\mu}$ ne charge que les configurations infinies. Le corollaire 2 est donc démontré.

Corollaire 3. *$\tilde{\mu}$ est l'unique mesure de probabilité invariante pour le processus de contact vu par la première particule.*

Démonstration. Par le Théorème 1 nous savons que la loi de $\tilde{\xi}_t^\eta$ converge faiblement dans X vers $\tilde{\mu}$ lorsque t tend vers l'infini, pour toute configuration η infinie. Mais pour tout t, la loi de $\tilde{\xi}_t^\eta$ ne charge que $\tilde{E}$. Nous savons aussi par le corollaire 2 que $\tilde{\mu}$ ne charge que $\tilde{E}$. Comme $\tilde{E}$ est un borélien dense dans X, toute fonction uniformément continue sur $\tilde{E}$ peut être prolongée de façon unique en une fonction uniformément continue sur X. Ceci prouve que $\tilde{\xi}_t^\eta$ converge faiblement vers $\tilde{\mu}$ dans $\tilde{E}$.

Par ailleurs le processus de contact vu par la première particule a la propriété de Feller sur les configurations infinies, c'est à dire que pour tout cylindre C l'application de $\tilde{E}$ dans R qui à η associe $P(\tilde{\xi}_t^\eta \in C)$ est continue. Remarquons que cette propriété est fausse pour les configurations finies.

Nous avons donc montré que la convergence de la loi $\tilde{\xi}_t^\eta$ vers $\tilde{\mu}$ a lieu dans un espace où le processus est Feller, ceci implique que $\tilde{\mu}$ est une mesure de probabilité invariante pour le processus. L'unicité provient du théorème 1.

Bibliographie

1. Durrett, R.: Oriented Percolation in two dimensions. Ann. Probab. **12**, 999–1040 (1984)
2. Durrett, R., Griffeath, D.: Supercritical contact processes on Z. Ann. Probab. **11**, 1–15 (1983)
3. Galves, A., Presutti, E.: Edge fluctuations for the one dimensional supercritical contact process. Ann. Probab. **15**, 1131–1145 (1987)
4. Galves, A., Presutti, E.: Travelling wave structure of the one dimensional contact process. Stochastic Processes Appl. **25**, 153–163 (1987)
5. Holley, R.: An ergodic theorem for interacting particle systems with attractive interactions. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. **24**, 325–334 (1972)
6. Liggett, T.: Interacting particles systems. Berlin Heidelberg New York: Springer 1985

Reçu le 21 juin 1988