Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
39, 55–63 (1977)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Quasimartingales, martingales locales, semimartingales et filtration naturelle

Christophe Stricker

Institut de Recherche Mathématique Avancée. Laboratoire associé au C.N.R.S. 7 rue René Descartes. F-67084 Strasbourg Cedex

L'objet de cet article est de démontrer que certaines propriétés d'un processus stochastique sont préservées par restriction de la famille de tribus à la filtration naturelle du processus. Le résultat principal dit que toute semimartingale reste une semimartingale pour sa filtration naturelle, mais pour établir cela nous traitons le cas des quasimartingales, et des martingales locales bornées dans L^1.

1. Quasimartingales

D'une façon générale, nous adoptons le langage et les notations du cours de P.A. Meyer [2] sur les intégrales stochastiques. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé complet, muni d'une *filtration* $(\mathscr{F}_t)_{t \geqq 0}$ (ou famille croissante de tribus), satisfaisant aux conditions habituelles. Nous appelons *sousfiltration* de $(\mathscr{F}_t)$ toute filtration $(\mathscr{G}_t)_{t \geqq 0}$, satisfaisant aux conditions habituelles, et telle que $\mathscr{G}_t \subset \mathscr{F}_t$. Ainsi, si X désigne un processus continu à droite adapté à $(\mathscr{F}_t)$, la *filtration naturelle* de X, c'est à dire la famille des tribus $\mathscr{T}(X_s, s \leqq t)$, rendue continue à droite et augmentée de tous les ensembles $\mathbb{P}$-négligeables de $\mathscr{F}$, est une sous filtration de $(\mathscr{F}_t)$.

Définition 1.1. Soit $X = (X_t)_{t \geqq 0}$ un processus stochastique continu à droite et adapté à la filtration $(\mathscr{F}_t)$. On dit que X est une quasimartingale (*relativement à* $(\mathscr{F}_t)$) *si*

$$\operatorname{Var}(X) = \sup \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[\left|X_{t_i} - \mathbb{E}\left[X_{t_{i+1}} \mid \mathscr{F}_{t_i}\right]\right|\right] + \mathbb{E}\left[\left|X_{t_n}\right|\right] \tag{1}$$

est fini, le sup *étant pris sur l'ensemble des suites finies* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$.

La définition 1.1 permet d'établir sans difficulté le théorème suivant:

Théorème 1.2. *Soit X une quasimartingale pour la filtration $(\mathscr{F}_t)$, adaptée à une sousfiltration $(\mathscr{G}_t)$. Alors X est aussi une quasimartingale pour $(\mathscr{G}_t)$.*

Démonstration. Comme X est adapté à $(\mathscr{G}_t)$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X_{t_i}-\mathbb{E}[X_{t_{i+1}}|\mathscr{G}_{t_i}]|] &= \mathbb{E}[|\mathbb{E}[X_{t_i}-X_{t_{i+1}}|\mathscr{G}_{t_i}]|] \\ &= \mathbb{E}[|\mathbb{E}[X_{t_i}-X_{t_{i+1}}|\mathscr{F}_{t_i}|\mathscr{G}_{t_i}]|] \\ &\leqq \mathbb{E}[|\mathbb{E}[X_{t_i}-X_{t_{i+1}}|\mathscr{F}_{t_i}]|]\end{aligned}$$

car les opérateurs $\mathbb{E}[.|\mathscr{G}_t]$ diminuent la norme dans L^1. Donc la variation de X par rapport à $(\mathscr{G}_t)$ est inférieure à la variation de X par rapport à $(\mathscr{F}_t)$, qui est finie.

Toute surmartingale bornée dans L^1, en particulier toute surmartingale positive, est une quasimartingale, ainsi que la différence de deux surmartingales positives. La réciproque est donnée dans le théorème suivant qui précise la décomposition de Rao [4] d'une quasimartingale, en montrant sous quelle condition on a l'unicité.

Théorème 1.3. *Le processus X est une quasimartingale si et seulement s'il existe deux surmartingales positives X' et X'' telles que $X=X'-X''$. Dans ce cas on peut choisir X' et X'' telles que* $\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}(X')+\mathrm{Var}(X'')$ *et la décomposition est alors unique.*

Démonstration. Soit $S: t\leqq t_0<t_1<\cdots<t_n<\infty$ une subdivision finie de l'intervalle $[t,+\infty[$. Les variables aléatoires

$$U_t'(S)=\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1}(X_{t_i}-\mathbb{E}[X_{t_{i+1}}|\mathscr{F}_{t_i}])^+ + X_{t_n}^+ \,|\, \mathscr{F}_t\right],$$

$$U_t''(S)=\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1}(X_{t_i}-\mathbb{E}[X_{t_{i+1}}|\mathscr{F}_{t_i}])^- + X_{t_n}^- \,|\, \mathscr{F}_t\right]$$

croissent lorsqu'on raffine la subdivision S et leur intégrale reste bornée, elles admettent donc une limite dans L^1 le long de l'ensemble ordonné des subdivisions de $[t,\infty[$. Appelons U_t' et U_t'' ces limites. On vérifie aisément que si $s\leqq t$, alors $\mathbb{E}[U_t'|\mathscr{F}_s]\leqq U_s'$ et $\mathbb{E}[U_t''|\mathscr{F}_s]\leqq U_s''$. Donc U' et U'' sont des surmartingales, et admettent le long des rationnels des limites à droite $X_t'=U_{t+}'$, $X_t''=U_{t+}''$. On peut montrer (voir le lemme 1, p. 423 de [5]) que la fonction $t\mapsto\mathbb{E}[U_t']$ est continue à droite, de sorte que X' est une modification de U', et de même X'' est une modification de U'', mais nous n'aurons pas besoin de ce résultat ici.

Nous avons $X_t=U_t'(S)-U_t''(S)$ pour toute subdivision finie S, d'où$X_t=U_t'-U_t''$, et par continuité à droite $X_t=X_t'-X_t''$. D'autre part, $\mathrm{Var}(X)$ est la limite de $\mathbb{E}[U_0'S)+U_0''(S)]$ le long de l'ensemble ordonné des subdivisions finies de $[0,+\infty[$; on a donc $\mathrm{Var}(X)=\mathbb{E}[U_0'+U_0'']\geqq\mathbb{E}[X_0'+X_0'']$ (lemme de Fatou), c'est à dire $\mathrm{Var}(X)\geqq\mathrm{Var}(X')+\mathrm{Var}(X'')$. L'inégalité inverse étant évidente, on a l'égalité de l'énoncé.

Montrons maintenant l'unicité de cette décomposition. Soit $X=X^1-X^2$, où X^1 et X^2 sont des surmartingales positives. Si $s\leqq t$ on a

$$(\mathbb{E}[X_s-X_t|\mathscr{F}_s])^+ = (\mathbb{E}[X_s^1-X_t^1|\mathscr{F}_s]-\mathbb{E}[X_s^2-X_t^2|\mathscr{F}_s])^+ \leqq \mathbb{E}[X_s^1-X_t^1|\mathscr{F}_s]$$

car X^1 et X^2 sont des surmartingales. On en déduit sans peine que $U_t'\leqq X_t^1$ (donc aussi $X_t'\leqq X_t^1$ par continuité à droite) et que $\mathbb{E}[U_s'-U_t'|\mathscr{F}_s]\leqq\mathbb{E}[X_s^1-X_t^1|\mathscr{F}_s]$, de sorte que X^1-U', et donc X^1-X', est une surmartingale positive. Il en est de même pour X^2-X''. Alors la relation $\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}(X^1)+\mathrm{Var}(X^2)$ s'écrit $\mathbb{E}[X'_0+X''_0]=\mathbb{E}[X^1_0+X^2_0]$, et entraîne que les deux surmartingales positives X^1-X' et X^2-X'' sont nulles à l'instant 0, donc identiquement nulles.

Définition 1.4. On appelle changement de temps *un processus $(\tau_t)_{t\geqq 0}$, continu à droite et croissant, tel que pour tout t τ_t soit un temps d'arrêt de $(\mathscr{F}_t)$ p.s. fini.*

Si (τ_t) est un changement de temps et X une surmartingale positive, le théorème d'arrêt de Doob nous dit que le processus (X_{τ_t}) est une surmartingale pour la filtration $(\mathscr{F}_{\tau_t})$. On a donc le corollaire suivant:

Corollaire 1.5. *Si (τ_t) est un changement de temps et X une quasimartingale pour la filtration $(\mathscr{F}_t)$, alors (X_{τ_t}) est encore une quasimartingale pour la filtration $(\mathscr{F}_{\tau_t})$.*

D'autre part, grâce à la décomposition d'Ito-Watanabe d'une surmartingale positive, nous obtenons un autre corollaire du théorème 1.3:

Corollaire 1.6. *Si X est une quasimartingale, alors $X=M+A$ où A est un processus prévisible à variation intégrable, et M est une martingale locale.*

Nous verrons dans un instant que M est bornée dans L^1.

2. Martingales locales

Une martingale locale X pour une filtration $(\mathscr{F}_t)$ n'est pas en général une martingale locale pour sa filtration naturelle. Le lemme suivant démontré dans [3] nous fournira aisément un contre-exemple dans le cas discret (et celui-ci peut être considéré comme un cas particulier du cas continu).

Lemme 2.1. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus adapté à une suite croissante de tribus $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1) *X est une martingale locale.*

2) *Pour tout n on a $\mathbb{E}[|X_{n+1}|\,|\mathscr{F}_n]<\infty$ p.s. et $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathscr{F}_n]=X_n$.*

Contre-exemple. Prenons $\Omega=\mathbb{N}$; $\mathbb{P}\{2n\}=\mathbb{P}\{2n+1\}=1/n^2$; $\mathscr{F}_0=\{\{2n,2n+1\}, n\in\mathbb{N}\}$, $\mathscr{F}_1=\mathscr{P}(\mathbb{N})$; $X_0=0$, $X_1(2n)=-X_1(2n+1)=n$.

On a $\mathbb{E}[|X_1|\,|\mathscr{F}_0]<\infty$ p.s., $\mathbb{E}[X_1|\mathscr{F}_0]=0=X_0$, mais on a $\mathbb{E}[|X_1||\mathscr{T}(X_0)]=+\infty$ p.s. La martingale locale (X_0,X_1) n'est donc pas une martingale locale pour sa filtration naturelle.

Nous allons indiquer maintenant une classe de martingales locales qui conservent cette propriété par rapport à leur filtration naturelle. Pour cela, nous aurons besoin de rappeler le théorème de Kazamaki [1] sur la décomposition de Krickeberg des martingales locales, et d'établir un résultat auxiliaire sur les quasimartingales.

Rappelons qu'un temps d'arrêt *réduit* une martingale locale M si le processus $(M_{t\wedge T}I_{\{T>0\}})$ est une martingale uniformément intégrable. Lorsque M_0 est intégrable – ce sera le cas dans cet article – on peut supprimer l'indicatrice $I_{\{T>0\}}$.

Définition 2.2. *Soit X un processus adapté à $(\mathscr{F}_t)$ et continu à droite. On pose $\|X\|_1 = \sup_T \mathbb{E}[|X_T|]$, T parcourant l'ensemble des temps d'arrêt finis de la famille $(\mathscr{F}_t)$. On dit que X est* borné dans L^1 *si* $\|X\|_1 < \infty$.

Par exemple, toute surmartingale positive est bornée dans L^1, donc toute quasimartingale est bornée dans L^1. Dans l'énoncé du corollaire 1.6, par exemple, X est bornée dans L^1 comme différence de deux surmartingales positives, A comme processus à variation intégrable, et donc M est une martingale locale bornée dans L^1.

Théorème 2.3 (Kazamaki). *Soit M une martingale locale. Alors $\|M\|_1 = \sup_n \mathbb{E}[|X_{T_n}|]$, pour toute suite croissante (T_n) de temps d'arrêt réduisant M et tendant vers $+\infty$. Si M est bornée dans L^1, il existe deux martingales locales positives M^1 et M^2 telles que $M = M^1 - M^2$ et que $\|M\|_1 = \|M^1\|_1 + \|M^2\|_1$. Cette décomposition est unique.*

Nous arrivons à un résultat simple, mais très utile:

Théorème 2.4. 1) *Une martingale locale M est une quasimartingale si et seulement si $\|M\|_1 < \infty$.*

2) *Dans ce cas, M est aussi une martingale locale pour sa filtration naturelle, et plus généralement pour toute sousfiltration $(\mathscr{G}_t)$ à laquelle elle est adaptée.*

Démonstration. 1) Si M est une quasimartingale, alors d'après le théorème 1.3, M est la différence de deux surmartingales positives, donc $\|M\|_1 < \infty$. Réciproquement, si M est une martingale locale bornée dans L^1, M est d'après le théorème 2.3 la différence de deux martingales locales positives. Celles ci sont en particulier des surmartingales positives, et M est une quasimartingale.

2) Soit $T_n = \inf\{t: |M_t| \geqq n\}$; T_n est un temps d'arrêt de la filtration $(\mathscr{G}_t)$, et la martingale locale arrêtée M^{T_n} est donc adaptée à $(\mathscr{G}_t)$. Elle est d'autre part dominée par $n + |M_T|$, qui est intégrable puisque M est bornée dans L^1; c'est donc une martingale uniformément intégrable par rapport à la famille $(\mathscr{F}_t)$. Mais toute martingale uniformément intégrable de $(\mathscr{F}_t)$ adaptée à $(\mathscr{G}_t)$ est une martingale pour $(\mathscr{G}_t)$, et on en déduit que M est une martingale locale de la filtration $(\mathscr{G}_t)$, réduite par les temps d'arrêt T_n.

Nous allons énoncer maintenant une condition nécessaire et suffisante (malheureusement peu maniable) pour qu'une martingale locale M de la filtration $(\mathscr{F}_t)$, adaptée à une sousfiltration $(\mathscr{G}_t)$, soit une martingale locale de $(\mathscr{G}_t)$. Nous nous appuierons pour cela sur le théorème 3.1 que nous démontrerons plus loin, suivant lequel M est une *semimartingale* de $(\mathscr{G}_t)$, et sur le critère suivant:

Lemme 2.5. *Soit X une semimartingale nulle en 0. Pour que X soit une semimartingale spéciale, il faut et il suffit que le processus croissant $X_t^* = \sup_{s \leqq t} X_s$ soit localement intégrable.*

Démonstration. Si X est spéciale et nulle en 0, X admet une décomposition $X = M + A$, où A est à variation localement intégrable et M est une martingale locale nulle en 0. Il suffit de démontrer que (M_t^*) est localement intégrable. Or si T est un temps d'arrêt qui réduit fortement M ([2], p. 294, 7 et 8), M_T^* est une variable aléatoire intégrable. La réciproque, compte tenu de ce qui vient d'être dit pour les martingales locales, se ramène à l'énoncé suivant: si A est un processus à variation finie, nul en 0, et si le processus croissant (A_t^*) est localement intégrable, alors A est localement intégrable. Considérons des temps d'arrêt R_n croissant vers $+\infty$ et tels que $E[A_{R_n}^*]<\infty$. Posons $S_n=\inf\left\{t\colon \int_0^t |dA_s|\geqq n\right\}$, et $T_n=R_n\wedge S_n$. Alors $|\Delta A_{T_n}|\leqq 2A_{R_n}^*$ est intégrable, et $\int_0^{T_n} |dA_s|$ est majoré par $n+|\Delta A_{T_n}|$, donc intégrable.

Théorème 2.6. *Soit M une martingale locale pour la filtration $(\mathscr{F}_t)$, adaptée à une sousfiltration $(\mathscr{G}_t)$. Pour que M soit une martingale locale pour $(\mathscr{G}_t)$, il faut et il suffit que par rapport à $(\mathscr{G}_t)$ M soit une semimartingale spéciale.*

Démonstration. La condition est évidemment nécessaire, montrons qu'elle est suffisante. Nous pouvons supposer que $M_0=0$. M étant une semimartingale spéciale pour $(\mathscr{G}_t)$, le lemme 2.5 entraîne l'existence d'une suite croissante de temps d'arrêt T_n de la famille $(\mathscr{G}_t)$, tendant vers $+\infty$, et telle que $\mathbb{E}[M_{T_n}^*]<+\infty$. Le processus arrêté M^{T_n} est alors à la fois adapté à $(\mathscr{G}_t)$, et une martingale uniformément intégrable pour la famille $(\mathscr{F}_t)$. C'est donc une martingale uniformément intégrable pour $(\mathscr{G}_t)$, et M elle même est une martingale locale pour cette filtration.

3. Semimartingales. Integrales stochastiques

Le but principal de ce paragraphe est la démonstration du théorème suivant:

Théorème 3.1. *Soit X une semimartingale pour la filtration $(\mathscr{F}_t)$, adaptée à une sousfiltration $(\mathscr{G}_t)$. Alors X est une semimartingale par rapport à $(\mathscr{G}_t)$.*

La démonstration comporte plusieurs étapes. On se ramène d'abord au cas où $X_0=0$, puis au cas d'une semimartingale à sauts bornés par 1:

Lemme 3.2. *Le processus $V_t=\sum_{0<s\leqq t} \Delta X_s I_{\{|\Delta X_s|\geqq 1\}}$ est à variation finie sur tout intervalle fini, adapté à la filtration $(\mathscr{G}_t)$, et le processus $Y_t=X_t-V_t$ est une semimartingale pour la filtration $(\mathscr{F}_t)$, adaptée à $(\mathscr{G}_t)$, nulle en* 0 *et à sauts bornés par* 1.

Ce lemme est évident: V n'a qu'un nombre fini de sauts sur tout intervalle fini, puisque les trajectoires de X sont continues à droite et pourvues de limites à gauche. Il suffira de prouver que Y est une semimartingale par rapport à $(\mathscr{G}_t)$. Le lecteur remarquera que, même si au départ $(\mathscr{G}_t)$ était la filtration naturelle de X, ce n'est plus en général la filtration naturelle de Y.

La semimartingale Y à sauts bornés par 1 est spéciale, d'après Yœurp [6] (aussi [2], p. 310). Elle admet donc une décomposition canonique $Y=M+A$, où M est une martingale locale nulle en 0, A un processus à variation finie prévisible (par rapport à $(\mathscr{F}_t)$) nul en 0, et cette décomposition est unique.

Lemme 3.3. *Avec les notations ci-dessus, il existe une suite croissante de temps d'arrêt T_n de la filtration $(\mathscr{G}_t)$, tendant vers $+\infty$, et telle que pour tout n la martingale locale $(M_{t\wedge T_n})$ appartienne à $\mathscr{H}^1$.*

Démonstration. Nous allons montrer d'abord que $\mathbb{E}[[A,A]_T] \leqq \mathbb{E}[[Y,Y]_T]$ pour tout temps d'arrêt T. Quitte à remplacer Y et A par les processus arrêtés A^T et Y^T, on peut se ramener à montrer que $\mathbb{E}[[A,A]_\infty] \leqq \mathbb{E}[[Y,Y]_\infty]$. Puis, quitte à arrêter de nouveau Y et A à des temps d'arrêt convenables, on peut se ramener au cas où A est à variation intégrable, M uniformément intégrable. On a alors pour tout temps d'arrêt prévisible S de la filtration $(\mathscr{F}_t)$

$$\Delta A_S = \mathbb{E}[\Delta Y_S \mid \mathscr{F}_{S-}]$$

et par conséquent $\mathbb{E}[\Delta A_S^2] \leqq \mathbb{E}[\Delta Y_S^2]$. Appliquons alors ce résultat à une suite de temps prévisibles (S_n), admettant des graphes disjoints et épuisant les sauts de A. Il vient que

$$\mathbb{E}[[A,A]_\infty] = \mathbb{E}[\sum_n \Delta A_{S_n}^2] \leqq \mathbb{E}[\sum_n \Delta Y_{S_n}^2] \leqq \mathbb{E}[[Y,Y]_\infty].$$

Le résultat auxiliaire cherché est établi, passons à l'énoncé proprement dit.

Le processus croissant $[Y,Y]$ est adapté à la famille $(\mathscr{G}_t)$, et a des sauts bornés par 1. Il existe donc des temps d'arrêt (T_n) de la famille $(\mathscr{G}_t)$, tendant vers $+\infty$ en croissant, et tels que $[Y,Y]_{T_n}$ soit intégrable (même bornée, si on le désire). D'après l'inégalité ci-dessus, $[A,A]_{T_n}$ est aussi intégrable. En vertu de la relation

$$[M,M]^{1/2} \leqq [Y,Y]^{1/2} + [A,A]^{1/2}$$

on a $\mathbb{E}[[M,M]_{T_n}^{1/2}] < \infty$, et cela signifie que la martingale locale $(M_{t \wedge T_n})$ appartient à $\mathscr{H}^1$. Ici, en vertu de l'inégalité $[M,M] \leqq 2([Y,Y]+[A,A])$, elle est même bornée dans L^2.

Remarque. Le raisonnement montre mieux: supposons que $[Y,Y]_{T_n}$ soit bornée, et pour simplifier les notations ramenons nous au cas où $[Y,Y]_\infty$ est bornée, par arrêt à T_n. Alors un raisonnement tout analogue à celui qui a été fait plus haut montre que $\mathbb{E}[[A,A]_\infty - [A,A]_S \mid \mathscr{F}_S] \leqq \mathbb{E}[[Y,Y]_\infty - [Y,Y]_S \mid \mathscr{F}_S]$ est borné pour tout temps d'arrêt S. Ensuite, nous avons $[M,M]_\infty - [M,M]_S \leqq 2([Y,Y]_\infty - [Y,Y]_S + [A,A]_\infty - [A,A]_S)$, de sorte que le processus croissant $[M,M]$ engendre un potentiel borné. Comme d'autre part les sauts de Y et de A sont bornés par 1, les sauts de M sont bornés par 2, et on voit que M appartient à $\mathscr{BMO}$. Autrement dit, en revenant aux premières notations, il existe des temps d'arrêt T_n *de la famille* $(\mathscr{G}_t)$ tels que la martingale arrêtée $(M_{t \wedge T_n})$ appartienne à $\mathscr{BMO}$.

Lemme 3.4. *Soit $Y = M + A$ une semimartingale, où M appartient à $\mathscr{H}^1$ et A est un processus à variation finie sur $[0, +\infty]$ tout entier. Il existe alors une loi $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$, telle que Y admette la décomposition $Y = M' + A'$ où M' est une martingale pour la loi $\mathbb{Q}$ appartenant à $\mathscr{H}^1$, et A' est un processus à variation intégrable pour la loi $\mathbb{Q}$.*

Démonstration. Désignons par N une variable aléatoire bornée, strictement positive, d'intégrale 1 pour la loi $\mathbb{P}$, et telle que $N.\int_0^\infty |dA_s|$ soit $\mathbb{P}$-intégrable[1]; soit

[1] Par exemple $N = U/\mathbb{E}[U]$, où $U = 1/1 + \int_0^\infty |dA_s|$

(N_t) la martingale $\mathbb{E}[N|\mathscr{F}_t]$, et soit $\mathbb{Q}=N\cdot\mathbb{P}$. Utilisons le théorème 24, p. 377 de [2]: M étant une martingale locale pour $\mathbb{P}$, le processus $M'=M-B$ est une martingale locale pour $\mathbb{Q}$, où

$$B_t=\int_0^t \frac{d[M,N]_S}{N_S}.$$

Nous posons alors $A'=A+B$, et il nous faut montrer que A' est à variation intégrable (non prévisible en général) pour $\mathbb{Q}$, et que M' appartient à $\mathscr{H}^1$.

Comme M est dans $\mathscr{H}^1$ et N bornée, la variation du processus $K_t=[M,N]_t$ est intégrable pour $\mathbb{P}$ (inégalité de Fefferman[2], [2], p. 337), et on a

$$\mathbb{E}\left[N\cdot\int_0^\infty \frac{|dK_s|}{N_s}\right]=\mathbb{E}\left[\int_0^\infty |dK_s|\right]<\infty,$$

ce qui signifie encore que $\int_0^\infty |dB_s|$ est $\mathbb{Q}$-intégrable. Comme $\int_0^\infty |dA_s|$ est $\mathbb{Q}$-intégrable par la définition de N, le résultat concernant A' est établi.

Nous avons ensuite $[M',M']_\infty^{1/2}\leqq[M,M]_\infty^{1/2}+[B,B]_\infty^{1/2}$; $[M,M]_\infty$ est le même pour $\mathbb{P}$ et pour $\mathbb{Q}$, puisque c'est la limite en probabilité de sommes de la forme $M_0^2+\sum_i(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2$; comme il est $\mathbb{P}$-intégrable, il est aussi $\mathbb{Q}$-intégrable puisque N est bornée. D'autre part, on a $[B,B]_\infty^{1/2}=(\sum_s \Delta B_s^2)^{1/2}\leqq\sum_s|\Delta B_s|\leqq\int_0^\infty|dB_s|$, qui est $\mathbb{Q}$-intégrable comme on l'a vu plus haut. Donc M' appartient bien à $\mathscr{H}^1$.

Démonstration du théorème 3.1. Il nous suffit (lemme 3.2) de démontrer que le processus $Y=X-V$ est une semimartingale par rapport à $(\mathscr{G}_t)$. Considérons la décomposition $Y=M+A$ et les temps d'arrêt T_n de la famille $(\mathscr{G}_t)$ fournis par le lemme 3.3, et posons $S_n=T_n\wedge n$. La martingale arrêtée M^{T_n} appartient à $\mathscr{H}^1$ d'après le lemme 3.3, et il en est de même de M^{S_n} par arrêt; le processus arrêté A^{S_n} a une variation totale finie, donc nous pouvons appliquer le lemme 3.4 à $Y^{S_n}=M^{S_n}+A^{S_n}$. Il existe donc une loi $\mathbb{Q}_n$ équivalente à $\mathbb{P}$, telle que Y^{S_n} soit une quasimartingale pour la loi $\mathbb{Q}_n$ et la filtration $(\mathscr{F}_t)$. Comme Y est adaptée à $(\mathscr{G}_t)$ et S_n un temps d'arrêt de $(\mathscr{G}_t)$, le théorème 1.2 entraîne que Y^{S_n} est une quasimartingale pour la loi $\mathbb{Q}_n$ et la filtration $(\mathscr{G}_t)$, donc une semimartingale pour $\mathbb{Q}_n$ et $(\mathscr{G}_t)$, et enfin (la notion de semimartingale étant invariante lorsqu'on remplace une loi par une loi équivalente: [2], th. 23, p. 377), Y^{S_n} est une semimartingale pour $\mathbb{P}$ et pour la filtration $(\mathscr{G}_t)$. Enfin, comme les S_n sont des temps d'arrêt de $(\mathscr{G}_t)$, Y elle même est une semimartingale pour la loi $\mathbb{P}$ et la filtration $(\mathscr{G}_t)$.

Remarque 3.5. Supposons que X soit une semimartingale pour la filtration $(\mathscr{F}_t)$, admettant une décomposition canonique $X=M+A$ pour cette filtration (M martingale locale, A prévisible à variation finie). Alors X peut être adaptée à une sousfiltration $(\mathscr{G}_t)$ sans que M et A le soient. Construisons un contre exemple dans le cas discret: $\Omega=[0,1]$ muni de la mesure de Lebesgue $\mathbb{P}$; $\mathscr{F}_0$ est la tribu

[2] Dans le cas concret qui nous occupe, M et N sont bornées dans L^2, et on peut donc invoquer l'inégalité moins profonde de Kunita-Watanabe

engendrée par l'intervalle $[0, \frac{1}{4}[$, $\mathscr{G}_0$ est la tribu triviale, et $X_0=0$; $\mathscr{F}_1$ est la tribu borélienne, $\mathscr{G}_1$ est la tribu engendrée par $[0, 1/2[$ et $X_1 = I_{[0,1/2[}$. Alors la décomposition de X est donnée par $A_0=0$, $A_1 = \mathbb{E}[X_1 | \mathscr{F}_0]$, $M = X - A$, et on voit que A_1 n'est pas $\mathscr{G}_1$-mesurable.

Théorème 3.6. *Soit $(\mathscr{G}_t)$ une sousfiltration de $(\mathscr{F}_t)$, et soient X et H respectivement une semimartingale pour $(\mathscr{G}_t)$, et un processus prévisible localement borné pour $(\mathscr{G}_t)$. Alors l'intégrale stochastique de H par rapport à X selon $(\mathscr{F}_t)$ est la même que l'intégrale stochastique selon $(\mathscr{G}_t)$.*

Démonstration. On se ramène aussitôt, par arrêt à des temps d'arrêt de $(\mathscr{G}_t)$, au cas où H est borné. La proposition étant évidente pour les processus prévisibles élémentaires de la filtration $(\mathscr{G}_t)$, pour lesquels on peut écrire explicitement l'intégrale stochastique, le théorème des classes monotones nous ramène à la vérification de la propriété suivante: soit (H^n) une suite croissante de processus prévisibles de la famille $(\mathscr{G}_t)$, uniformément bornée en valeurs absolue, et soit H sa limite. Supposons que l'on ait $H^n \underset{\mathscr{G}}{\cdot} X = H^n \underset{\mathscr{F}}{\cdot} X$ pour tout n; alors on a $H \underset{\mathscr{G}}{\cdot} X = H \underset{\mathscr{F}}{\cdot} X$. Or cette propriété est évidente, car il est bien connu que $(H^n \cdot X)_t$ converge en probabilité vers $(H \cdot X)_t$ pour tout t fini, selon la filtration $(\mathscr{G}_t)$ comme selon la filtration $(\mathscr{F}_t)$.

Remarque 2.7. C. Doléans-Dade vient d'établir dans [7] un théorème d'existence et d'unicité pour des équations intégrales stochastiques du type:

$$X_t(\omega) = H_t(\omega) + \int_0^t f(\omega, s, X_{s-}(\omega))\, dM_s(\omega) \tag{2}$$

où l'inconnue X est un processus adapté à $(\mathscr{F}_t)$ à trajectoires càdlàg., et les données H, M, f sont respectivement: un processus adapté à $(\mathscr{F}_t)$ à trajectoires càdlàg.; une semimartingale pour $(\mathscr{F}_t)$; enfin une fonction $f(\omega, s, x)$ sur $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ satisfaisant à une condition de Lipschitz en x, une condition de continuité à gauche en s, et à la condition d'être adaptée à $\mathscr{F}_s$ pour (s, x) fixés. Donnons nous maintenant une sousfiltration $(\mathscr{G}_t)$, et supposons que H et M soient adaptés à $(\mathscr{G}_t)$, et $f(., s, x)$ adaptée à $\mathscr{G}_s$ pour (s, x) fixés. Peut on affirmer que la solution X est adaptée à la sousfiltration $(\mathscr{G}_t)$?

Bien entendu, cela peut se démontrer en suivant pas à pas la construction de Doléans-Dade, mais c'est aussi une conséquence immédiate des résultats de ce travail. En effet, le théorème 3.1 nous permet d'affirmer que M est une semimartingale par rapport à $(\mathscr{G}_t)$, de sorte que le théorème de Doléans-Dade s'applique dans la sousfiltration, et nous fournit un processus $(\bar{X}_t)$ adapté à $(\mathscr{G}_t)$, tel que

$$\bar{X}_t = H_t + \int_0^t f(., s, \bar{X}_{s-})\, dM_s$$

les intégrales stochastiques étant prises au sens de la filtration $(\mathscr{G}_t)$. Mais d'après le théorème (3.6), ces intégrales stochastiques coïncident avec les intégrales au sens de $(\mathscr{F}_t)$, de sorte que $\bar{X}$ satisfait à (2). Comme la solution de (2) dans la filtration $(\mathscr{F}_t)$ est unique, nous avons $\bar{X} = X$, et X est lui même adapté à la sousfiltration.

Références

1. Kazamaki, N.: Krickeberg's decomposition for local martingales. Séminaire de Probabilités VI. Lecture Notes in Math. **258**, 101–103. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1972
2. Meyer, P. A.: Un cours sur les intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités X. Lecture Notes in Math. **511**, 246–400. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1976
3. Meyer, P. A.: Martingales and stochastic integrals. Lecture Notes in Math. **284**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1972
4. Rao, K.M.: Quasimartingales. Math. Scand. **24**, 79–92 (1969)
5. Stricker, C.: Une caractérisation des quasimartingales. Séminaire de Probabilités IX. Lecture Notes in Math. **465**, 420–424. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1975
6. Yœurp, C.: Décomposition des martingales locales et formules exponentielles. Séminaire des Probabilités X. Lecture Notes in Math. **511**, 432–480. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1976
7. Doléans-Dade, C.: On the existence and unicity of solutions of stochastic integral equations. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **36**, 93–102 (1976)

Reçu le 1er Octobre, 1976