Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
39, 71–79 (1977)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Une caracterisation de processus de Poisson

A. Fellous[1] et J. Granara*[2]

[1] 39 rue Lamarck F-75018 Paris
[2] 153 rue du Fg Saint Denis F-75010 Paris

Résumé de l'article. Dans cet article, nous développons la propriété suivante, des partitions du plan obtenues par la chute de droites orientées aléatoires suivant un processus de Poisson isotrope: si chaque cellule convexe reçoit une couleur aléatoire de loi fixe mais indépendante du processus d'axes, alors le long de toute droite du plan, le processus des couleurs est markovien homogène.

Nous établissons en particulier les propositions suivantes:

Soit Z un processus d'axes du plan possédant cette propriété et d une droite quelconque fixe du plan; alors, nécessairement, le processus des intersections des axes de Z avec d, en tant que processus ponctuel sur d, est un Poisson stationnaire.

Si l'on suppose de plus que Z est un Cox d'axes isotrope, alors nécessairement Z est un Poisson d'axes isotrope.

Les démonstrations nécessitent au préalable la définition précise des notions de:

numérotation des cellules compatible avec la tribu;

procédé de coloration des cellules en couleurs indépendantes équidistribuées.

I. Introduction

Dans un article de 1965, Switzer [2] démontre la propriété suivante des partitions du plan obtenues par la chute de droites aléatoires suivant un processus de Poisson isotrope: si chaque cellule convexe reçoit une couleur aléatoire de loi fixe mais indépendante du processus de droites, alors le long de toute droite du plan, le processus des couleurs est markovien homogène. Dans ce qui suit, nous développons ce résultat en montrant que: si un processus Z d'axes sur le plan possède cette propriété, alors, le long de toute droite du plan d, le processus des points d'intersection de d avec les axes de Z est un Poisson stationnaire, si Z est un processus de Cox d'axes isotrope possédant cette propriété, alors Z est un processus de Poisson d'axes isotrope.

* Ce travail a été effectué pour le compte de l'ADISH, dans le cadre d'un contrat DGRST n° 7570453

II. Considérations préliminaires

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace de probabilité et soit Z un processus d'axes sur le plan $\mathbb{R}^2$, *ou ce qui revient au même un processus ponctuel sur le cylindre* $\mathbb{R} \times \mathbb{S}$ [1]. Dans tout ce qui suit, nous supposerons le processus Z simple.

Ainsi, $\forall \omega \in \Omega$, $Z(\omega)$ est une mesure de Radon ponctuelle simple sur $\mathbb{R} \times \mathbb{S}$.

Si $m=(p,\theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}$ représente un axe, on désigne par Δ_m la droite support de l'axe et $\forall \omega \in \Omega$, on pose:

$$\mathscr{U}(\omega) = \bigcup_{m, Z(\omega)\{m\}=1} \Delta_m.$$

Ainsi, $\forall \omega \in \Omega$, $\mathscr{U}(\omega)$ est fermé et $\mathbb{R}^2 \setminus \mathscr{U}(\omega)$ est réunion dénombrable d'ouverts convexes disjoints, les *cellules* de la réalisation. Il n'y a pas d'identification canonique entre les cellules de deux réalisations distinctes, mais par un procédé de numérotation convenable des cellules, on peut obtenir une identification telle que, si χ_n: $\mathbb{R}^2 \to \{0,1\}$ désigne l'indicateur de la *n-ième* cellule Γ_n, l'application $(x,\omega) \to \chi_n(x)(\omega)$ soit mesurable.

Exemple. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dense de $\mathbb{R}^2$. Posons

$$T_0(\omega) = \min\{n / x_n \notin \mathscr{U}(\omega)\},$$

$$\Gamma_0(\omega) \equiv \text{la cellule possédant } x_{T_0(\omega)},$$

$$\forall k \in \mathbb{N},\ T_{k+1}(\omega) = \min\{n / x_n \notin \mathscr{U}(\omega) \cup \Gamma_0(\omega) \cup \cdots \cup \Gamma_k(\omega)\},$$

$$\Gamma_{k+1}(\omega) \equiv \text{la cellule possédant } x_{T_{k+1}(\omega)}.$$

Il est aisé de vérifier par récurrence que les χ_k correspondants ont bien la propriété requise.

Soit par ailleurs η une probabilité sur $(E, \mathscr{E})$, espace dit *des couleurs*, vérifiant:

a) $\forall c \in E$, $\{c\} \in \mathscr{E}$,

b) *noir* $\in E$,

c) $\exists A, B \in \mathscr{E}$, A, B, $\{noir\}$ disjoints tels que ηA, $\eta B > 0$.

Soit enfin $(C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots)$ un échantillon infini de η, indépendant de $(Z, (\chi_i)_{i \in \mathbb{N}})$.

Le plan $\mathbb{R}^2$ est alors coloré de la manière suivante:

Γ_n est de couleur C_n,

$\mathscr{U}$ est *noir.*

Notons, $\forall a \in \mathbb{R}^2$, $\Phi(a)$ la couleur du point a. Il en résulte les formules *certaines* suivantes, qui ont un sens même si certains des conditionnements y figurant sont de probabilité nulle:

$$\forall A \in \mathscr{E}, \qquad P(\Phi(a) \in A \mid a \in \mathscr{U}) = \begin{cases} 1 & \text{si } noir \in A \\ 0 & \text{si } noir \notin A, \end{cases}$$

$$P(\Phi(a) = \Phi(a') \mid [a, a'] \cap \mathscr{U} = \emptyset) = 1,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^2, \quad \forall A_0, \ldots, A_n \in \mathscr{E},$$

$$P(\Phi(a_0) \in A_0, \ldots, \Phi(a_n) \in A_n \mid a_1, \ldots, a_n \notin \mathscr{U}, \forall i \neq j,]a_i, a_j[\cap \mathscr{U} \neq \emptyset)$$
$$= \eta A_0 \ldots \eta A_n.$$

En particulier, $P(\Phi(a) \in A \mid a \notin \mathscr{U}) = \eta A$.

Soit F une injection aléatoire de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (i.e. $\forall \omega \in \Omega, n \to F_n(\omega)$ est injective). *Si la suite $(C_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est indépendante de $(Z, (\chi_i)_{i \in \mathbb{N}}, (F_i)_{i \in \mathbb{N}})$, il en est de même de la suite $(C_{F_i})_{i \in \mathbb{N}}$.*

En effet, soit B un événement portant sur $(Z, (\chi_i)_{i \in \mathbb{N}}, (F_i)_{i \in \mathbb{N}})$ et soient $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{E}$. On a:

$$\begin{aligned} &P(C_{F_1} \in A_1, \ldots, C_{F_n} \in A_n, B) \\ &\quad = \sum_{i_1, \ldots, i_n} P(C_{i_1} \in A_1, \ldots, C_{i_n} \in A_n, F_1 = i_1, \ldots, F_n = i_n, B) \\ &\quad = \sum_{i_1, \ldots, i_n} P(C_{i_1} \in A_1, \ldots, C_{i_n} \in A_n) P(F_1 = i_1, \ldots, F_n = i_n, B) \\ &\quad = \eta A_1 \ldots \eta A_n \cdot P(B). \end{aligned}$$

Par conséquent, la loi de (Z, Φ) ne dépend pas du choix de la numérotation.

Soit à présent δ un axe de $\mathbb{R}^2$, tel que ni δ ni son opposé ne soient des masses fixes pour Z: d étant le support de δ, $P(d \subset \mathscr{U}) = 0$. Alors, p.s., Z détermine sur δ un processus ponctuel simple, dont l'ensemble des points est $\mathscr{U} \cap d$.

Numérotons les intervalles obtenus sur δ par un procédé analogue à celui des cellules du plan. L'application F associera à n le numéro de la cellule dont l'intersection avec d est le n-ième intervalle de δ: F est donc une injection aléatoire de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Par conséquent, δ et $\mathbb{R}^2$ sont colorés de manière analogue et cela nous conduit dans un premier temps à étudier le problème sur $\mathbb{R}$.

III. Une caractérisation des processus de Poisson sur $\mathbb{R}$

Soit Z un processus ponctuel simple sur $\mathbb{R}$.

Définition A. Nous dirons que Z vérifie la propriété $\mathscr{M}_0$ si Φ est un processus de Markov sur $\mathbb{R}$, au sens général suivant:

$$\forall n, \forall a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \text{ avec } a_0 < a_1 < \cdots < a_n,$$
$$\forall A \in \mathscr{E}, \forall c \in E, \forall B \in \mathscr{E}^{\otimes (n-1)},$$

$$P(\Phi(a_0) \in A \mid \Phi(a_1) = c \text{ et } (\Phi(a_2), \ldots, \Phi(a_n)) \in B)$$
$$= P(\Phi(a_0) \in A \mid \Phi(a_1) = c).$$

Définition B. Z vérifie la propriété $\mathscr{M}_1$ si le processus des couleurs est stationnaire par translation.

Alors si Z vérifie $\mathscr{M}_0$ et $\mathscr{M}_1$, le processus des couleurs est markovien homogène.

Lemme. *Si Z vérifie $\mathscr{M}_1$, Z n'a aucune masse fixe.*

Démonstration. Soient c une couleur, autre que le *noir*, et $A \in \mathscr{E}$, tel que $\eta A > 0$ et c, *noir*$\notin A$. Soient $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ tels que $a_0 < a_1$. Alors les conditions d'indépendance imposées aux couleurs permettent le calcul suivant en formules certaines:

$$\begin{aligned} &P(\Phi(a_0)\in A \mid \Phi(a_1)=c)\\ &\quad = P(\Phi(a_0)\in A, Z\{a_0\}=0, Z]a_0, a_1[\geqq 1 \mid \Phi(a_1)=c, Z\{a_1\}=0)\\ &\quad = \eta A \cdot P(Z\{a_0\}=0, Z]a_0, a_1[\geqq 1 \mid Z\{a_1\}=0). \end{aligned}$$

La propriété $\mathscr{M}_1$ implique alors que $P(Z\{a\}=0,\ Z]a, a+h[\geqq 1 \mid Z\{a+h\}=0)$ ne dépend que de h; soit $f(h)$ sa valeur.

Si $a+h$ n'est pas une masse fixe, $f(h)=P(Z\{a\}=0,\ Z]a, a+h[\geqq 1)$. Comme Z n'a au plus qu'une infinité dénombrable de masses fixes, on peut faire tendre h vers $+\infty$, mais de façon que $a+h$ ne soit jamais une masse fixe. Puisque $[Z\{a\}=0, Z[a, a+h[\geqq 1]$ est un événement croissant avec h, sa probabilité tend en croissant vers $P(Z\{a\}=0,\ Z]a, +\infty[\geqq 1)$ noté $f(\infty)$, puisque ne dépendant pas de a.

L'événement $[Z]a, +\infty[\geqq 1]$ est fonction décroissante de a et sa probabilité est $f(\infty)$ quand a n'est pas une masse fixe.

Soit alors une suite $(a_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ croissante de réels dont aucun ne soit masse fixe et telle que:

$$|a_p| \to +\infty$$

quand $|p| \to +\infty$.

Alors:

$$\begin{aligned} [Z(\mathbb{R})\geqq 1] &= \bigcup_{a\in\mathbb{R}} [Z]a, +\infty[\geqq 1] = \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} [Z]a_p, +\infty[\geqq 1]\\ &= \lim_{p\to-\infty} [Z]a_p, +\infty[\geqq 1] \end{aligned}$$

d'où:

$$P(\exists x, Z\{x\}=1) = P(Z(\mathbb{R})\geqq 1) = f(\infty).$$

De même:

$$P(\forall a, Z]a, +\infty[\geqq 1) = f(\infty).$$

Comme $\forall b \in \mathbb{R}$,

$$[\forall a, Z]a, +\infty[\geqq 1] \subset [Z]b, +\infty[\geqq 1] \subset [\exists x, Z\{x\}=1],$$

ces événements ont même probabilité et diffèrent donc d'un négligeable.

Par conséquent, puisque

$$\begin{aligned} P(Z\{a\}=0, Z]a, +\infty[\geqq 1) &= f(\infty)\\ &= P(Z]a, +\infty[\geqq 1) \end{aligned}$$

on a

$$P(Z\{a\}=0 \mid Z]a, +\infty[\geqq 1)=1.$$

Par ailleurs,

$$P(Z\{a\}=0 \mid Z]a, +\infty[=0)=P(Z\{a\}=0 \mid Z(\mathbb{R})=0)=1$$

et donc

$$P(Z\{a\}=0)=1 \quad \forall a\in\mathbb{R} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Théorème 1. *Si Z vérifie $\mathcal{M}_0$, il est à accroissements indépendants.*

Démonstration. Rappelons que pour qu'un processus ponctuel Z sur $\mathbb{R}$ soit à accroissements indépendants, il suffit qu'il existe un ensemble $\mathcal{D}$ dense dans $\mathbb{R}$ tel que, pour tout u-plet $(I_0, \dots, I_n)$ d'intervalles consécutifs à extrémités dans $\mathcal{D}$, les événements $[Z(I_0)=0], \dots, [Z(I_n)=0]$ soient indépendants.

Les masses fixes de Z constituant un ensemble au plus dénombrable de $\mathbb{R}$, choisissons $\mathcal{D}$ n'en possédant aucune.

Soient $a_0, \dots, a_n, a_{n+1}$ fixés dans $\mathcal{D}$, $a_0<a_1<\dots<a_{n+1}$.

Nous supposerons ici que l'événement $[Z\{a_0, \dots, a_{n+1}\}\geqq 1]$ est vide: ce n'est pas restrictif puisqu'il est négligeable.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense de $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall k\in\{0,1,\dots,n+1\}, \qquad x_k=a_k.$$

La suite $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie à partir des x_n comme dans l'exemple du paragraphe II. Dans cette indexation des cellules, $[a_0\in\Gamma_0]$ est certain. Pour ce qui suit, il est préférable d'introduire une nouvelle indexation, telle qu'en particulier, l'événement $[a_1\in\Gamma_1]$ soit certain.

Pour cela, soit σ la permutation de $\mathbb{N}$ définie par

$$\begin{aligned} &\sigma(0)=n+1, \\ &\sigma(k)=k-1 \qquad \text{pour } k\in\{1,\dots,n+1\}, \\ &\sigma(k)=k \qquad\quad\ \ \text{pour } k\geqq n+2. \end{aligned}$$

Soit F la permutation aléatoire, fonction de Z, définie par

$$\begin{aligned} &F(\omega)=\mathrm{I}\lambda_{\mathbb{N}} \qquad \text{pour } \omega\in[a_1\in\Gamma_1], \\ &F(\omega)=\sigma \qquad\ \ \text{pour } \omega\in[a_1\in\Gamma_0]. \end{aligned}$$

Posant alors, $(\Gamma'_k)_{k\in\mathbb{N}}=(\Gamma_{F_k})_{k\in\mathbb{N}}$, on vérifie immédiatement que l'événement $[a_1\in\Gamma'_1]$ est certain.

Soit à présent N_k le nombre aléatoire défini par

$$[a_k\in\Gamma'_{N_k}], \qquad \text{pour } k\in\{1,\dots,n+1\}.$$

Posons, pour $J\subset\{1,\dots,n\}$

$$D_J=[\forall i\in\{1,\dots,n\}, i\in J \Leftrightarrow Z]a_i, a_{i+1}[=0].$$

Les variables $N_1, \ldots, N_{n+1}$ sont constantes sur D_J; leurs valeurs respectives sont déterminées par J de la façon suivante:

$$N_1(\omega)=1,$$

$$N_{k+1}(\omega)=N_k(\omega)+\mathbb{1}_{\tilde{J}}(k) \quad \text{pour } k\in\{1,\ldots,n\}$$

où

$$\tilde{J}=\{1,\ldots,n\}\setminus J, \quad \forall\,\omega\in D_J.$$

On définit donc

$$N_{J,1}=1,$$

$$N_{J,k+1}=N_{J,k}+\mathbb{1}_{\tilde{J}}(k) \quad \text{pour } k\in\{1,\ldots,n\}$$

et alors

$$D_J=[\forall\,k\in\{1,\ldots,n+1\}, a_k\in\Gamma'_{N_{J,k}}].$$

Remarque. $\bigcup_{J\subset\{1,\ldots,n\}} D_J=\Omega$ et $J_1\neq J_2 \Rightarrow D_{J_1}\cap D_{J_2}=\emptyset$.

Soient $A, B\in\mathscr{E}$, $M\in\mathscr{E}^{\otimes n}$, A, B, $\{noir\}$ disjoints et $\eta\,A$, $\eta\,B>0$. On a

$$\begin{aligned}
&P(\Phi(a_0)\in A \mid \Phi(a_1)\in B \text{ et } (\Phi(a_2),\ldots,\Phi(a_{n+1}))\in M)\\
&\quad=\frac{1}{\eta\,A}\int_B P(\Phi(a_0)\in A \mid \Phi(a_1)=c)\,d\eta(c)\\
&\quad=\frac{1}{\eta\,B}\int_B \eta\,A\cdot P(Z]a_0,a_1[\geqq 1)\,d\eta(c)\\
&\quad=\eta\,A\cdot P(Z]a_0,a_1[\geqq 1).
\end{aligned}$$

Utilisons ce résultat pour une certaine classe d'événements M. Posons, pour $I\subset\{1,\ldots,n\}$

$$G_I=[\Phi(a_1)\in B \text{ et } \forall\,i\in\tilde{I}, \Phi(a_i)\neq\Phi(a_{i+1})].$$

Puisque par hypothèse $\eta\,A$, $\eta\,B>0$, $P(G_I)>0$.

Désignons par C_k la couleur de Γ'_k: alors, l'événement $[\Phi(a_1)=C_1]$ est certain, et $\forall\,i\in\{1,\ldots,n+1\}$

$$\omega\in D_J \Rightarrow \Phi_\omega(a_i)=C_{N_{J,i}}.$$

Donc, pour $J\subset I$

$$\begin{aligned}
G_I\cap D_J&=[\forall\,k\in\{1,\ldots,n+1\}, a_k\in\Gamma'_{N_{J,k}} \quad \text{et} \quad \Phi(a_1)\in B, \forall\,i\in\tilde{I}, \Phi(a_i)\neq\Phi(a_{i+1})]\\
&=[\forall\,k\in\{1,\ldots,n+1\}, a_k\in\Gamma'_{N_{J,k}} \quad \text{et} \quad C_1\in B, \forall\,i\in\tilde{I}, C_{N_{J,i}}\neq C_{N_{J,i+1}}]\\
&=H_{I,J}\cap D_J
\end{aligned}$$

où

$$H_{I,J}=[C_1\in B, \forall\,i\in\tilde{I}, C_{N_{J,i}}\neq C_{N_{J,i+1}}]$$

et pour $J\not\subset I$, $G_I\cap D_J=\emptyset$.

Comme D_J est fonction de Z et $H_{I,J}$ fonction des C_k,

$$P(G_I \cap D_J) = P(D_J)\, P(H_{I,J}).$$

D'après la remarque faite un peu plus haut, il en résulte que

$$P(G_I) = \sum_{J \subset I} P(D_J)\, P(H_{I,J}).$$

D'où,

$$\begin{aligned}
&\eta A \cdot P(Z[a_0, a_1[\geqq 1) \\
&\quad = P(\Phi(a_0) \in A \mid G_I) = \frac{P(\Phi(a_0) \in A, G_I)}{P(G_I)} \\
&\quad = \frac{\sum_{J \subset I} P(\Phi(a_0) \in A, G_I, D_J, Z]a_0, a_1[\geqq 1)}{\sum_{J \subset I} P(G_I \cap D_J)} \\
&\quad = \frac{\sum_{J \subset I} P(C_0 \in A, H_{I,J}, Z]a_0, a_1[\geqq 1, D_J)}{\sum_{J \subset I} P(H_{I,J})\, P(D_J)} \\
&\quad = \eta A \cdot \frac{\sum_{J \subset I} P(H_{I,J})\, P(Z]a_0, a_1[\geqq 1, D_J)}{\sum_{J \subset I} P(H_{I,J})\, P(D_J)}
\end{aligned}$$

En utilisant $\mathscr{M}_0$, montrons par récurrence sur $\operatorname{card}(I)$ que $\forall I$, $[Z]a_0, a_1[\geqq 1]$ et D_I sont indépendants.

Hypothèse de récurrence: *la proposition ci-dessus est vraie pour* $\operatorname{card}(I) < k \leqq n+1$.

Soit alors I tel que $\operatorname{card}(I) = k$.

$$\begin{aligned}
&\eta A \cdot P(Z]a_0, a_1[\geqq 1) \\
&\quad = \eta A \cdot \frac{\sum_{J \subsetneqq I} P(H_{I,J})\, P(Z]a_0, a_1[\geqq 1, D_J) + P(H_{I,I})\, P(Z]a_0, a_1] \geqq 1, D_I)}{\sum_{J \subsetneqq I} P(H_{I,J})\, P(D_J) + P(H_{I,I})\, P(D_I)}
\end{aligned}$$

Pour $J \subsetneqq I$, ($\operatorname{card} J < k$), on a

$$P(Z]a_0, a_1[\geqq 1, D_J) = P(Z]a_0, a_1[\geqq 1)\, P(D_J);$$

comme $\eta A \neq 0$, on tire:

$$P(Z]a_0, a_1[\geqq 1) = \frac{\alpha P(Z]a_0, a_1[\geqq 1) + \beta P(Z]a_0, a_1[\geqq 1, D_I)}{\alpha + \beta P(D_I)},$$

d'où $\beta P(Z]a_0, a_1[\geqq 1)\, P(D_I) = \beta P(Z]a_0, a_1[\geqq 1, D_I)$; comme $\beta = P(H_{I,I}) \neq 0$, on a maintenant pour $\operatorname{card}(I)$ quelconque, $[Z]\,a_0, a_1[\geqq 1]$ et D_I indépendants, ce qui achève la démonstration du théorème 1.

Théorème 2. *Si Z vérifie $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}_1$, c'est un Poisson stationnaire.*

Démonstration. d'après $\mathcal{M}_1$, Z n'a pas de masse fixe. Comme, d'après le théorème 1, il est à accroissements indépendants, c'est un Poisson [2]. De plus, pour A, B disjoints,

$$P(Z]a_0, a_1[\geqq 1) = \frac{1}{\eta A} P(\Phi(a_0) \in A \mid \Phi(a_1) \in B)$$

n'est fonction que de $(a_1 - a_0)$.

Cette condition est suffisante pour la stationnarité d'un Poisson.

Sous ces hypothèses, donnons l'expression de la matrice de transition:

$$\begin{aligned} P_h(c, A) &= P(\Phi(a+h) \in A \mid \Phi(a) = c) \\ &= P(\Phi(a+h) \in A \mid \Phi(a) = c; a, a+h \notin \mathcal{U}) \\ &= P(\Phi(a+h) \in A, Z]a, a+h[=0 \mid \Phi(a) = c; a, a+h \notin \mathcal{U}) \\ &\quad + P(\Phi(a+h) \in A, Z]a, a+h[\geqq 1 \mid \Phi(a) = c; a, a+h \notin \mathcal{U}) \\ &= \varepsilon_c A \cdot P(Z]a, a+h[=0) + \eta A \cdot P(Z]a, a+h[\geqq 1). \end{aligned}$$

Sachant que Z est un processus de Poisson d'intensité r, on trouve:

$$P_h(c, A) = \varepsilon_c A \cdot e^{-rh} + \eta A \cdot (1 - e^{-rh}),$$

$$\frac{dP_h(c, A)}{dh}(0) = -r \varepsilon_c A + r \cdot \eta A = r(\eta - \varepsilon_c) A.$$

D'ou $P_h = \exp\{r h(Q - id)\}$ où $Q(c, A) = \eta A$ et $id(c, A) = \varepsilon_c A$.

IV. Retour au plan: Cas des cox isotropes non dégénérés

Soit Z un processus de Cox isotrope d'axes de $\mathbb{R}^2$ *non dégénéré* (p.s. il ne tombe aucun couple d'axes parallèles ou anti-parallèles), U sa mesure d'intensité aléatoire sur $\mathbb{R} \times \mathbb{S}$.

On sait (cf [3]) que *U est factorisée:* p.s.: $U = \lambda_{\mathbb{R}} \otimes W$ où W est une mesure aléatoire diffuse sur $\mathbb{S}$, stationnaire par rotation.

On montre alors aisément que le long de tout axe δ du plan, le processus des intersections avec les axes de Z est un processus de Poisson mixte d'intensité (aléatoire): $\int_0^{2\pi} |\sin\theta| \, W(d\theta)$.

Supposons que Z possède les propriétés $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}_1$. Cela entraîne d'après le paragraphe III que $\int_0^{2\pi} |\sin\theta| \, W(d\theta)$ est une constante certaine α. Comme W est stationnaire par rotation, on peut encore écrire:

$$\forall \theta_0, \qquad \int_0^{2\pi} |\sin(\theta - \theta_0)| \, W(d\theta) = \alpha.$$

Si l'on appelle f la fonction $\theta \to |\sin\theta|$, cette dernière condition s'écrit encore:

$$W * f = \alpha.$$

Soit, en passant aux transformées de Fourier, $\hat{W} \cdot \hat{f} = \alpha\,\varepsilon_0$, où ε_0 est la mesure de Dirac en 0.

Or $\hat{f}(p) = 0 \Leftrightarrow p$ impair. Donc $\hat{W}(p) = 0$, $\forall p$ pair non nul, et $\hat{W}(p) + (-1)^p\,\hat{W}(p) = \alpha\,\varepsilon_0(p)$;

En passant aux transformées de Fourier inverses, on obtient alors

$$W + W * \varepsilon_\pi = r\,\lambda_S \qquad \text{où } r \text{ constante.}$$

Ainsi, W est de la forme $r\,\lambda_S +$ une mesure aléatoire de demi-période π. Si l'on ne considère que le processus ζ de droites sous-jacent de Z, cette propriété équivaut à:

ζ est un processus de Poisson de droites stationnaire.

V. Remarques

a) La donnée de A, B avec $\eta\,A$, $\eta\,B > 0$ et A, B, $\{noir\}$ disjoints a suffit à caractériser le processus de Poisson, ce qui peut simplifier l'investigation lors d'un travail statistique.

b) Une partition aléatoire du plan, du type considéré, est décrite par l'ensemble des droites sans qu'interviennent leurs orientations: c'est ce qu'exprime le dernier résultat du paragraphe IV.

Bibliographie

1. Fellous, A.: Estimation dans les modèles de processus de Cox isotropes de droites et d'axes du plan. Thèse de 3ème cycle, Paris 1976
2. Granara, J.: Compléments à la théorie des processus ponctuels et statistique des processus de Cox stationnaires d'hyperplans orientés. Thèse de 3ème cycle, Paris 1976
3. Krickeberg, K.: Theory of Hyperplane processes. Conference on stochastic point process, IBM Research Center, N.Y. 1971
4. Switzer, P.: A random set process with a markovian property. Amer. Math. Statist. **36**, 1859–1863 [1965]

Reçu le 14 juillet 1975