Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
39, 31–53 (1977)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Sur un problème de Dynkin

Jean-Michel Bismut
Université d'Orsay, F-91405 Orsay

The purpose of this paper is to apply methods previously developed by the author for the optimal stopping problem to a zero sum game where both control variables are stopping times.

Cet article a bénéficié de nombreuses conversations avec G. Mokobodzki. Qu'il en soit ici remercié.

I. Introduction

Bensoussan et Friedman ont résolu dans [1] un problème introduit par Dynkin et Yuschkevitch dans [10] de jeu stochastique avec temps d'arrêt sur des diffusions.

Dans [1], 5, on considère l'équation différentielle stochastique:

$$\begin{aligned} &dx = b(t,x)\,dt + \sigma(t,x)\cdot d\beta \\ &x_s = x \end{aligned} \tag{1.1}$$

où $a = \sigma\sigma^*$ est uniformément elliptique, continue et bornée, ainsi que ses dérivées premières et secondes, et où b est continue et bornée ainsi que ses dérivées premières.

g et g' sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, appartenant à des espaces de Sobolev d'ordre suffisamment élevé, telles que $g \leqq g'$. T_0 est une constante $\geqq 0$.

Pour $s \leqq T_0$, on considère alors le critère:

$$E^b_{(s,x)}(1_{(T \leqq T')}\, g(T, x_T) + 1_{(T' < T)}\, g'(T', x_{T'})) \tag{1.2}$$

où T et T' sont des temps d'arrêt tels que $T \leqq T_0$.

Bensoussan et Friedman montrent alors que le jeu où le premier joueur maximise (1.2) en T et le second joueur minimise (1.2) en T' a une solution. Ils utilisent pour cela les techniques d'inéquations variationnelles aux dérivées partielles.

Nous allons examiner le problème de Dynkin en utilisant les techniques de [3].

On utilise un critère du type

$$E_\lambda^b\{e^{-p(T\wedge T')}(1_{(T\leqq T')}g(T,x_T)+1_{(T'<T)}g'(T',x_{T'}))\} \tag{1.3}$$

où λ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d$, et où on maximise le critère (1.3) en T et où on le minimise en T'. (1.2) est alors un cas particulier de (1.3).

Les hypothèses que nous ferons sur g et g' sont plus faibles que celles de Bensoussan-Friedman dans [1]. De plus nous étendrons les résultats d'existence de solutions pour le jeu (1.3) aux diffusions à sauts de Stroock [14], ainsi qu'au même problème posé dans le cadre de la théorie générale des processus.

Remarquons enfin que dans [4], nous étendrons les résultats précédents à des processus droits quelconques, mais on ne trouve plus nécessairement des temps d'arrêt comme solutions du jeu, mais des temps d'arrêt généralisés ou quasi-temps d'arrêt.

Pour simplifier l'exposé, on utilisera des notations relatives aux diffusions homogènes, mais les résultats s'étendent immédiatement aux diffusions non homogènes.

On montre tout d'abord dans la section II qu'on peut trouver f et f' telles que:

$$\begin{aligned}&f \text{ et } f' \text{ sont bornées, continues et } p\text{-excessives}\\ &f=\inf_{\tilde f\ p\text{-excessive}\geqq f'+g}\tilde f,\\ &f'=\inf_{\tilde f'\ p\text{-excessive}\geqq f-g'}\tilde f'.\end{aligned} \tag{1.4}$$

Dans la section III, on montre que le système (1.4) a une solution unique et que $q=f-f'$ est la valeur du jeu (1.3).

Dans la section IV, on caractérise les solutions du jeu (1.3).

Dans la section V, on étend les résultats au cas où g est s.c.s et où g' est s.c.i.

Dans la section VI, on étudie le cas où on suppose que T est porté par un fermé A, et T' par un fermé B, où A et B sont disjoints.

Dans la section VII, on étudie comment varient f et f' lorsque les paramètres du système (1.4) varient. Ces résultats sont appliqués dans [6] à des problèmes de jeu.

Dans la section VIII, nous étendons rapidement les résultats dans le cadre de la théorie générale des processus.

II. Existence d'une solution pour le système (1.4)

a désigne une application définie sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d\otimes\mathbb{R}^d$, continue, bornée, à valeurs définies positives.

b est une fonction borélienne bornée, définie sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

Q^b désigne la diffusion de Stroock et Varadhan associée à (a, b) construite en [13].

p est une constante >0.
g et g' sont des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}^d$ telles que:
a) g *ou* g' est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$.
b) Il existe $\beta>0$ tel que:

$$g+\beta \leqq g'. \tag{2.1}$$

On a alors le résultat fondamental.

Théorème II.1. *Les système* (1.4) *a une solution.*

Commençons tout d'abord par remarquer que l'hypothèse $\beta>0$ dans (2.1) a une justification immédiate. En effet, si on suppose que $g(x)=g'(x)$ sur certains points x, on aurait en ces points:

$$f(x)-f'(x)=g(x)=g'(x).$$

Or, dans le cas du processus de translation uniforme, $f-f'$ est une fonction à variation bornée. Si $g=g'$ n'est pas à variation bornée, on ne peut en général avoir l'égalité précédente.

Il suffit en fait de tuer le processus sur l'ensemble fermé $\{g=g'\}$ et de résoudre (1.4) pour le processus tué. Malheureusement, l'hypothèse (2.1) n'est pas vérifiée sur $(g<g')$ et la démonstration donnée ici ne s'applique pas.

L'hypothèse (2.1) permet donc de «séparer» g et g' de manière à pouvoir intercaler entre g et g' une fonction $q=f-f'$ suffisamment régulière.

Les hypothèses de régularité sur g et g' de Bensoussan-Friedman [1] ont par contre pour effet de rendre g et g' «à variation bornée».

Par le Théorème II.3 de [3], on peut trouver f_0 qui est la plus petite fonction p-excessive $\geqq g$, et f_0 est bornée et continue.

De même, on peut trouver f'_0 qui est la plus petite fonction p-excessive $\geqq -g'$ et f'_0 est bornée et continue.

Par récurrence, étant donné f_i et f'_i p-excessives, bornées et continues, on peut trouver f_{i+1} et f'_{i+1} qui sont les plus petites fonctions p-excessives majorant respectivement f'_i+g et f_i-g'.

Le problème essentiel va consister à démontrer que la suite (f_i, f'_i) converge uniformément. C'est pour démontrer cette convergence que certaines majorations à priori qu'on peut établir sur les diffusions de [13] ou les diffusions à sauts de [14] sont essentielles.

Proposition II.1. *La suite* (f_i, f'_i) *est croissante.*

Preuve. On a $f_1 \geqq f_0$ et $f'_1 \geqq f'_0$. Par récurrence, la proposition est démontrée. □

Soit A_{i+1} et B_{i+1} les fermés:

$$\begin{aligned} A_{i+1} &= (f_{i+1}=f'_i+g) \\ B_{i+1} &= (f'_{i+1}=f_i-g'). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Par la Proposition II.2 de [3], on a:

$$\begin{aligned} f_{i+1}(x) &= E_x^b\, e^{-p D_{A_{i+1}}} f_{i+1}(x_{D_{A_{i+1}}}) \\ f'_{i+1}(x) &= E_x^b\, e^{-p D_{B_{i+1}}} f'_{i+1}(x_{D_{B_{i+1}}}). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Proposition II.2. *Si* $x \in A_{i+1}$ $g(x) \geqq E_x^b\, e^{-p D_{B_i}} g'(x_{D_{B_i}})$.

Si $x \in B_{i+1}$ $g'(x) \leqq E_x^b\, e^{-p D_{A_i}} g(x_{D_{A_i}})$.

Preuve. Si $x \in A_{i+1}$, par (2.2) et (2.3), on a:

$$f_{i+1}(x) = f'_i(x) + g(x) = E_x^b\, e^{-p D_{B_i}} (f_{i-1} - g')(x_{D_{B_i}}) + g(x). \tag{2.4}$$

Or, on a:

$$E_x^b\, e^{-p D_{B_i}} f_{i-1}(x_{D_{B_i}}) \leqq f_{i-1}(x). \tag{2.5}$$

Donc:

$$f_{i+1}(x) \leqq f_{i-1}(x) + g(x) - E_x^b\, e^{-p D_{B_i}} g'(x_{D_{B_i}}). \tag{2.6}$$

Comme $f_{i+1} \geqq f_{i-1}$, on a bien la première partie de la proposition. La seconde partie se montre de la même manière. □

On a maintenant le résultat technique fondamental.

Proposition II.3. *Si g' est uniformément continue, il existe $\alpha < 1$ tel que pour tout i, et tout $x \in A_{i+1}$, on ait:*

$$E_x^b\, e^{-p D_{B_i}} \leqq \alpha. \tag{2.7}$$

Si g est uniformément continue, il existe $\alpha' < 1$ tel que pour tout i, et tout $x \in B_{i+1}$, on ait:

$$E_x^b\, e^{-p D_{A_i}} \leqq \alpha'. \tag{2.8}$$

Preuve. Comme $g < g'$, on sait par la Proposition II.2 que A_{i+1} et B_i sont disjoints, ainsi que B_{i+1} et A_i. Le résultat cherché permet en fait de montrer que ces ensembles sont suffisamment «distants» pour le processus considéré.

On ne montrera naturellement que la première partie de la proposition. Par [13], Lemme 3.1., on a:

$$Q_x^b \left(\sup_{0 \leqq t \leqq T} |x_t - x - \int_0^t b(x_u)\, du| \geqq l \right) \leqq 2d \exp\left(\frac{-l^2}{AT} \right). \tag{2.9}$$

Donc, si $M \geqq \|b\|_{L_\infty}$, on a:

$$Q_x^b \left(\sup_{0 \leqq t \leqq T} |x_t - x| \geqq l \right) \leqq 2d \exp - \left\{ \frac{(l - MT)^{+2}}{AT} \right\}. \tag{2.10}$$

g' étant uniformément continue, on sait que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $l_\varepsilon > 0$ tel que si $d(y, z) < l_\varepsilon$, alors:

$$g'(y) \geqq g'(z) - \varepsilon. \tag{2.11}$$

Pour simplifier les notations, on écrit A et B au lieu de A_{i+1} et B_i.
On a:

$$E_x^b e^{-pD_B} g'(x_{D_B}) = E_x^b 1_{(D_B \leqq T)} e^{-pD_B} g'(x_{D_B}) + E_x^b 1_{(D_B > T)} e^{-pD_B} g'(x_{D_B}). \tag{2.12}$$

Si $k'>0$ majore $|g'|$, on a nécessairement:

$$E_x^b 1_{(D_B > T)} e^{-pD_B} g'(x_{D_B}) \geqq -k' e^{-pT} Q_x^b(D_B > T). \tag{2.13}$$

Soit A_T^ε l'événement:

$$A_T^\varepsilon = (\sup_{0 \leqq t \leqq T} |x_t - x| < l_\varepsilon). \tag{2.14}$$

Alors:

$$E_x^b 1_{(D_B \leqq T)} e^{-pD_B} g'(x_{D_B}) = E_x^b 1_{(D_B \leqq T)} (1_{A_T^\varepsilon} + 1_{{}^c A_T^\varepsilon}) e^{-pD_B} g'(x_{D_B}). \tag{2.15}$$

Or sur $(D_B \leqq T) \cap A_T^\varepsilon$ on a évidemment:

$$g'(x_{D_B}) \geqq g'(x) - \varepsilon. \tag{2.16}$$

Donc:

$$E_x^b 1_{(D_B \leqq T) \cap A_T^\varepsilon} e^{-pD_B} g'(x_{D_B}) \geqq (g'(x) - \varepsilon) E_x^b 1_{(D_B \leqq T) \cap A_T^\varepsilon} e^{-pD_B}. \tag{2.17}$$

Or on a:

$$E_x^b 1_{(D_B \leqq T) \cap A_T^\varepsilon} e^{-pD_B} = E_x^b 1_{(D_B \leqq T)} e^{-pD_B} - E_x^b 1_{(D_B \leqq T) \cap {}^c A_T^\varepsilon} e^{-pD_B} \tag{2.18}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} 1 - Q_x^b(D_B > T) &\geqq E_x^b 1_{(D_B \leqq T) \cap A_T^\varepsilon} e^{-pD_B} \\ &\geqq e^{-pT}(1 - Q_x^b(D_B > T)) - Q_x^b({}^c A_T^\varepsilon). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Si $\varepsilon \leqq k'$ et si $g'(x) \geqq \varepsilon$, on a grâce à (2.17) et (2.19):

$$\begin{aligned} &E_x^b 1_{(D_B \leqq T) \cap A_T^\varepsilon} e^{-pD_B} g'(x_{D_B}) \\ &\qquad \geqq e^{-pT}(g'(x) - \varepsilon) - 2k' e^{-pT} Q_x^b(D_B > T) - 2k' Q_x^b({}^c A_T^\varepsilon). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Si $\varepsilon \leqq k'$ et si $g'(x) < \varepsilon$, alors grâce à (2.17) et (2.19)

$$E_x^b 1_{(D_B \leqq T) \cap A_T^\varepsilon} e^{-pD_B} g'(x_{D_B}) \geqq g'(x) - \varepsilon. \tag{2.20'}$$

Dans les calculs qui suivent, on ne raisonnera que dans le cas où $g'(x) \geqq \varepsilon$, en utilisant (2.20), mais on vérifiera que le cas où $g'(x) < \varepsilon$ se traite de la même manière grâce à (2.20').

De plus:

$$E_x^b 1_{(D_B \leqq T) \cap {}^c A_T^\varepsilon} e^{-pD_B} g'(x_{D_B}) \geqq -k' Q_x^b({}^c A_T^\varepsilon). \tag{2.21}$$

De (2.12)−(2.13)−(2.20)−(2.21), on tire, pour $\varepsilon \leqq g'(x)$:

$$\begin{aligned} & E_x^b e^{-pD_B} g'(x_{D_B}) \\ & \quad \geqq e^{-pT}(g'(x)-\varepsilon) - 3k' e^{-pT} Q_x^b(D_B > T) - 3k' Q_x^b({}^c A_T^\varepsilon). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Or par la Proposition II.2, si $x \in A$, $g(x)$ majore le premier membre de (2.22). Donc:

$$Q_x^b(D_B > T) \geqq \frac{1}{3k'}(g'(x) - \varepsilon - e^{pT} g(x)) - e^{pT} Q_x^b({}^c A_T^\varepsilon). \tag{2.23}$$

Prenons alors $\varepsilon = \frac{\beta}{2} \wedge k'$. Alors $g' - \varepsilon - g \geqq \frac{\beta}{2}$. De plus, par (2.10), $Q_x^b({}^c A_T^\varepsilon)$ tend uniformément vers 0 quand T tend vers 0. On en déduit qu'il existe $T > 0$ et $c > 0$ et $\leqq 1$ tels que, uniformément en x dans A, on ait:

$$Q_x^b(D_B > T) \geqq c. \tag{2.24}$$

Alors, si $x \in A$, on a:

$$E_x^b e^{-pD_B} \leqq e^{-pT} Q_x^b(D_B > T) + (1 - Q_x^b(D_B > T)). \tag{2.25}$$

En posant $\alpha = c e^{-pT} + 1 - c$, la Proposition II.3. est bien démontrée. □

Remarque II.1. Si on suppose seulement $g < g'$, on aurait une majoration uniformément sur les compacts de A_{i+1}, ce qui est malheureusement insuffisant. □

De la Proposition II.3, on va déduire:

Proposition II.4. *La suite de fonctions continues* (f_i, f_i') *est uniformément bornée et converge uniformément en croissant vers le couple de fonctions continues p-excessives bornées* (f, f').

Preuve. Si C est un Borélien de $\mathbb{R}^d$, et h une fonction borélienne bornée, on pose:

$$Q^C h(x) = E_x^b e^{-pD_C} h(x_{D_C}). \tag{2.26}$$

Par (2.3), on a:

$$f_1 = Q^{A_1}(f_0' + g). \tag{2.27}$$

Or, on a:

$$Q^{A_1} g \leqq Q^{A_1} f_0 \leqq f_0. \tag{2.28}$$

De (2.27) et (2.28), on tire:

$$f_1 \leqq f_0 + Q^{A_1} f_0'. \tag{2.29}$$

De même, on aura:

$$f_1' \leqq f_0' + Q^{B_1} f_0. \tag{2.30}$$

On va montrer par récurrence les inégalités:

$$\begin{aligned} f_{2n} &\leqq f_{2n-1}+Q^{A_{2n}}\ Q^{B_{2n-1}}\dots Q^{B_1}f_0\\ f'_{2n} &\leqq f'_{2n-1}+Q^{B_{2n}}\ Q^{A_{2n-1}}\dots Q^{A_1}f'_0\\ f_{2n+1} &\leqq f_{2n}\quad +Q^{A_{2n+1}}Q^{B_{2n}}\quad \dots Q^{A_1}f'_0\\ f'_{2n+1} &\leqq f'_{2n}\quad +Q^{B_{2n+1}}Q^{A_{2n}}\quad \dots Q^{B_1}f_0. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Pour établir (2.31), on va simplement montrer comment on passe de l'indice $2n$ à l'indice $2n+1$, le passage de l'indice $2n-1$ à l'indice $2n$ étant identique.

De (2.31), on tire:

$$f'_{2n}+g\leqq f'_{2n-1}+g+Q^{B_{2n}}Q^{A_{2n-1}}\dots Q^{A_1}f'_0. \tag{2.32}$$

Or, par (2.3), on sait que:

$$f_{2n+1}=Q^{A_{2n+1}}(f'_{2n}+g). \tag{2.33}$$

Donc, par (2.32), on a:

$$f_{2n+1}\leqq Q^{A_{2n+1}}(f'_{2n-1}+g)+Q^{A_{2n+1}}Q^{B_{2n}}\dots Q^{A_1}f'_0. \tag{2.34}$$

Or, comme $f_{2n}\geqq f'_{2n-1}+g$, on a:

$$Q^{A_{2n+1}}(f'_{2n-1}+g)\leqq Q^{A_{2n+1}}f_{2n}\leqq f_{2n}. \tag{2.35}$$

De (2.34) et (2.35), on tire bien:

$$f_{2n+1}\leqq f_{2n}+Q^{A_{2n+1}}Q^{B_{2n}}\dots Q^{A_1}f'_0. \tag{2.36}$$

Il suffit alors de remarquer que grâce à la Proposition II.3, comme f_0 et f'_0 sont bornées, les fonctions $Q^{A_{2n}}Q^{B_{2n-1}}\dots Q^{B_1}f_0$, $Q^{B_{2n}}Q^{A_{2n-1}}\dots Q^{A_1}f'_0$, etc.... tendent uniformément vers 0, au moins aussi vite qu'une progression géométrique de raison $\leqq 1$. f_n-f_{n-1} et $f'_n-f'_{n-1}$ tendent donc vers 0, au moins aussi vite qu'une progression géométrique de raison $\leqq 1$.

Les suites de fonctions $f_0+\sum_{i=1}^{n}(f_i-f_{i-1})$ et $f'_0+\sum_{1}^{n}(f'_i-f'_{i-1})$ sont donc absolument convergentes.

(f_n, f'_n) converge bien uniformément vers (f, f') qui sont bornées, continues et p-excessives. □

Démonstration du Théorème II.1

Preuve. Soit $\tilde{f}$ la plus petite fonction p-excessive$\geqq f'+g$. Comme $f'+g\geqq f'_i+g$, on a nécessairement $\tilde{f}\geqq f_{i+1}$ et donc $\tilde{f}\geqq f$. Or $f\geqq f'+g$. Donc $f=\tilde{f}$. On démontrera de même que f' est la plus petite fonction p-excessive$\geqq f-g'$. □

Remarque II.2. Pour étendre les résultats précédents aux diffusions à sauts de Stroock, il faut essentiellement montrer une majoration du type (2.10). Nous continuons à adopter pour simplifier des solutions homogènes.

$M(x, dy)$ désigne une mesure σ-finie $\geqq 0$ sur $\mathbb{R}^d$ telle que pout tout

$$\Gamma \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d/\{0\}), \quad \int_\Gamma \frac{|y|^2 M(x, dy)}{1+|y|^2}$$

soit une fonction continue bornée.

P désigne le processus unique de générateur infinitésimal défini par:

$$\begin{aligned} Lf(x) &= \tfrac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} f_{x_i x_j}(x) + \sum_k b_k f_{x_k}(x) \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d} \left(f(x+y) - f(x) - \frac{\langle y, f_x(x) \rangle}{1+|y|^2} \right) M(x, dy) \end{aligned} \tag{2.37}$$

au sens de [14] (Théorème 4.3).

Il suffit de montrer que pour tout $l > 0$, si $T \to 0$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} P_x(\sup_{0 \leqq t \leqq T} |x_t - x| \geqq l) \to 0. \tag{2.38}$$

Soit $\tilde{P}_x$ la mesure image de P_x par l'application $x_t \to x_t - x$.

Alors, toutes les trajectoires des x_t partent de 0. Par application du théorème A1 de [14], on trouve alors que sur $D([0,1])$, les $\tilde{P}_x$ forment un ensemble étroitement relativement compact de mesures. Pour montrer (2.38), il suffit d'appliquer le critère (15.8) de [2]. □

Remarque II.3. G. Mokobodzki m'a fait remarquer que s'il existe $\tilde{f}$ et $\tilde{f}'$ p-excessives finies telles que $g \leqq \tilde{f} - \tilde{f}' \leqq y'$, alors l'itération converge dans tous les cas, sans aucune hypothèse sur les processus considérés — on peut considérer des processus droits très généraux. En effet on vérifie trivialement par récurrence que $f_i \leqq \tilde{f}$ et $f_i' \leqq \tilde{f}'$. Les limites f et f' seront p-excessives et vérifieront les conditions demandées, à l'exception de f la continuité. On vérifie alors immédiatement qu'on a les relations suivantes:

$$\begin{aligned} f &= \inf\{ f^* \ p\text{-excessive} \mid \exists f'^* \ p\text{-excessive};\ g \leqq f^* - f'^* \leqq g' \} \\ f' &= \inf\{ f'^* \ p\text{-excessive} \mid \exists f^* \ p\text{-excessive};\ g \leqq f^* - f'^* \leqq g' \}. \end{aligned} \tag{2.39}$$

On est ici trivialement dans ce cas. En effet soit V^q la résolvante de Q^b. En utilisant la continuité uniforme de g et la majoration (2.10), on vérifie que g est limite uniforme de la suite $qV^q g$ quand $q \to +\infty$. Soit q assez grand pour que $|g - qV^q g| < \beta/2$. Alors on a:

$$g \leqq q V^q \left(g + \frac{\beta}{2} \right) \leqq g + \beta.$$

De l'équation résolvante $V^q - V^p = (p-q) V^p V^q$, on déduit qu'il existe h continue bornée telle que $g \leqq V^p h \leqq g + \beta$. Comme $g + \beta \leqq g'$, l'hypothèse précédente est bien vérifiée.

Il est cependant fondamental de noter qu'ici, on a besoin de la convergence *uniforme* de la suite (f_i, f_i') pour obtenir la continuité des fonctions limites. Remarquons enfin que (2.39) n'est pas équivalent à (1.4) (au moins en général). (2.39) est précisé par le Théorème III.2.

On étend les résultats précédents dans [4]. □

III. Unicité de la solution du système (1.4)

Soit (f,f') une solution du système (1.4).
On pose:

$$q=f-f'. \tag{3.1}$$

Nécessairement:

$$g\leqq q\leqq g'. \tag{3.2}$$

Soient A et B les ensembles

$$\begin{aligned} A&=(q=g)\\ B&=(q=g'). \end{aligned} \tag{3.3}$$

q étant continue, A et B sont fermés. (2.1) montre que A et B sont disjoints.
A' et B' sont les supports fins des fonctionnelles additives continues engendrant f et f'. On a $A'\subset A$ et $B'\subset B$ par la Proposition II.5 de [3].

Théorème III.1. *Pour tout x de $\mathbb{R}^d$, on a;*

$$\begin{aligned} q(x)&=\inf_{T'}\sup_{T} E_x^b e^{-p(T\wedge T')}(1_{(T\leqq T')}g(x_T)+1_{(T'<T)}g'(x_T))\\ &=\sup_{T}\inf_{T'} E_x^b e^{-p(T\wedge T')}(1_{(T\leqq T')}g(x_T)+1_{(T'<T)}g'(x_{T'})). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Preuve. On a par la Proposition II.2 de [3]:

$$f(x)=E_x^b e^{-pD_A}f(x_{D_A}), \tag{3.5}$$

$$f'(x)=E_x^b e^{-pD_B}f'(x_{D_B}). \tag{3.6}$$

On va montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^d$, (D_A, D_B) est une solution du jeu:

$$\min_{T'}\max_{T} E_x^b e^{-p(T\wedge T')}(1_{(T\leqq T')}g(x_T)+1_{(T'<T)}g'(x_{T'})). \tag{3.7}$$

On a nécessairement, par (3.3), (3.5), (3.6):

$$q(x)=E_x^b e^{-p(D_A\wedge D_B)}(1_{(D_A\leqq D_B)}g(x_{D_A})+1_{(D_B<D_A)}g'(x_{D_B})). \tag{3.8}$$

Soit T un temps d'arrêt. Sur $(T<+\infty)$, on a:

$$g(x_T)\leqq q(x_T). \tag{3.9}$$

De plus, sur $(D_B<+\infty)$, on a:

$$g'(x_{D_B})=q(x_{D_B}). \tag{3.10}$$

Donc:

$$E_x^b e^{-p(T\wedge D_B)}(1_{(T\leqq D_B)}g(x_T)+1_{(D_B<T)}g'(x_{D_B}))\leqq E_x^b e^{-p(T\wedge D_B)}q(x_{T\wedge D_B}). \tag{3.11}$$

Or, nécessairement:

$$f(x) \geqq E_x^b e^{-p(T \wedge D_B)} f(x_{T \wedge D_B}). \tag{3.12}$$

De plus par (3.6), on a:

$$f'(x) \geqq E_x^b e^{-p(T \wedge D_B)} f'(x_{T \wedge D_B}) \geqq E_x^b e^{-pD_B} f'(x_{D_B}) = f'(x) \tag{3.13}$$

et donc:

$$f'(x) = E_x^b e^{-p(T \wedge D_B)} f'(x_{T \wedge D_B}). \tag{3.14}$$

De (3.11), (3.12), (3.14), on tire:

$$E_x^b e^{-p(T \wedge D_B)} (1_{(T \leqq D_B)} g(x_T) + 1_{(D_B < T)} g'(x_{D_B})) \leqq q(x). \tag{3.15}$$

De même, on aura pour tout T':

$$q(x) \leqq E_x^b e^{-p(D_A \wedge T')} (1_{(D_A \leqq T')} g(x_{D_A}) + 1_{(T' < D_A)} g'(x_{T'})). \tag{3.16}$$

Par (3.8), (3.15) et (3.16), on voit que le jeu associé au critère (3.7) a une valeur égale à $q(x)$. $q(x)$ est bien donné par (3.4). □

On en déduit:

Théorème III.2. *Le système* (1.4) *a une seule solution.*

Preuve. Soit (f, f') et (f_1, f_1') deux solutions de (1.4). Alors, par le Théorème III.1:

$$f - f' = f_1 - f_1'. \tag{3.17}$$

A et B sont alors déterminés de manière unique par (3.3).

On a:

$$\begin{aligned} f - f_1 &= Q^A(f' - f_1') \\ f' - f_1' &= Q^B(f - f_1). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Donc:

$$f - f_1 = Q^A Q^B (f - f_1) \tag{3.19}$$

et

$$(f - f_1) = Q^A Q^B \dots Q^A Q^B (f - f_1). \tag{3.20}$$

En raisonnant comme dans les Propositions II.2, II.3 et II.4, on vérifie que le deuxième membre de (3.20) tend vers 0 suivant une progression géométrique et donc que $f - f_1 = 0$. $f' - f_1'$ est donc aussi égal à 0. □

q, f, f', A, A', B, B' sont bien déterminés de manière unique.

On va donner un résultat non trivial permettant de caractériser la fonction $f + f'$.

On pose la définition suivante:

Définition III.1. Soit λ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$. Si μ est une mesure bornée sur $\mathbb{R}^d$ (non nécessairement $\geqq 0$), on écrit $\lambda < \mu$ si pour toute fonction p-excessive bornée $\tilde{f}$, on a: $\langle \mu, \tilde{f} \rangle \leqq \langle \lambda, \tilde{f} \rangle$. □

On a alors le résultat suivant:

Théorème III.3. *Pour tout x de $\mathbb{R}^d$, on a:*

$$\begin{aligned} f(x)+f'(x) &= \inf_{\substack{\tilde{f} \text{ et } \tilde{f}' \ p\text{-excessives bornées} \\ g \leqq \tilde{f} - \tilde{f}' \leqq g'}} \tilde{f}(x)+\tilde{f}'(x) \\ &= \sup_{\substack{\tilde{\mu},\, \tilde{\mu}' \geqq 0 \text{ bornées} \\ \varepsilon_x < \tilde{\mu} - \tilde{\mu}' \\ \varepsilon_x < \tilde{\mu}' - \tilde{\mu}}} \langle \tilde{\mu}, g \rangle - \langle \tilde{\mu}', g' \rangle. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Le sup *est effectivement atteint par les mesures μ et μ' définies par:*

$$\begin{aligned} \langle \mu, h \rangle &= [(Q^A + Q^B Q^A + Q^A Q^B Q^A + \cdots) h](x) \\ \langle \mu', h \rangle &= [(Q^B + Q^A Q^B + Q^B Q^A Q^B + \cdots) h](x) \end{aligned} \tag{3.22}$$

et on a:

$$\begin{aligned} f(x) &= \langle \mu - \mu', f \rangle \\ f'(x) &= \langle \mu' - \mu, f' \rangle \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned} &\langle \mu, f - f' - g \rangle = 0 \\ &\langle \mu', g' - f + f' \rangle = 0. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Preuve. Soit $\tilde{f}$ et $\tilde{f}'$ p-excessives bornées telles que:

$$g \leqq \tilde{f} - \tilde{f}' \leqq g'. \tag{3.25}$$

Alors si $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\mu}'$ vérifient les conditions de l'énoncé, on a:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &\geqq \langle \tilde{\mu} - \tilde{\mu}', \tilde{f} \rangle \\ \tilde{f}'(x) &\geqq \langle \tilde{\mu}' - \tilde{\mu}, \tilde{f}' \rangle. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Donc de (3.25) et (3.26), on tire:

$$\tilde{f}(x) + \tilde{f}'(x) \geqq \langle \tilde{\mu} - \tilde{\mu}', \tilde{f} - \tilde{f}' \rangle \geqq \langle \tilde{\mu}, g \rangle - \langle \tilde{\mu}', g' \rangle. \tag{3.27}$$

On va alors démontrer que (f, f') et (μ, μ') vérifient les conditions demandées et réalisent l'égalité dans (3.27). Remarquons tout d'abord que la Proposition II.3 garantit la convergence étroite des séries définissant μ et μ'.

De plus on a:

$$\langle \mu, \tilde{f} \rangle = Q^A \tilde{f}(x) + \langle \mu', Q^A \tilde{f} \rangle. \tag{3.28}$$

Donc:

$$\langle \mu - \mu', \tilde{f} \rangle = Q^A \tilde{f}(x) + \langle \mu', Q^A \tilde{f} - \tilde{f} \rangle. \tag{3.29}$$

Si $\tilde{f}$ est p-excessive bornée, on a également:

$$Q^A \tilde{f} \leqq \tilde{f}. \tag{3.30}$$

Donc, on a bien:

$$\langle \mu - \mu', \tilde{f} \rangle \leqq \tilde{f}. \tag{3.31}$$

De plus, comme $f = Q^A f$, on a aussi:

$$\langle \mu - \mu', f \rangle = f(x). \tag{3.32}$$

On vérifiera les propriétés correspondantes pour f'. Enfin μ est portée A et μ' est portée par B. On a donc bien réalisé l'égalité dans (3.27) pour (f, f') et (μ, μ'). □

On peut également caractériser directement les fonctions f et f'. On a en effet:

Théorème III.4. *Pour tout x de $\mathbb{R}^d$, on a:*

$$f(x) = \sup_{\substack{\tilde{\mu}, \tilde{\mu}' \geqq 0 \text{ bornées} \\ \varepsilon_x < \tilde{\mu} - \tilde{\mu}' < 0}} \langle \tilde{\mu}, g \rangle - \langle \tilde{\mu}', g' \rangle \tag{3.33}$$

(*resp.*

$$f'(x) = \sup_{\substack{\tilde{\mu}, \tilde{\mu}' \geqq 0 \text{ bornées} \\ \varepsilon_x < \tilde{\mu}' - \tilde{\mu} < 0}} \langle \tilde{\mu}, g \rangle - \langle \tilde{\mu}', g' \rangle). \tag{3.34}$$

Le sup dans (3.33) (*resp. dans* (3.34)) *est réalisé par les mesures:*

$$\begin{aligned} \mu &= Q_x^A + Q^A Q^B Q_x^A + \cdots \\ \mu' &= Q^A Q_x^B + Q^A Q^B Q^A Q_x^B + \cdots \end{aligned} \tag{3.35}$$

(*resp.*

$$\begin{aligned} \mu &= Q^B Q_x^A + Q^B Q^A Q^B Q_x^A + \cdots \\ \mu' &= Q_x^B + Q^B Q^A Q_x^B + \cdots). \end{aligned} \tag{3.36}$$

Preuve. Soient $\tilde{f}$ et $\tilde{f}'$ des fonctions p-excessives bornées vérifiant (3.25).

On a alors:

$$\begin{aligned} \tilde{f} &\geqq \langle \tilde{\mu} - \tilde{\mu}', \tilde{f} \rangle \geqq \langle \tilde{\mu}, g \rangle - \langle \tilde{\mu}', g' \rangle + \langle \tilde{\mu} - \tilde{\mu}', \tilde{f}' \rangle \\ &\geqq \langle \tilde{\mu}, g \rangle - \langle \tilde{\mu}', g' \rangle. \end{aligned} \tag{3.37}$$

On va montrer que (f, f') et (μ, μ') réalisent l'égalité dans (3.37). On a encore les relations (3.28)–(3.31).

De plus, on a trivialement, pour toute fonction $\tilde{f}$ p-excessive:

$$\langle \mu - \mu', \tilde{f} \rangle = \langle \mu, \tilde{f} - Q^B \tilde{f} \rangle \geqq 0 \tag{3.38}$$

μ est portée par A, μ' par B. Enfin, comme $Q^B f' = f'$, l'égalité est bien réalisée dans (3.37). On raisonnera de même pour (3.34). □

IV. Caractérisation de certaines solutions du jeu

On a les résultats suivants qui permettent de caractériser certaines solutions du jeu.

On pose tout d'abord la définition suivante:

Définition IV.1. On dit qu'un temps d'arrêt T est porté par un borélien C si sur $(T<+\infty)$, $x_T \in C$ p.s. □

On a alors:

Théorème IV.1. *Pour que des temps d'arrêts* (T, T') *soient solution du jeu* (1.3), *il suffit que:*

T soit porté par A et T' par B.
$T \leqq D_{A'}$,
$T' \leqq D_{B'}$.

Preuve. Les calculs sont les mêmes que pour le Théorème III.1. □

On a une réciproque partielle:

Théorème IV.2. *Si* (T, T') *est une solution du jeu* (1.3), *alors:*

a) *Sur* $(T \leqq D_{B'})$, *T est porté par A*; $T \wedge D_{B'} \leqq D_{A'}$.

b) *Sur* $(T' < D_{A'})$, *T' est porté par B*; $T' \wedge D_{A'} \leqq D_{B'}$.

Preuve. Si $F(T, T')$ est défini par:

$$F(T, T') = E_\lambda^b\, e^{-p(T \wedge T')}(1_{(T \leqq T')} g(x_T) + 1_{(T' < T)} g'(x_{T'})) \tag{4.1}$$

on a, si (T, T') est solution du jeu:

$$F(D_{A'}, T') \leqq F(T, T') \leqq F(T, D_{B'}). \tag{4.2}$$

Or on a, par le Théorème IV.1:

$$F(T, D_{B'}) \leqq F(D_{A'}, D_{B'}) \leqq F(D_{A'}, T'). \tag{4.3}$$

De (4.2) et (4.3), on tire:

$$F(D_{A'}, D_{B'}) = F(D_{A'}, T') = F(T, D_{B'}). \tag{4.4}$$

Or on a:

$$\begin{aligned} F(T, D_{B'}) &= E_\lambda^b\, e^{-p(T \wedge D_{B'})}(1_{(T \leqq D_{B'})} g(x_T) + 1_{(D_{B'} < T)} g'(x_{D_{B'}})) \\ &\leqq E_\lambda^b\, e^{-p(T \wedge D_{B'})} q(x_{T \wedge D_{B'}}). \end{aligned} \tag{4.5}$$

De plus:

$$E_\lambda^b\, e^{-p(T \wedge D_{B'})} f'(x_{T \wedge D_{B'}}) = \langle \lambda, f' \rangle, \tag{4.6}$$

$$E_\lambda^b\, e^{-p(T \wedge D_{B'})} f(x_{T \wedge D_{B'}}) \leqq \langle \lambda, f \rangle. \tag{4.7}$$

Donc:

$$E_\lambda^b e^{-p(T\wedge D_{B'})} q(x_{T\wedge D_{B'}}) \leqq \langle \lambda, q\rangle = F(D_{A'}, D_{B'}). \tag{4.8}$$

Pour qu'on ait (4.4), il faut qu'on ait égalité dans (4.5) et (4.7), ce qui implique la partie a) du Théorème.

On démontrera la deuxième partie du Théorème IV.2 de la même manière. □

Remarque IV.1. Il est essentiel de remarquer que les conditions du Théorème IV.1 ne sont (hélas!) pas nécessaires.

Supposons en effet qu'il existe x_0 tel que pour tout y de $\mathbb{R}^d$,

$$T' = +\infty g^+(y) \leqq g(x_0).$$

Alors, si $\lambda = \varepsilon_{x_0}$, si $T=0$ et si $T' = +\infty$, (T, T') est une solution de jeu.

En effet:

$$F(T, T') = g(x_0). \tag{4.10}$$

Donc, pour tout $\tilde{T}'$:

$$F(T, T') = F(T, \tilde{T}'). \tag{4.11}$$

Enfin, grâce à (4.9), pour tout $\tilde{T}$:

$$F(\tilde{T}, T') \leqq F(T, T'). \tag{4.12}$$

On a cependant:

Théorème IV.3. *Soit α, β deux (presque) boréliens de $\mathbb{R}^d$. Pour que pour tout ε_x de $\mathbb{R}^d$, (D_α, D_β) soit solution du jeu (1.3), il faut et il suffit que si $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ désignent les adhérences fines de α et β, on ait: $A' \subset \bar{\alpha} \subset A$, $B' \subset \bar{\beta} \subset B$.*

Preuve. Les conditions sont suffisantes grâce au Théorème IV.1. Montrons qu'elles sont nécessaires.

Soit $x \in \alpha$. Alors, comme $D_\alpha = 0$, pour $\lambda = \varepsilon_x$, on a:

$$F(D_\alpha, D_\beta) = g(x). \tag{4.13}$$

Donc $q(x) = g(x)$ et $x \in A$. Alors $\alpha \subset A$ et à fortiori $\bar{\alpha} \subset A$. Si $x \in A'$, $D_{A'} = 0$. Comme $D_{B'} > 0$, – car A et B sont disjoints – le Théorème IV.2 montre que $D_\alpha = 0$ et $x \in \bar{\alpha}$. Donc $A' \subset \bar{\alpha}$. On aura le résultat correspondant pour β. □

V. Le cas ou g est s.c.s. et ou g' est s.c.i.

On va étendre les résultats précédents au cas où g est s.c.s. et où g' est s.c.i. On raisonne encore sur les diffusions ou les diffusions à sauts.

On remplace le système (1.4) par la recherche de (f,f') telles que:

f et f' sont bornées, s.c.s. et fortement p-surmédianes

$$f = \inf_{\substack{\tilde{f} \text{ fortement } p\text{-surmédiane} \\ \tilde{f} \geqq f' + g}} \tilde{f} \tag{5.1}$$

$$f' = \inf_{\substack{\tilde{f} \text{ fortement } p\text{-surmédiane} \\ \tilde{f}' \geqq f - g'}} \tilde{f}'$$

g et g' sont des fonctions bornées telles que:

a) ou bien g est uniformément continue et g' est s.c.i.
ou bien g' est uniformément continue et g est s.c.s.

b) Il existe $\beta > 0$ tel que:

$$g + \beta \leqq g'. \tag{5.2}$$

Théorème V.1. *Le système* (5.1) *a une solution unique.*

Preuve. On supposera que g' est uniformément continue et que g est s.c.s. g^+ étant s.c.s. bornée, par le Théorème III.1 de [3], on peut trouver f_0 fortement p-surmédiane bornée s.c.s. qui est la plus petite fonction fortement p-surmédiane $\geqq g$.

$(-g')^+$ étant s.c.s. (en fait $-g'$ est continue), on construira f_0' pour $-g'$ de la même manière.

La construction faite au Théorème II.1 peut se poursuivre par récurrence.

Les Propositions II.1, II.2, II.3, restent vraies. Par contre, pour résoudre le problème pour des processus de Hunt généraux, ou dans le cadre de la théorie générale des processus (comme dans [8] pour l'arrêt optimal), on devra encore faire des hypothèses supplémentaires, en général difficiles à vérifier.

Proposition V.1. *La suite de fonctions s.c.s.* (f_i, f_i') *est uniformément bornée et converge uniformément en croissant vers un couple de fonctions s.c.s. bornées et fortement p-surmédianes* (f,f').

Preuve. La preuve est identique à la preuve de la Proposition II.4. Une limite uniforme de fonctions s.c.s. étant s.c.s., la Proposition V.1 est bien démontrée. □

Pour montrer l'existence d'une solution pour (5.1), il reste à effectuer le passage à la limite.

Soit $\tilde{f}$ la plus petite fonction fortement p-surmédiane $\geqq f' + g$.

Comme $f' + g \geqq f_i' + g$, nécessairement $\tilde{f} \geqq f_{i+1}$, et donc $\tilde{f} \geqq f$. Or, $f \geqq f' + g$. Donc $f = \tilde{f}$. On a le résultat correspondant pour f'. □

Pour montrer l'unicité de la solution de (5.1), on pose:

$$\begin{aligned} q &= f - f' \\ A &= (q = g) \\ B &= (q = g'). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Par les résultats de [3] III.3, A et B sont des ensembles fermés. De plus, A et B sont disjoints.

Soit $\tilde{f}$ et $\tilde{f'}$ les régularisées p-excessives de f et f'.

Par le résultat de [3]-III, on a:

$$\begin{aligned} f &= \tilde{f} \vee (f' + g) \\ f' &= \tilde{f'} \vee (f - g'). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Soit A_1 et B_1 les ensembles:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\tilde{f} < f\} \\ B_1 &= \{\tilde{f'} < f'\}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

A_2 et B_2 sont les supports fins des parties continues des fonctionnelles additives gauches engendrant f et f'.
On pose:

$$\begin{aligned} A' &= A_1 \cup A_2 \\ B' &= B_1 \cup B_2. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Alors, on a par [3], III.4:

$$\begin{aligned} A' &\subset A \\ B' &\subset B. \end{aligned} \tag{5.7}$$

L'unicité de la solution du système (5.1) se démontre alors comme dans la partie III. □

Caractérisation de certaines solutions du jeu

Les résultats de la partie IV sont immédiatement transposables.

VI. Un jeu contraint

On va admettre ici que la fonction g peut prendre la valeur $-\infty$ et la fonction g' la valeur $+\infty$, ce qui revient à exclure ces points des supports respectifs de T et T' dans les jeux précédents.

A et B sont deux fermés disjoints de $\mathbb{R}^d$ tels que $d(A,B)>0$. g est une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}^d$.

On écrit qu'un temps d'arrêt T est tel que $T\downarrow A$ si sur $(T<+\infty)$, $x_T \in A$ p.s. On va résoudre le jeu

$$\max_{T\downarrow A}\ \min_{T'\downarrow B} E_\lambda^b\, e^{-p(T\wedge T')} g(x_{T\wedge T'}). \tag{6.1}$$

On raisonne encore sur les diffusions ou les diffusions à sauts. On considère le système relatif à deux fonctions (f,f'):

f et f' sont bornées et fortement p-surmédianes

$$f = \inf_{\substack{\tilde{f} \text{ fortement } p\text{-surmédiane} \\ \tilde{f} \geqq 1_A(f'+g)}} \tilde{f} \tag{6.2}$$

$$f' = \inf_{\substack{\tilde{f}' \text{ fortement } p\text{-surmédiane} \\ \tilde{f}' \geqq 1_B(f-g')}} \tilde{f}'.$$

On a alors:

Théorème VI.1. (6.2) *a une solution* (f, f') *unique.* f (resp. f') *est continue, sauf peut-être sur une ensemble semi-polaire inclus dans* A (resp. B).

Preuve. La fonction $1_A g^+$ est s.c.s.

Par le Théorème III.2 de [3], on peut trouver f_0 qui est la plus petite fonction fortement p-surmédiane $\geqq 1_A g$ et f_0 est s.c.s.

De plus, par les résultats de [3], III, f_0 coincide avec sa régularisée p-excessive $\tilde{f}_0$ là où $\tilde{f}_0 \geqq 1_A g$. Donc $f_0 = \tilde{f}_0$ sur ${}^cA$ et f_0 est continue sur ${}^cA$. En particulier, $1_B(f_0 - g)^+$ est s.c.s.

$1_B g^-$ est s.c.s. f'_0 est la plus petite fonction fortement p-surmédiane $\geqq -1_B g$. f'_0 est alors s.c.s.

Par récurrence, étant donné f_i et f'_i fortement p-surmédianes bornées et respectivement continues sur ${}^cA$ et sur ${}^cB$, on définit f_{i+1} et f'_{i+1} par:

$$f_{i+1} = \inf_{\substack{\tilde{f} \text{ fortement } p\text{-surmédiane} \\ \tilde{f} \geqq 1_A(f'_i+g)}} \tilde{f}, \tag{6.3}$$

$$f'_{i+1} = \inf_{\substack{\tilde{f}' \text{ fortement } p\text{-surmédiane} \\ \tilde{f}' \geqq 1_B(f_i-g')}} \tilde{f}'. \tag{6.4}$$

Alors f_{i+1} et f'_{i+1} sont encore bornées, continues respectivement sur ${}^cA$ et sur ${}^cB$, puisque $1_A(f'_i+g)^+$ et $1_B(f_i-g')^+$ sont s.c.s.

Proposition VI.1. *La suite* (f_i, f'_i) *est croissante.*

Preuve. Même démonstration que pour la Proposition II.1.

Proposition VI.2. *La fonction* $E^b_x e^{-pD_B}$ *est uniformément bornée par* $b<1$ *quand* $x \in A$.

La fonction $E^b_x e^{-pD_A}$ *est uniformément bornée par* b' *quand* $x \in B$.

Preuve. On sait que $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} Q^b_x(\sup_{0 \leqq t \leqq T} |x_t - x| \geqq d(A,B))$ tend vers 0 quand de $T \to 0$, par le Théorème de compacité de Stroock A1 dans [14] et (15.8) dans [2], ou plus simplement pour les diffusions par la majoration (2.10).

Pour T suffisamment petit, on en déduit qu'il existe $c>0$ et $\leqq 1$ tel que pour tout x de A:

$$Q^b_x(D^B > T) \geqq c. \tag{6.5}$$

Alors, si $x \in A$, on a:

$$E_x^b e^{-pD_B} \leqq Q_x^b(D_B > T)\, e^{-pT} + 1 - Q_x^b(D_B > T). \tag{6.6}$$

En posant $b = ce^{-pT} + 1 - c$, la Proposition est démontrée. On raisonnera de même pour $E_x^b e^{-p D_A}$. □

Proposition VI.3. *La suite (f_i, f_i') converge en croissant et uniformément vers un couple de fonctions (f, f') qui sont fortement p-surmédianes, s.c.s. et bornées, continues respectivement sur ${}^cA$ et ${}^cB$.*

Preuve. Par récurrence, il vient, comme en (2.31):

$$\begin{aligned} f_{2n} &\leqq f_{2n-1} + Q^A Q^B \dots Q^B f_0 \\ f'_{2n} &\leqq f'_{2n-1} + Q^B Q^A \dots Q^A f'_0 \\ f_{2n+1} &\leqq f_{2n} \quad + Q^A Q^B \dots Q^A f'_0 \\ f'_{2n+1} &\leqq f'_{2n} \quad + Q^B Q^A \dots Q^B f_0. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Par la Proposition VI.1, les suites de fonctions $Q^A Q^B \dots Q^B f_0$, $Q^B Q^A \dots Q^A f'_0$ etc.... tendent vers 0 plus vite qu'une progression géométrique de raison uniformément < 1.

Les suites de fonctions $f_0 + \sum_{i=1}^{n} (f_i - f_{i-1})$, et $f'_0 + \sum_{i=1}^{n} (f'_i - f'_{i-1})$ sont donc absolument convergentes. (f_n, f'_n) tend donc uniformément vers (f, f') qui est un couple de fonctions fortement p-surmédianes, s.c.s. et bornées, continues respectivement sur ${}^cA$ et ${}^cB$.

On démontre alors le Théorème VI.1 comme le Théorème II.1.

Unicité des solutions de (6.2). Soit f et f' fortement p-surmédianes bornées solutions de (1.2). Alors nécessairement:

$$f(x) = E_x^b e^{-p D_A} f(x_{D_A}), \tag{6.8}$$

$$f'(x) = E_x^b e^{-p D_B} f'(x_{D_B}). \tag{6.9}$$

Par le lemme 2 de [11] (p. 275) – qui s'étend également aux diffusions à sauts – on sait alors que:

f et f' sont respectivement continues sur ${}^cA$ et sur ${}^cB$.

Les fonctions $1_A(f' + g)^+$ et $1_B(f - g)^+$ sont donc s.c.s. et on peut appliquer les résultats de [3], III.

f et f' sont alors s.c.s. et fortement p-surmédianes régulières.

Soit $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ les fonctionnelles additives gauches engendrant f et f', $\tilde{A}^*$ et $\tilde{B}^*$ leurs parties continues.

Soit $\bar{f}$ et $\bar{f}'$ les régularisées p-excessives de f et f'.

Par les résultats de [3], III, on a:

$$f = \bar{f} \vee 1_A(f' + g), \tag{6.10}$$

$$f' = \bar{f}' \vee 1_B(f - g). \tag{6.11}$$

On pose:

$$\begin{aligned} q &= f - f' \\ A_1 &= (q = g) \cap A \\ B_1 &= (q = g') \cap B \\ A_2 &= (\bar{f} < f) \\ B_2 &= (\bar{f}' < f'). \end{aligned} \tag{6.12}$$

A_3 est le support fin de $\tilde{A}^*$, B_3 le support fin de $\tilde{B}^*$. Alors $A_2 \cup A_3 \subset A_1$ et $B_2 \cup B_3 \subset B_1$.

On pose enfin:

$$\begin{aligned} A_4 &= A_2 \cup A_3 \\ B_4 &= B_2 \cup B_3. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Par [3] III.3, A_1 et B_1 sont des ensembles fermés.

On a de plus:

$$\begin{aligned} A_4 &\subset A_1 \subset A \\ B_4 &\subset B_1 \subset B. \end{aligned} \tag{6.14}$$

On montre alors l'unicité des solutions de (6.2) comme en III, en prouvant que (D_{A}, D_{B_1}) est une solution du jeu, donc que $q = f - f'$ est la valeur du jeu, et en raisonnant ensuite comme en III.

Caractérisation de certaines solutions du jeu

Soit λ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$. On va caractériser certaines solutions du jeu (6.1). On a par analogie avec les Théorèmes IV.1, IV.2 et IV.3.:

Théorème VI.2. *Pour que des temps d'arrêt éventuellement randomisés soient solution du jeu* (6.1), *il suffit que:*

a) $T \downarrow A_1$ et $T' \downarrow B_1$,
b) $T \leqq D_{A_4}$ et $T' \leqq D_{B_4}$.

Théorème VI.3. *Si* (T, T') *est une solution du jeu, alors:*

a) *Sur* $(T \leqq D_{B_4})$, $T \downarrow A_1$; $T \wedge D_{B_4} \leqq D_{A_4}$.
b) *Sur* $(T' < D_{A_4})$, $T \downarrow B_1$; $T' \wedge D_{A_4} \leqq D_{B_4}$.

Théorème VI.4. *Soit* (α, β) *deux boréliens de* $\mathbb{R}^d$ *tels que* $\alpha \subset A$, $\beta \subset B$. *Pour que, pour tout* x *de* $\mathbb{R}^d$, (D_α, D_β) *soit solution du jeu* (6.1), *il faut et il suffit que si* $\bar{\alpha}$ *et* $\bar{\beta}$ *désignent les adhérences fines de* α *et* β, *on ait:*

$$\begin{aligned} A_4 &\subset \bar{\alpha} \subset A_1 \\ B_4 &\subset \bar{\beta} \subset B_1. \end{aligned} \tag{6.15}$$

VII. Quelques résultats de continuité

On va maintenant étudier comment varient les solutions des systèmes (1.4) et (6.2) quand les paramètres varient.

On se place ici dans le cas des diffusions de Stroock et Varadhan [13], mais les résultats de compacité de Stroock (Théorème A1 de [14]) permettent d'étendre les résultats aux diffusions à sauts quand on fait varier certains paramètres comme en [5].

Les résultats obtenus ici sont essentiels pour l'étude de certains jeux (voir [6]).

Q^b désigne donc ici la diffusion de Stroock et Varadhan [13] de dérive b.

1) Dépendance fonctionnelle pour le système (1.4)

Théorème VII.1. *Soit* $\{b^n\}_{n\in N}$ *une suite d'éléments de* $L_\infty(\mathbb{R}^d)$ *convergeant vers* $b\in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ *pour la topologie* $\sigma(L_\infty(\mathbb{R}^d), L_1(\mathbb{R}^d))$. *Alors:*

si $\{g^n\}_{n\in N}$ *est une suite uniformément bornée de fonctions continues convergeant vers* g *uniformément sur les compacts de* $\mathbb{R}^d$;

si $\{g'^n\}$ *est une suite uniformément bornée de fonctions continues convergeant uniformément sur* $\mathbb{R}^d$ *vers une fonction uniformément continue* g',

s'il existe $\beta>0$ *tel que pour tout* n, $g^n+\beta\leqq g'^n$.

La solution (f^n, f'^n) *du système* (1.4) *relative à* (Q^{b_n}, g^n, g'^n) *est uniformément bornée et converge uniformément sur les compacts de* $\mathbb{R}^d$ *vers la solution* (f, f') *de* (1.4) *relative à* (Q^b, g, g').

Preuve. Les fonctions $\{g'^n\}_{n\in N}$ ont nécessairement un module uniforme de continuité sur tout $\mathbb{R}^d$.

De plus, les $\{b^n\}_{n\in N}$ sont uniformément bornées. La démonstration de la Proposition II.3 montre alors qu'on peut choisir le même $\alpha<1$ pour tout les n dans l'énoncé de la Proposition II.3.

La démonstration de la Proposition II.4 montre alors que la suite $(f_i^n, f_i'^n)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^d$ vers (f^n, f'^n) quand $i\to+\infty$, et cela uniformément en n, et que la suite (f^n, f'^n) est uniformément bornée.

Pour démontrer que $(f^n, f'^n)\to(f, f')$ sur les compacts de $\mathbb{R}^d$, il suffit donc de démontrer que pour tout i, $(f_i^n, f_i'^n)\to(f_i, f_i')$ uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}^d$ quand $n\to+\infty$. On va donc établir le résultat par récurrence sur i.

La suite (f^n, f'^n) étant uniformément bornée, on est ramené à démontrer que si $\{h^n\}_{n\in N}$ est une suite de fonctions continues uniformément bornées convergeant uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}^d$ vers une fonction h, si q^n est la plus petite fonction $Q^{b_n}-p$-excessive$\geqq h^n$, alors q^n converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}^d$ vers q, qui est la plus petite fonction Q^b-p-excessive$\geqq h$.

Il suffit de démontrer que si $x_n\to x$, $q^n(x_n)\to q(x)$.

Pour démontrer ce résultat, on pose la définition suivante ([12] et [3]):

Définition VII.1. Soit λ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$. On dit que λ est antérieure à une mesure bornée $\mu\geqq 0$ pour Q^b, et on écrit $\lambda^b<\mu$ si pour toute fonction Q^b p-excessive f, on a:

$\langle\mu, f\rangle\leqq\langle\lambda, f\rangle$. □

Soit A le fermé $(q=h)$. Alors si $x \in A$ on a $h(x)=\lim h^n(x_n)$ et donc $h(x) \leqq \liminf q^n(x_n)$, ce qui implique

$$q(x) \leqq \liminf q^n(x_n). \tag{7.1}$$

En général on a par [3], Proposition II.2:

$$q(x)=E_x^b e^{-p D_A} h(x_{D_A}). \tag{7.2}$$

Posons:

$$\varphi_n(y)=E_y^{b^n} e^{-p D_A} h^n(x_{D_A}). \tag{7.3}$$

Pour y fixé, $E_y^{b^n} e^{-p D_A} 1_{(D_A \leqq T)} h^n(x_{D_A})$ converge vers $\varphi_n(y)$ quand $T \to +\infty$, et cela uniformément en n. De plus, si $Z_T^{b^n}$ est la densité de $Q_y^{b^n}$ par rapport à Q_y^0 sur la σ-algèbre $\mathscr{B}(x_s | 0 \leqq s \leqq T)$, par le Théorème IV.3 de [7], $Z_T^{b^n}$ converge faiblement vers Z_T^b. On en déduit par un raisonnement classique que $E_y^{b^n} e^{-p D_A} 1_{(D_A \leqq T)} h^n(x_{D_A})$ converge vers $E_y^b e^{-p D_A} 1_{(D_A \leqq T)} h(x_{D_A})$ et donc que $\varphi_n(y)$ converge vers $q(y)$.

De plus les $\{b^n\}_{n\in N}$ et les $\{h^n\}_{n \in N}$ restent uniformément bornées. Alors l'uniformité de la majoration (2.10) et la preuve du lemme 2, (p. 275) de [11] montre que sur toute boule fermée B de ${}^cA$ on a, en notant par V_n^m la résolvante de Q^{b^n}:

$$\sup_n \sup_{x \in B} |m V_n^m \varphi_n - \varphi_n| \to 0 \quad \text{quand } m \to +\infty. \tag{7.4}$$

Enfin le Théorème 7.1 de [13] montre que pour m fixé, en tout x de $\mathbb{R}^d$, les $V_n^m \varphi_n$ ont même module de continuité. On en déduit que les φ_n sont uniformément continus sur les compacts de ${}^cA$.

Donc si $x \in {}^cA$ $\varphi_n(x_n)$ converge vers $q(x)$. Or nécessairement:

$$q^n(x_n) \geqq \varphi_n(x_n). \tag{7.5}$$

On en déduit encore que si $x \in {}^cA$, alors on a:

$$q(x) \leqq \liminf q^n(x_n). \tag{7.6}$$

On peut étendre le raisonnement précédent aux diffusions à saut en utilisant [5], le Théorème A1 de [14] et les mêmes techniques qu'au Théorème 7.1 de [13] pour démontrer la continuité uniforme des potentiels V_n^m.

De plus, il existe μ_n' telle que $\varepsilon_{x_n} \overset{b^n}{<} \mu_n'$ et que:

$$q^n(x_n)=\langle \mu_n', h^n \rangle. \tag{7.7}$$

Par les Théorèmes IV.1 et IV.2 de [3], on peut trouver une sous-suite μ_{n_k}' convergeant étroitement vers μ' et $\varepsilon_x \overset{b}{<} \mu'$.

Alors:

$$\langle \mu', h \rangle = \lim \langle \mu_{n_k}', h^{n_k} \rangle. \tag{7.8}$$

Or:

$$q(x) \geqq \langle \mu', h \rangle. \tag{7.9}$$

En raisonnant sur toutes les sous-suites de N, on tire:

$$q(x) \geqq \limsup q^n(x_n). \tag{7.10}$$

Le Théorème résulte de (7.1), (7.6), (7.10). □

2) Dépendance fonctionnelle pour le système (6.2)

On suppose A et B fixés dans le système (6.2).

Théorème VII.2. *Si $\{b^n\}_{n \in N}$ est une suite d'éléments de $L_\infty(\mathbb{R}^d)$ convergeant vers $b \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ pour la topologie $\sigma(L_\infty(\mathbb{R}^d), L_1(\mathbb{R}^d))$, si $\{g^n\}_{n \in N}$ est une suite uniformément bornée de fonctions continues convergeant vers g uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}^d$, alors la suite (f^n, f'^n) de fonctions solutions de* (6.2) *pour (Q^{b^n}, g^n) est uniformément bornée et converge simplement vers la solution (f, f') de* (6.2) *pour (Q^b, g). De plus, f^n converge uniformément vers f sur les compacts de ${}^cA$, et f'^n converge uniformément vers f' sur les compacts de ${}^cB$.*

Preuve. En utilisant l'uniformité des majorations de la Proposition VI.2 quand $\{b^n\}_{n \in N}$ varie dans un ensemble bornée, on démontre le résultat de la même manière qu'au Théorème VII.1. □

VIII. Extensions

On peut étendre les résultats précédents dans le cadre de la Théorie Générale des Processus.

$(\Omega, \tilde{\mathscr{F}}, P)$ désigne en effet un espace de probabilité complet, muni d'une suite croissante et continue à droite $\{\tilde{\mathscr{F}}_t\}_{t \geqq 0}$ de sous-tribus complètes de $\tilde{\Gamma}$. X_t et X'_t sont des processus optionnels bornés définis pour $t \in [0, +\infty]$, cad sur $[0, +\infty[$, lag sur $]0, +\infty]$, et tels que leurs projections prévisibles ${}^3X_t$ et ${}^3X'_t$ sont respectivement égales à X_t^- et $X_t'^-$ pour $t \in]0, +\infty]$.

p désigne une constante > 0.

Si $\tilde{T}$ et $\tilde{T}'$ désignent des temps d'arrêt à valeurs dans $[0, +\infty]$, on considère le critère défini par:

$$F(\tilde{T}, \tilde{T}') = E e^{-p(T \wedge T')} (1_{T \leqq T'} X_T + 1_{T' < T} X_{T'}). \tag{8.1}$$

On cherche (T, T') à valeurs dans $[0, +\infty]$ tels que pour tout couple de temps d'arrêt $(\tilde{T}, \tilde{T}')$ à valeurs dans $[0, +\infty]$, on ait:

$$F(\tilde{T}, T') \leqq F(T, T') \leqq F(T, \tilde{T}'). \tag{8.2}$$

Soit $Y_t'^h$ la projection optionnelle de $\sup\limits_{0 \leqq s \leqq h} |X'_{t+s} - X'_t|$.

On fait alors les hypothèses suivantes:

a) $Y_t'^h \to 0$ uniformément quand $h \to 0$.

b) Il existe $\beta > 0$ tel que: $X + \beta \leqq X'$.

En utilisant les résultats de Bismut-Skalli dans [8], on peut alors étendre les résultats précédents à ce nouveau problème.

References

1. Bensoussan, A., Friedman, A.: Non linear variational inequalities and differential games with stopping times. J. Functional Analysis **16**, 305–352 (1974)
2. Billingsley, P.: Convergence of Probability Measures. New-York: Wiley 1968
3. Bismut, J.-M.: Dualité convexe, temps d'arrêt optimal et contrôle stochastique. [A paraître dans Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete]
4. Bismut, J.-M.: Temps d'arrêt optimal, quasi-temps d'arrêt, retournement du temps et jeux stochastiques. [A Paraître]
5. Bismut, J.-M.: Control of Jump processes and Applications. [A paraître dans Bull. Soc Math. France]
6. Bismut, J.-M.: Contrôle stochastique, jeux et temps d'arrêt. [A paraître dans Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete]
7. Bismut, J.-M.: Théorie Probabiliste du Contrôle des Diffusions. Memoir of Amer. Math. Vol. 4, n° 167, p. 1–130 (1976)
8. Bismut, J.-M., Skalli, B.: Temps d'arrêt optimal, Théorie Générale des Processus et Processus de Markov. [A paraître dans Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete]
9. Blumenthal, R.M., Getoor, R.K.: Markov Processes and Potential Theory. New York: Academic Press 1968
10. Dynkin, E.B., Yuschkevitch, A.A.: Theorems and Problems in Markov Processes. New York: Plenum Press 1969.
11. Meyer, P.A.: Exposé sur les diffusions à coefficients continus. Séminaire de Probabilités n°4. Lecture Notes in Math. **124**, 241–282. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970
12. Rost, H.: The stopping distribution of a Markov process. Invent. Math. **14**, 1–16 (1971)
13. Stroock, D.W., Varadhan, S.R.S.: Diffusion processes with continuous coefficients. Comm. Pure Appl. Math. **22**, 345–400, and 479–530 (1969)
14. Stroock, D.W.: Diffusion Processes associated with Levy Generators. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **32**, 209–244 (1975)

Received June 6, 1976: in revised form December 7, 1976