Hypoellipticité partielle à la frontière des opérateurs pseudo-différentiels de transmission (*).

MAURICE DE GOSSON (Nice)

Summary. — *The authors generalises to the pseudo-differential case known results on partial hypoellipticity up to the boundary, the uses a class of PDO's which behave « near the boundary » much like ordinary differential operators. His results are easily extended to systems with mixed degree in the sense of Agmon-Douglis-Nirenberg, which wasn't possible when using the classical methods.*

Je tiens à remercier M. Jacques CHAZARAIN, Professeur à l'Université de Nice, de m'avoir proposé ce sujet de thèse de 3^e cycle.

J'adresse, d'autre part, ma plus vive gratitude à M. Alain PIRIOU, Maître-Assistant à l'Université de Nice, qui m'a prodigué conseils et encouragements, avec patience et gentillesse, tout au long de ce travail.

Je le remercie aussi, ainsi que MM. Jacques CHAZARAIN, Bernard HELFFER, André HIRSCHOWITZ et Frédéric PHAM d'avoir accepté d'être membre du Jury de Thèse.

Ce travail est dédié à Charlyne, ma femme.

Notations.

1) L'élément générique de R^n sera noté $x = (x', x_n)$ avec $x' \in R^{n-1}$ et $x_n \in R$. De même, la variable duale ξ sera notée $\xi = (\xi', \xi_n)$.

2) R_+^n (resp. $\bar{R}_+^n$) désignera le demi-espace ouvert (resp. fermé) défini par $x_n > 0$ (resp. $x_n \geq 0$).

3) Pour toute distribution tempérée $u \in \mathcal{S}'(R^n)$, la transformée de Fourier de u sera notée $\hat{u}$, et la transformée de Fourier inverse (co-transformée) $\hat{u}^{-1}$. Dans ce cas, on a pour $u \in \mathcal{S}(R^n)$:

$$\hat{u}(\xi) = \int \exp[-ix\xi] u(x) dx$$

et:

$$\hat{u}^{-1}(x) = \int \exp[ix\xi] u(\xi) d\xi, \quad d\xi = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n d\xi.$$

(*) Entrata in Redazione il 23 ottobre 1978.

De même $\hat{\mathcal{F}}(u) = \hat{u}^{x_n \rightarrow \xi_n}$ désignera la transformée de Fourier de u par rapport à la variable x_n (transformation de Fourier partielle).

4) $C^\infty(\bar{R}_+, \mathcal{D}'(R^{n-1}))$ est l'espace des fonctions indéfiniment dérivables jusqu'au bord, à valeurs distributions tangentielles. Plus simplement, $C^\infty(\bar{R}_+^n)$ sera l'espace des fonctions C^∞ sur R_+^n , qui admettent, ainsi que leurs dérivées de tous les ordres, une limite finie lorsque $x_n \rightarrow 0_+$.

5) Enfin, $L^m(R^n) = L_{(1,0)}^m(R^n)$ désignera la classe des opérateurs pseudo-différentiels de degré m . Dans tout l'article on prendra $m \in \mathbb{Z}$.

$S^m(R^n) = S_{(1,0)}^m(R^n)$ sera la classe des symboles de degré m .

1. — Introduction et résultats.

Il est souvent intéressant, lorsque l'on dispose d'une équation différentielle (ou pseudo-différentielle) $Pu = f$ d'étudier la régularité de la solution u (en fonction de celle de f , par exemple) non par rapport à toutes les variables, mais seulement par rapport à certaines d'entre elles. Ceci conduit à définir l'« hypoellipticité partielle » de l'opérateur P . Il faut évidemment donner d'une part un sens précis à cette notion, et d'autre part avoir un critère permettant d'évaluer la « régularité partielle » de la solution u .

Nous nous limiterons ici à l'étude de la régularité « au bord » des solutions d'une équation définie sur une variété (à bord C^∞) Ω ; on sait alors que l'on peut se ramener, par cartes locales, au cas où $\Omega = \bar{R}_+^n$.

Dans ce cas, la régularité partielle d'une distribution $u \in \mathcal{D}'(\bar{R}_+^n)$ est décrite par les espaces de Sobolev à double indice $H^{s,t}(\bar{R}_+^n)$, dont nous donnerons les principales propriétés au § 2.

Rappelons à cet effet le théorème classique de Hörmander (cf. [1] th. 4.3.1) que l'on peut énoncer ainsi:

(1.1) Soit $P(x, D) = D_{x_n}^m + \sum_{\alpha_n < m} a_\alpha(x) D_x^\alpha$ un opérateur différentiel de degré m , à coefficients C^∞ . Soit d'autre part $u \in H_{\text{loc}}^{s,t}(\bar{R}_+^n)$ (s et t réels). Alors, pour $\sigma > s$, on a:

$$Pu \in H_{\text{loc}}^{\sigma-m, s+t-\sigma}(\bar{R}_+^n) \Rightarrow u \in H_{\text{loc}}^{\sigma, s+t-\sigma}(\bar{R}_+^n).$$

La démonstration de ce résultat se fait en deux étapes: on commence par l'établir dans le cas particulier $P = D_{x_n}^m$ et on en déduit le cas général en exprimant, grâce à l'hypothèse sur p , $D_{x_n}^m u$ en fonction de Pu et des $D_x^\alpha u$. On notera à ce sujet que la forme de l'opérateur $P(x, D)$ implique que l'hyperplan d'équation $x_n = 0$ est non caractéristique pour lui.

Dans ce travail, nous nous proposons — entre autres — de généraliser (1.1) au cas où $P(x, D)$ est un opérateur pseudo-différentiel d'un type particulier — mais néanmoins assez général pour englober tous les cas habituels —.

La classe de ces opérateurs, qui ont été initialement définis par L. Boutet de Monvel, est celle des « opérateurs pseudo-différentiels de transmission par rapport à l'hyperplan $x_n = 0$ ». Ceux-ci se comportent à certains égards d'une manière proche de celle des opérateurs différentiels (qui en sont d'ailleurs des cas particuliers). On démontre, par exemple (cf. L. BOUTET DE MONVEL, [2]) que si $u \in C_0^\infty(\bar{R}_+^n)$ et si u^0 est le prolongement de u par 0 pour $x_n < 0$, alors, si $P \in L^m(R^n)$ a la propriété de transmission, on a: $P(u^0)|_{x_n > 0} \in C^\infty(\bar{R}_+^n)$.

La clef de la généralisation de (1.1) réside dans le théorème (3.1) (cf. § 3) qui exprime que si $u \in H_{\text{loc}}^{s,t}(R^n)$ a son support dans $\{x: x_n \leq 0\}$, et si $P \in L^m(R^n)$ est de transmission par rapport à $x_n = 0$, alors la restriction de Pu au demi-espace R_+^n est dans l'intersection de tous les $H_{\text{loc}}^{s-m+k, t-k}(\bar{R}_+^n)$, k entier naturel.

La démonstration de (3.1), assez longue, se fait en utilisant successivement des développements de Taylor en $\xi' = 0$, puis en $x_n = 0$, du symbole $\sigma_P(x; \xi)$ de P .

La principale difficulté se situe au niveau de l'étude précise du reste de Taylor en $x_n = 0$, pour lequel on se ramènera (dans le cas $m = 0$) à la transformation de Hilbert en une variable: $vp(1/x_n) * (\cdot)$.

La généralisation de (1.1) au cas pseudo-différentiel se fera aisément en utilisant un inverse micro-local de P , qui sera encore de transmission par rapport à $x_n = 0$. Cette méthode nous permettra en particulier d'étendre au cas des systèmes à multi degré au sens d'Agmon-Douglis-Nirenberg le théorème (1.1) de Hörmander, dont la méthode ne s'adapte pas dans ce cas, étant donnée l'impossibilité d'isoler un terme de plus haut degré.

Énonçons nos résultats:

(3.1) Soit $A \in L^m(R^n)$, propre, de transmission par rapport à l'hyperplan $x_n = 0$. Alors:

$$\left. \begin{array}{l} u \in H_{\text{loc}}^{s,t}(R^n) \\ u|_{x_n > 0} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow Au|_{x_n > 0} \in H_{\text{loc}}^{s-m+k, t-k}(\bar{R}_+^n), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

En particulier, on obtient la propriété suivante des noyaux de Poisson:

(3.6) Soit A comme dans (3.1), et $v \in H_{\text{loc}}^r(R^{n-1})$, r réel. Alors on a:

$$A(v \otimes \delta)|_{x_n > 0} \in H_{\text{loc}}^{r-m-\frac{1}{2}+k, -k}(\bar{R}_+^n), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

En particulier, on retrouve la propriété bien connue:

$$A(v \otimes \delta)|_{x_n > 0} \in H_{\text{loc}}^{r-m-\frac{1}{2}}(\bar{R}_+^n) \cap C^\infty(\bar{R}_+, \mathcal{D}'(R^{n-1})).$$

(4.1) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, posons $\tilde{H}_{\text{loc}}^\alpha(R^n) = \bigcup_{s \in \mathbb{R}} H_{\text{loc}}^{s, \alpha-s}(R^n)$ et soit $P \in L^m(R^n)$ un op de transmission par rapport à l'hyperplan $x_n = 0$, que l'on suppose être non caractéristique

pour P . Alors, il existe un voisinage Ω du bord dans $\bar{R}_+^n$ tel que:

$$\left. \begin{array}{l} u \in \tilde{H}_{\text{loc}}^\alpha(R^n) \\ Pu|_{x_n > 0} \in H_{\text{loc}}^{\sigma-m, \alpha-\sigma}(\bar{R}_+^n) \end{array} \right\} \Rightarrow u|_{x_n > 0} \in H_{\text{loc}}^{\sigma, \alpha-\sigma}(\Omega)$$

On peut exprimer (4.1) d'une manière différente: si $u \in H^{s,t}(\bar{R}_+^n)$ avec $s > -\frac{1}{2}$, appelons u^0 son prolongement par 0 (pour $|s| < \frac{1}{2}$, l'étude de u^0 s'obtient immédiatement en adaptant l'étude faite en [6] (th. 11.4, § 11.3, p. 66) dans le cas des espaces de Sobolev à un seul indice (i.e. $t = 0$)):

(4.3) *Sous les mêmes hypothèses sur P que dans (4.1), soit $u \in H_{\text{loc}}^{s, \lambda-s}(\bar{R}_+^n)$, avec $s > -\frac{1}{2}$ et $t \in \mathbb{R}$. Alors, on a:*

$$P(u^0)|_{x_n > 0} \in H_{\text{loc}}^{\sigma-m, \lambda-\sigma}(\bar{R}_+^n) \Rightarrow u \in H_{\text{loc}}^{\sigma, \lambda-\sigma}(\Omega)$$

(Ω étant défini comme dans (4.1)) et u admet des traces sectionnelles jusqu'à l'ordre $j < \sigma - \frac{1}{2}$:

$$\gamma_k u = D_{x_n}^k u(\cdot, 0) \in H^{\lambda-k-\frac{1}{2}}(R^{n-1}), \quad k \leq j.$$

On a aussi dans le cas à multi-degré:

(5.1) *Soit $P \in L^{\alpha,t}(R^n)$ un système différentiel à multi-degré au sens d'ADN, pour lequel on suppose encore le bord non caractéristique. Alors, pour tout $q \in \mathbb{R}$, on a, après avoir posé $s + q = (s_1 + q, \dots, s_n + q)$:*

$$1) \quad \left. \begin{array}{l} u \in H_{\text{loc}}^{\alpha, t-\alpha}(\bar{R}_+^n) \\ Pu \in H_{\text{loc}}^{s+q, -q}(\bar{R}_+^n) \end{array} \right\} \Rightarrow u \in H_{\text{loc}}^{t+q, \tau-t-q}(\Omega), \quad \tau = \inf_i (t_i)$$

Ω étant un voisinage de $x_n = 0$ dans R_+^n .

2) *En outre, si P est elliptique, on a plus simplement:*

$$\left. \begin{array}{l} u \in H_{\text{loc}}^{\alpha, t-\alpha}(\bar{R}_+^n) \\ Pu \in H_{\text{loc}}^{s+q, -q}(\bar{R}_+^n) \end{array} \right\} \Rightarrow u \in H_{\text{loc}}^{t+q, -q}(\bar{R}_+^n)$$

et u_i admettent des traces sectionnelles jusqu'à l'ordre $j < t_i + q - \frac{1}{2}$:

$$\gamma_k u_i = D_{x_n}^k u_i(\cdot, 0) \in H^{t_i-k-\frac{1}{2}}(R^{n-1}), \quad k \leq j.$$

2. — Ingrédients utilisés.

Nous nous servirons constamment dans la suite de l'exposé des espaces $H^{s,t}$ de Sobolev, dont nous donnons ici la définition et les principales propriétés.

1) $H^{s,t}(R^n)$ est l'espace vectoriel des distributions $u \in \mathcal{S}'(R^n)$ telles que $\hat{u}$ soit une fonction satisfaisant :

$$\int |\hat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s (1 + |\xi'|^2)^t d\xi < \infty.$$

La norme $\|u\|_{s,t}$ dans $H^{s,t}(R^n)$ est définie par :

$$\|u\|_{s,t}^2 = \int |\hat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s (1 + |\xi'|^2)^t d\xi.$$

2) $H^{s,t}(\bar{R}_+^n)$ sera l'espace des $u \in \mathcal{D}'(R_+^n)$ tels qu'il existe $U \in H^{s,t}(R^n)$ avec $U|_{x_n > 0} = u$.

Cet espace est muni de la norme (encore notée $\|u\|_{s,t}$ par abus de notations) :

$$\|u\|_{s,t} = \inf_U \|U\|_{s,t}.$$

U décrivant l'ensemble des éléments de $H^{s,t}(R^n)$ qui prolongent U (topologie quotient).

3) On définit exactement de la même manière que dans le cas des espaces de Sobolev à un seul indice les espaces $H_{\text{loc}}^{s,t}$, $H_{\text{comp}}^{s,t}$...

Enonçons maintenant les propriétés de ces espaces. Pour les démonstrations et davantage de détails, le lecteur est invité à se reporter à Hörmander (1), ch. II, § 2.5.

(2.1) On a les inclusions :

$$H^{s,t}(R^n) \subset H^{s',t'}(R^n) \quad \text{et} \quad H^{s,t}(\bar{R}_+^n) \subset H^{s',t'}(\bar{R}_+^n)$$

si et seulement si : $s \geq s'$ et $s + t \geq s' + t'$.

Enoncé analogue en remplaçant $H^{s,r}$ par $H_{\text{loc}}^{s,t}$.

(2.2) L'application $\gamma_j : C_0^\infty(\bar{R}_+^n) \rightarrow C_0^\infty(R^{n-1})$ qui à u associe $\gamma_j u = D_{x_n}^j u(\cdot, x_n)$ se prolonge, pour $x_n \geq 0$ en :

$$\gamma_j : H^{s,t}(\bar{R}_+^n) \rightarrow H^{s+t-j-\frac{1}{2}}(R^{n-1}) \quad (0 \leq j < s - \frac{1}{2})$$

et on a :

$$\|D_{x_n}^j u(\cdot, x_n)\|_{s+t-j-\frac{1}{2}} \leq \|u\|_{s,t} \quad (0 \leq j < s - \frac{1}{2}).$$

En outre, l'application:

$$\begin{aligned} x_n &\mapsto D_{x_n}^j u(\cdot, x_n) \\ \bar{R}_+ &\rightarrow H^{s+t-j-\frac{1}{2}}(R^{n-1}) \end{aligned}$$

est continue pour $0 \leq j < s - \frac{1}{2}$:

De (2.2) résulte immédiatement:

$$(2.3) \quad H^{s,t}(\bar{R}_+^n) \subset C^k(\bar{R}_+, H^{s+t-k-\frac{1}{2}}(R^{n-1})) \quad (0 \leq k < s - \frac{1}{2})$$

et en particulier:

$$(2.4) \quad \bigcap_{k \in \mathbb{N}} H^{s+k, t-k}(\bar{R}_+^n) \subset C^\infty(\bar{R}_+, \mathcal{D}'(R^{n-1})) \quad (*)$$

Au § 3 nous aurons besoin du théorème suivant (qui n'est autre que (1.1)) dans le cas particulier $P = D_{x_n}$:

$$(2.5) \quad u \in H_{\text{loc}}^{s,t}(\bar{R}_+^n) \Leftrightarrow \begin{cases} u \in H_{\text{loc}}^{s-1, t+1}(\bar{R}_+^n) \\ D_{x_n} u \in H_{\text{loc}}^{s-1, t}(\bar{R}_+^n) \end{cases}$$

Disons maintenant un mot sur l'action des opérateurs différentiels et pseudo-différentiels sur les espaces $H^{s,t}$.

(2.6) Soit $A \in L^m(R^n)$ un opd propre. Alors:

$$u \in H_{\text{loc}}^{s,t}(R^n) \Rightarrow Au \in H_{\text{loc}}^{s-m, t}(R^n).$$

La démonstration de ce résultat, classique, est calquée sur celle de la « continuité H^s » des OPD, cf. Hörmander, (1').

(2.7) Soit $\alpha' \in \mathbb{N}^{n-1}$. Alors: $D_{x'}^{\alpha'}: H^{s,t}(R^n) \rightarrow H^{s, t-|\alpha'|}(R^n)$.

Il s'agit là d'une vérification triviale, compte tenu des définitions.

Voici maintenant un résultat important, qui sera essentiel au § 3.

(2.8) Soit $B \in L^m(R^n)$ un OPD de symbole $b \in S^m(R^n)$.

On suppose que $b \in S^{-\infty}(\Gamma)$, Γ étant un voisinage conique du fibré conormal à $\{x_n = 0\}$. Alors, il existe un voisinage Ω de $\{x_n = 0\}$ dans R^n tel que:

$$u \in H_{\text{comp}}^{s,t}(R^n) \Rightarrow Bu \in H_{\text{loc}}^{s-m+k, t-k}(\Omega), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

(*) Pour la définition de $C^\infty(\bar{R}_+, \mathcal{D}'(R^{n-1}))$, on pourra consulter, par exemple, F. TREVES [3].

DÉMONSTRATION DE (2.8). — Pour $x' \in R^{n-1}$, il existe un voisinage ouvert $U_{x'}$ de $(x', 0)$ dans R^n et une constante $C_{x'} > 0$ tels que $U_{x'} \cap \{|\xi'| < C_{x'} |\xi_n|\} \subset \Gamma$. Posons alors $\Omega = \bigcup_{x' \in R^{n-1}} U_{x'}$. Si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, on peut recouvrir $\text{Supp}(\varphi)$ par un nombre fini de $U_{x'}$, et on en déduit qu'il existe $C > 0$ tel que $b_1 = \varphi b \in S^{-\infty}(\{|\xi'| < C |\xi_n|\})$. On va montrer que l'opérateur $b_1(x, D)$ est continu de $H^{s,t}(R^n)$ dans $H^{s-m+k, t-k}(R^n)$ pour tout $k \in N$.

Soient alors deux fonctions θ et χ définies comme suit:

$$\theta \in C^\infty(R^n) \quad \text{et} \quad \begin{cases} \theta(\xi) = 0 & \text{pour } |\xi| \leq \frac{1}{2} \\ \theta(\xi) = 1 & \text{pour } |\xi| \geq 1 \end{cases}$$

avec $\theta \leq 1$.

$\chi \in C^\infty(R^n \setminus 0)$, homogène de degré 0, telle qu'il existe $C' > 0$ avec:

$$\begin{cases} \chi(\xi) = 0 & \text{dans le cône: } \{|\xi|/|\xi'| \leq \frac{1}{2} C' |\xi_n|\} \\ \chi(\xi) = 1 & \text{dans: } \{|\xi|/|\xi'| \geq \frac{3}{4} C' |\xi_n|\} . \end{cases}$$

On a alors (modulo $S^{-\infty}(R^n)$):

$$b_1(x, \xi) \equiv \theta(\xi) \chi(\xi) b(x, \xi) .$$

Alors, puisque

$$\text{Op}(\theta \chi b_1) u(x) = \int \exp[ix\xi] b(x, \xi) \widehat{\theta \chi^{-1} * u(\xi)} d\xi$$

il suffira, d'après (2.6) de démontrer le lemme:

LEMME. — Soient θ et χ comme définis précédemment. Alors, si $u \in H_{\text{comp}}^{s,t}(R^n)$, on a: $v = \widehat{\theta \chi^{-1} * u} \in H^{s+k, t-k}(R^n)$ pour tout entier positif k .

Démontrons ce lemme.

$$\|v\|_{s+k, t-k}^2 = \int |\theta(\xi) \chi(\xi) \hat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^{s+k} (1 + |\xi'|^2)^{t-k} d\xi \leq C_k \|u\|_{s,t}^2$$

puisque $|\theta| \leq 1$ et

$$\chi(\xi) \frac{(1 + |\xi|^2)^k}{(1 + |\xi'|^2)^k} \sim \chi(\xi) .$$

REMARQUE. — Si on suppose en outre B propre, on peut, dans l'énoncé de (2.8) remplacer $H_{\text{comp}}^{s,t}(R^n)$ par $H_{\text{loc}}^{s,t}(R^n)$.

Il reste maintenant à définir la classe des opérateurs pseudo-différentiels de transmission par rapport à l'hyperplan $\{x_n = 0\}$.

Soit, pour $m \in \mathbb{Z}$, un OPD classique $A \in L^m(R^n)$, c'est à dire tel que le symbole complet $\sigma(A)$ de A admette un développement asymptotique:

$$\sigma_A(x, \xi) \sim \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j(x, \xi)$$

où $a_j \in C^\infty(R^n \times (R^n \setminus 0))$ est homogène de degré $m - j$ en ξ . On dit (cf. L. BOUTET DE MONVEL [2]) que A est de transmission par rapport à l'hyperplan $x_n = 0$ si, pour tout $j \in \mathbb{N}$, la fonction:

$$(x, \xi) \mapsto a_j(x, -\xi) - (-1)^{m-j} a_j(x, +\xi)$$

est plate sur le fibré conormal $\{x_n = 0, \xi' = 0\}$ à $\{x_n = 0\}$, c'est à dire:

$$D_{x_n}^p D_{\xi'}^{\alpha'} a_j(x', 0; 0, -1) = (-1)^{m-j-|\alpha'|} D_{x_n}^p D_{\xi'}^{\alpha'} a_j(x', 0; 0, 1)$$

pour tout $\alpha' \in \mathbb{N}^{n-1}$ et tout $p \in \mathbb{N}$.

3. — Le théorème fondamental.

On sait (cf. L. BOUTET DE MONVEL [2]) que lorsque A est un OPD de transmission et $u \in C_0^\infty(\bar{R}_+^n)$ une fonction « C^∞ jusqu'au bord », alors, si u^0 désigne le prolongement par 0 de u pour $x_n < 0$, on a une propriété de « régularité jusqu'au bord » pour $A(u^0)$. De manière précise:

$$A(u^0)|_{x_n > 0} \in C^\infty(\bar{R}_+^n).$$

Nous allons donner un résultat généralisant cette propriété au cas des distributions. On en tirera aussi, comme corollaire immédiat la continuité H^s des noyaux de Poisson.

(3.1) THÉORÈME. — Soit $A \in L^m(R^n)$ un opérateur pseudodifférentiel propre, de transmission par rapport à $x_n = 0$. Alors, on a:

$$\left. \begin{array}{l} u \in H_{\text{loc}}^{s,t}(R^n) \\ u|_{x_n > 0} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow Au|_{x_n > 0} \in H_{\text{loc}}^{s-m+k, t-k}(\bar{R}_+^n), \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

pour tous nombres s et $t \in \mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION. — Celle-ci, assez longue et technique se fait en plusieurs étapes.

Soit $\sigma_A(x, \xi) \sim \sum_{j \geq 0} a_j(x, \xi)$ ($a_j \in S^{m-j}$) un développement asymptotique du symbole de A .

Compte tenu de ce que si $R \in L^{-N}(R^b)$, $N > 0$ assez grand, $Ru \in H_{\text{loc}}^{s-m+k, t-k}(R^n)$ et de (2.1), on voit qu'il est suffisant de se limiter au cas où $\sigma(A) = a = a_0$, ce qui permettra d'alléger les notations.

Soit alors

$$\theta \in C^\infty(R^n) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \theta(\xi) = 0 & \text{si } |\xi| \leq \frac{1}{2} \\ \theta(\xi) = 1 & \text{si } |\xi| \geq 1 \end{cases}$$

et $\chi \in C^\infty(R^n \setminus 0)$, homogène de degré 0, vérifiant:

$$\begin{cases} \chi(\xi) = 1 & \text{si } \xi \in \Gamma_1 = \{\xi/|\xi'| \leq C|\xi_n|\} \\ \chi(\xi) = 0 & \text{si } \xi \in \Gamma_2 = \{\xi/|\xi'| \geq 2C|\xi_n|\} \end{cases}$$

Ecrivant alors:

$$a(x, \xi) = \theta(\xi) \chi(\xi) a(x, \xi) - \theta(\xi) (\chi(\xi) - 1) a(x, \xi) + (1 - \theta(\xi)) a(x, \xi)$$

on voit immédiatement qu'il suffit en fait de se limiter au cas où le symbole de A est de la forme $\theta(\xi) \chi(\xi) a(x, \xi)$. En effet, d'une part $1 - \theta \in C_0^\infty(R^n)$, donc

$$\text{Op}[(1 - \theta)a] \in L^{-\infty}(R^n),$$

et d'autre part, le lemme (2.8) s'applique à l'opérateur de symbole $\theta(\chi - 1)a$ (il est évident qu'on peut prendre $\Omega = R^n$).

Utilisons maintenant la formule de Taylor jusqu'à l'ordre N' pour $a(x, \xi)$ en $\xi' = 0$. On obtient, pour $\xi_n \neq 0$:

$$a(x, \xi) = \sum_{|\alpha'| \leq N'} \frac{1}{\alpha'!} \partial_{\xi'}^{\alpha'} a(x; 0, \xi_n) \xi'^{\alpha'} + \sum_{|\alpha'| = N'} \frac{N'}{\alpha'!} r_{\alpha'}(x, \xi) \xi'^{\alpha'}$$

avec:

$$r_{\alpha'}(x, \xi) = \int_0^1 (1-t)^{N'-1} \partial_{\xi'}^{\alpha'} a(x, t\xi', \xi_n) dt.$$

Examinons en premier lieu la contribution d'un terme $r_{\alpha'}(x, \xi) \xi'^{\alpha'}$ du reste de Taylor. On a le lemme:

$$(3.2) \quad \theta \chi r_{\alpha'} \in S^{m-N'}.$$

PREUVE. — Une majoration triviale de $r_{\alpha'}(x, \xi)$ sous sa forme intégrale montre que l'on a:

$$\forall x \in K \text{ (compact)}, \quad \exists C_K > 0 \quad \text{tel que} \quad |r_{\alpha'}(x, \xi)| \leq C_K (1 + |\xi_n|)^{m-N'}$$

pour $m - N' < 0$; ceci prouve que pour tout cône $\Gamma = \{\xi/|\xi'| \leq C|\xi_n|\}$ on a: $\xi \in \Gamma \Rightarrow |r_{\alpha'}(x, \xi)| \leq C_F(1 + |\xi|)^{m-N'}$, puisque dans un tel cône $|\xi| \sim |\xi_n|$. Effectuant le même type de raisonnement pour les dérivées de $r_{\alpha'}$, on en déduit que:

$$r_{\alpha'} \in S^{m-N'}(\Gamma).$$

Comme d'autre part $\theta\chi \in S^0(R^n)$ par définition, on voit qu'à condition de prendre Γ assez grand, on a bien:

$$\theta\chi r_{\alpha'} \in S^{m-N'}(R^n).$$

Ceci dit, remarquons que:

$$\text{Op}(\theta\chi r_{\alpha'} \xi)^{\alpha'} u = \text{Op}(\theta\chi r_{\alpha'}) D_x^{\alpha'} u$$

et qu'en vertu de (2.7) on a:

$$u \in H_{\text{loc}}^{s,t}(R^n) \Rightarrow D_x^{\alpha'} u \in H_{\text{loc}}^{s,t-N'}(R^n).$$

Appliquant alors le lemme (3.2), il vient, compte tenu de (2.6):

$$\text{Op}(\theta\chi r_{\alpha'} \xi)^{\alpha'} u \in H_{\text{loc}}^{s-m+N', t-N'}(R^n)$$

soit

$$\text{Op}(\theta\chi r_{\alpha'} \xi)^{\alpha'} u|_{x_n > 0} \in H_{\text{loc}}^{s-m+k, t-k}(\bar{R}_+^n) \quad \text{dès que } N' \geq k.$$

Passons maintenant à l'étude d'un terme $\theta(\xi) \chi(\xi) \partial_{\xi'}^{\alpha'} a(x; 0, \xi_n) \xi'^{\alpha'}$ du développement de Taylor. Soit $A_{\alpha'}$ l'opérateur défini par ce symbole. Or, on a bien entendu:

$$A_{\alpha'} = B_{\alpha'} \circ D_x^{\alpha'}$$

$B_{\alpha'}$ étant l'OPD de symbole $\theta(\xi) \chi(\xi) \partial_{\xi'}^{\alpha'} a(x; 0, \xi_n)$.

Puisque $D_x^{\alpha'} u \in H_{\text{loc}}^{s,t-|\alpha'|}(R^n)$ est nulle pour $x_n > 0$, on voit en remplaçant u par $D_x^{\alpha'} u$, $A_{\alpha'}$ par $B_{\alpha'}$, m par $m - |\alpha'|$ et k par $k + |\alpha'|$, qu'il suffit d'étudier $A_{\alpha'}$ pour $\alpha' = 0$.

On est donc finalement ramené au:

PROBLÈME. — Soit $a \in C^\infty(R^n \times R^n \setminus 0)$, homogène de degré m en ξ , vérifiant les formules (2.9) de transmission.

Soit $A \in L^m(R^n)$ l'OPD de symbole $\theta(\xi) \chi(\xi) a(x; 0, \xi_n)$. Il faut montrer que si $u \in H_{\text{loc}}^{s,t}(R^n)$ est nulle pour $x_n > 0$, alors $Au|_{x_n > 0} \in H_{\text{loc}}^{s-m+k, t-k}(\bar{R}_+^n)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

L'OPD A étant défini comme ci-dessus, appliquons la formule de Taylor en $x_n = 0$ à $\theta(\xi) \chi(\xi) a(x; 0, \xi_n)$:

$$\theta(\xi) \chi(\xi) a(x; 0, \xi_n) = \theta(\xi) \chi(\xi) \sum_{p < N} \frac{1}{p!} \partial_{x_n}^p a(x', 0; 0, \xi_n) x_n^p + \frac{1}{N!} \theta(\xi) \chi(\xi) R_N(x; \xi_n) x_n^N$$

avec:

$$R_N(x; 0, \xi_n) = \int_0^1 (1-t)^{N-1} \partial_{x_n}^N a(x', tx_n; 0, \xi_n) dt$$

La partie la plus délicate du calcul résidera dans l'étude de la contribution du reste R_N . Commençons donc par examiner l'apport des termes du type $D_{x_n}^p a(x', 0; 0, \xi_n) x_n^p$.

Par la propriété de transmission, on a immédiatement:

$$\begin{cases} D_{x_n}^p a(x', 0; 0, \xi_n) = D_{x_n}^p a(x', 0; 0, 1) \xi_n^m \\ \text{si } \xi_n \neq 0 \end{cases}$$

Compte tenu de ce que la multiplication par la fonction indéfiniment dérivable $x_n^p \partial_{x_n}^p a(x', 0; 0, 1)$ applique $H_{\text{loc}}^{s,t}(R^n)$ dans lui-même (c'est un cas particulier de (2.6)) on voit que l'on est finalement ramené à la démonstration du lemme suivant:

(3.2) LEMME. — Soit A_m un OPD de symbole $\theta(\xi) \chi(\xi) \xi_n^m$ avec $m \in \mathbb{Z}$. Si $u \in H_{\text{loc}}^{s,t}(R^n)$ est nulle pour $x_n > 0$, alors on a:

$$A_m u|_{x_n > 0} \in H_{\text{loc}}^{s-m+k, t-k}(\bar{R}_+^n).$$

PREUVE.

1) $m \in \mathbb{N}$. On peut alors écrire:

$$A_m u = \widehat{\mathcal{F}}(\theta \chi \widehat{D_{x_n}^m u}) = \widehat{\mathcal{F}}(\theta(\chi - 1) \widehat{D_{x_n}^m u}) + \widehat{\mathcal{F}}((\theta - 1) \widehat{D_{x_n}^m u}) + D_{x_n}^m u$$

d'où le résultat, d'après (2.8) appliqué à $\theta(\chi - 1)$, et d'après le fait que $\theta - 1 \in C_0^\infty(R^n)$ et que $u|_{x_n > 0} = 0$.

2) $m < 0$. Nous allons procéder par récurrence (sur m et sur k).

Supposons que $A_m u|_{x_n > 0} \in H_{\text{loc}}^{s-m+k, t-k}(\bar{R}_+^n)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et montrons qu'alors:

$$A_{m-1} u|_{x_n > 0} \in H_{\text{loc}}^{s-m+1+k, t-k}(\bar{R}_+^n).$$

Pour cela, il suffit d'après le théorème (2.5) de prouver que:

- (i) $D_{x_n} A_{m-1} u|_{x_n > 0} \in H_{\text{loc}}^{s-m+k, t-k}(\bar{R}_+^n), \forall k \in \mathbb{N};$
- (ii) $A_{m-1} u|_{x_n > 0} \in H_{\text{loc}}^{s-m+k, t-k+1}(\bar{R}_+^n), \forall k \in \mathbb{N}.$

(i) est immédiat d'après l'hypothèse de récurrence puisque $D_{x_n} A_{m-1} = A_m$;

(ii) on va le prouver par récurrence sur k :

1) c'est vrai pour $k = 0$, car on a bien:

$$A_{m-1} u \in H_{\text{loc}}^{s-(m-1), t}(P^n)$$

d'après (2.6).

2) supposons le vrai dans le cas $k - 1$:

$$(*) \quad A_{m-1} u|_{x_n > 0} \in H_{\text{loc}}^{s-m+k-1, t-k+2}(\bar{R}_+^n)$$

et montrons qu'alors on a:

$$A_{m-1} u|_{x_n > 0} \in H_{\text{loc}}^{s-m+k, t-k+1}(\bar{R}_+^n).$$

Or, toujours d'après (2.5), ceci sera réalisé si:

$$a) \quad D_{x_n} A_{m-1} u|_{x_n > 0} \in H_{\text{loc}}^{s-m+k-1, t-k+1}(\bar{R}_+^n)$$

$$b) \quad A_{m-1} u|_{x_n > 0} \in H_{\text{loc}}^{s-m+k-2, t-k+2}(\bar{R}_+^n)$$

a) Résulte immédiatement de l'hypothèse de récurrence appliquée à $A_m = D_{x_n} A_{m-1}$ en remplaçant k par $k - 1$.

b) N'est autre que l'hypothèse (*).

Ceci termine la démonstration du lemme.

Passons maintenant à la dernière étape de la démonstration du théorème (3.1). Il s'agit d'évaluer la contribution du reste de Taylor

$$\theta(\xi) \chi(\xi) R_N(x; 0, \xi_n) x_n^N.$$

D'après l'homogénéité de a , on est immédiatement ramené au cas d'une somme de deux OPD de symboles:

$$x_n^N \theta(\xi) \chi(\xi) \xi_{n+}$$

$$x_n^N \theta(\xi) \chi(\xi) \xi_{n-}$$

On va se borner à étudier le premier, le second se traitant exactement de la même façon.

Il s'agit de démontrer par conséquent le résultat suivant:

(3.3) LEMME. — Soit $R_{m,N}$ l'OPD de symbole $x_n^N \theta(\xi) \chi(\xi) \xi_{n+}^m$ avec $m \in \mathbb{Z}$. Alors, si $u \in H_{\text{loc}}^{s,t}(R^n)$ est nulle pour $x_n > 0$, on a :

$$R_{m,N} u|_{x_n > 0} \in H_{\text{loc}}^{s-m+k, t-k}(\bar{R}_+^n) \quad \text{si } k < N - |s| - 3.$$

Le théorème (3.1) en résultera puisque l'on peut prendre N arbitrairement grand.

PREUVE DE (3.3).

a) Commençons par le cas $m = 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} R_{0,N} u(x) &= x_n^N \mathcal{F}^{-1}(\theta \chi Y \hat{u})(x) \quad (Y: \text{Heaviside en } \xi_n) \\ &= x_n^N \mathcal{F}^{-1}(Y \hat{u}) + x_n^N \mathcal{F}^{-1}((\theta \chi - 1) Y \hat{u})(x). \end{aligned}$$

Le second terme se traite très simplement. En effet, d'après l'égalité triviale: $\theta \chi - 1 = \theta(\chi - 1) + \theta - 1$, on a :

$$\mathcal{F}^{-1}(\theta(\chi - 1) Y \hat{u}) + \mathcal{F}^{-1}((\theta - 1) Y \hat{u}) \in H^{s+k, t-k}(R^n) + C^\infty(R^n)$$

compte tenu de (2.8) appliqué à $b(x, \xi) = \theta(\chi - 1) Y$ et du fait que $\theta - 1 \in C_0^\infty(R^n)$.

Considérons alors le terme $\mathcal{F}^{-1}(Y \hat{u})$. D'après la formule bien connue :

$$\mathcal{F}^{-1}(Y) = \frac{i}{2\pi} VP \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \delta$$

on obtient immédiatement :

$$(Y \hat{u}) = \frac{i x_n^N}{2\pi} \cdot \left(vp \frac{1}{x_n} \otimes \delta_{x'} \right) * u + \frac{1}{2} u.$$

Etant donné que $u|_{x_n > 0} = 0$, il suffira de prouver que l'application :

$$u \mapsto x_n^N \cdot \left[\left(vp \frac{1}{x_n} \otimes \delta_{x'} \right) * u \right]_{x_n > 0}$$

est continue de $\{u \in H_{\text{comp}}^{s,t}(R^n) / u|_{x_n > 0} = 0\}$ dans $H_{\text{loc}}^{s+k, t-k}(\bar{R}_+^n)$ pour tout entier $k \geq 0$.

Soit alors $E = \{u \in C_0^\infty(R^n) / u|_{x_n > 0} = 0\}$ et $\varphi, \psi \in C_0^\infty(R^n)$. Posons :

$$U = \varphi x_n^N \left[\left(vp \frac{1}{x_n} \otimes \delta_{x'} \right) * \psi u \right].$$

On a alors, pour $x_n > 0$:

$$U(x', x_n) = \int_{-\infty}^0 K(x_n, y_n) u(x', y_n) dy_n$$

avec:

$$K(x_n, y_n) = \varphi(x_n) \psi(y_n) \frac{x_n^N}{x_n - y_n}.$$

Une vérification immédiate montre que l'on a:

$$K \in C_0^{N-1}(\bar{R}_+ \times \bar{R}_-).$$

On peut alors prolonger le noyau K en $L \in C_0^{N-1}(R^2)$; posant alors:

$$V(x', x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} L(x_n, y_n) u(x', y_n) dy_n$$

on a évidemment:

$$U|_{x_n > 0} = V|_{x_n > 0}$$

et par définition de la norme de $H^{s+k, t-k}(\bar{R}_+^n)$:

$$\|U|_{x_n > 0}\|_{s+k, t-k} \leq \|V\|_{s+k, t-k}.$$

Par le théorème de Plancherel, il vient:

$$V(x) = \int L(x_n, -\eta_n) \hat{u}(x', \eta_n) d\eta_n$$

d'où la transformée de Fourier:

$$\hat{V}(\xi) = \int L(\xi_n, -\eta_n) \hat{u}(\xi', \eta_n) d\eta_n.$$

On obtient alors:

$$\begin{aligned} \|V\|_{s+k, t-k}^2 &= \int (1 + |\xi|^2)^{s+k} (1 + |\xi'|^2)^{t-k} |\hat{V}(\xi)|^2 d\xi \leq \\ &\leq \int d\xi \left[\int (1 + |\xi|^2)^{(s+k)/2} (1 + |\xi'|^2)^{(t-k)/2} |L(\xi_n, -\eta_n) \hat{u}(\xi', \eta_n)| d\eta_n \right] \end{aligned}$$

Majorant par l'inégalité de Peetre, il vient:

$$\begin{aligned} \|V\|_{s+k, t-k}^2 &\leq C \int d\xi \left[\int (1 + |\xi|^2)^{k/2} (1 + |\xi'|^2)^{-k/2} (1 + |\xi_n - \eta_n|^2)^{|s|/2} \right. \\ &\quad \cdot |L(\xi_n, -\eta_n)| (1 + |\xi'|^2 + \eta_n^2)^{s/2} (1 + |\xi'|^2)^{t/2} |\hat{u}(\xi', \eta_n)| d\eta_n \left. \right]^2. \end{aligned}$$

Majorant encore une fois, au moyen de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient finalement:

$$\|V\|_{s+k, t-k}^2 \leq C \int F(\xi') G(\xi_n) d\xi' d\xi_n$$

avec:

$$\begin{aligned} F(\xi') &= \int (1 + |\xi'|^2 + \eta_n^2)^s (1 + |\xi'|^2)^t |\hat{u}(\xi', \eta_n)|^2 d\eta_n \\ G(\xi_n) &= \int (1 + \xi_n^2)^k (1 + |\xi_n - \eta_n|^2)^{|s|} |L(\xi_n, -\eta_n)|^2 d\eta_n \end{aligned}$$

ce qui donne:

$$\|V\|_{s+k, t-k}^2 \leq C \int G(\xi_n) d\xi_n \cdot \|u\|_{s, t}^2.$$

Or, $\int G(\xi_n) d\xi_n < \infty$ dès que $2k + 2|s| - 2(N - 2) < -2$, soit $k < N - |s| - 3$. Voilà donc pour le cas $m = 0$.

Le cas $m > 0$ s'en déduit immédiatement, compte tenu de ce que l'on a évidemment:

$$R_{m, N} = R_{0, N} \circ D_{x_n}^m$$

et:

$$D_{x_n}^m u \in H_{\text{loc}}^{s-m, t}(R^n), \quad D_{x_n}^m u|_{x_n > 0} = 0.$$

Reste le cas $m < 0$. Il s'agit de démontrer que l'on a:

$$(*) \quad R_{m, N} u|_{x_n > 0} \in H_{\text{loc}}^{s-m+k, t-k}(\bar{R}_+^n), \quad k < N - |s| - 3.$$

Notons d'abord qu'il suffit d'établir (*) quand $R_{m, N}$ est remplacé par $\tilde{R}_{m, N}$ défini par:

$$\tilde{R}_{m, N} = \text{Op}(\theta \chi_{\xi_{n+}^m} \circ x_n^N).$$

En effet, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$ on a, intégrant par parties:

$$\begin{aligned} R_{m, N} \varphi(x) &= \int \exp[ix\xi] x_n^N \theta(\xi) \chi(\xi) \xi_{n+}^m \hat{\varphi}(\xi) d\xi \\ &= \int D_{\xi_n}^N (\exp[ix\xi] (\theta(\xi) \chi(\xi) \xi_{n+}^m \hat{\varphi}(\xi)) d\xi \\ &= (-1)^N \int \exp[ix\xi] D_{\xi_n}^N (\theta(\xi) \chi(\xi) \xi_{n+}^m \hat{\varphi}(\xi)) d\xi. \end{aligned}$$

Appliquant la formule de Leibniz, on a:

$$D_{\xi_n}^N (\theta(\xi) \chi(\xi) \xi_{n+}^m \hat{\varphi}(\xi)) = \sum_{0 \leq p \leq N} C_N^p D_{\xi_n}^p (\theta \chi_{\xi_{n+}^m}) \widehat{x_n^{N-p} \varphi(\xi)}.$$

Pour $p > 0$, on a:

$$D_{\xi_n}^p (\theta \chi_{\xi_{n+}^m}) = C \theta \chi_{\xi_{n+}^m}^{m-p} + r_{m-p}$$

r_{m-p} étant un symbole de degré $m-p$, nul dans un voisinage conique de $\xi' = 0$.
 Donc, d'après (2.8), on aura de toute façon:

$$\text{Op}(r_{m-p})u \in H_{\text{loc}}^{s-(m-p)+k, t-k}(R^n), \quad \forall k \in N$$

soit:

$$\text{Op}(r_{m-p})u \in H_{\text{loc}}^{s-m+k, t-k}(R^n) \quad \text{d'après (2.1).}$$

Pour $p = 0$, on a le terme:

$$\theta \chi_{\xi_n^+}^m \widehat{x_n^N} \varphi(\xi).$$

Il est donc suffisant d'étudier $\tilde{R}_{m-p, N}$, $p \geq 0$. On va prouver que l'on a:

$$\tilde{R}_{m-p, N} u|_{x_n > 0} \in H_{\text{loc}}^{s-(m-p)+k, t-k}(\bar{R}_+^n) \subset H_{\text{loc}}^{s-m+k, t-k}(\bar{R}_+^n)$$

pour $k < N - p - |s| - 3$, ce qui achevera la preuve de (3.3).

Or, une vérification triviale montre que:

$$D_{x_n} \circ \tilde{R}_{m-p-1, N} = \tilde{R}_{m-p, N}$$

ce qui permet de reprendre mot à mot la démonstration par récurrence de (3.2),
 où on avait, de façon analogue la relation $D_{x_n} \circ A_{m-1} = A_m$.

La démonstration du théorème (3.1) est ainsi terminée.

Donnons maintenant quelques applications de ce résultat.

(3.4) COROLLAIRE. — Soit $A \in L^m(R^n)$ un OPD propre, de transmission par rapport à $x_n = 0$. Alors si $u \in \mathcal{D}'(R^n)$ est nulle pour $x_n > 0$, on a:

$$Au|_{x_n > 0} \in C^\infty(\bar{R}_+, \mathcal{D}'(R^{n-1})).$$

C'est une conséquence immédiate de (3.1), de (2.5).

(3.5) COROLLAIRE. — Soit A comme dans (3.4) et $u \in \mathcal{D}'(R^n)$ telle que $u|_{x_n > 0} \in C^\infty(\bar{R}_+, \mathcal{D}'(R^{n-1}))$. Alors:

$$Au|_{x_n > 0} \in C^\infty(\bar{R}_+, \mathcal{D}'(R^{n-1})).$$

C'est évident, en utilisant (3.4) après avoir écrit:

$$u = u - v + v$$

$v \in C^\infty(R, \mathcal{D}'(R^{n-1}))$ étant un prolongement (de Seeley) de $u|_{x_n > 0}$, et compte tenu de ce que:

$$A: C^\infty(R, \mathcal{D}'(R^{n-1})) \rightarrow C^\infty(R, \mathcal{D}'(R^{n-1})).$$

Donnons maintenant un résultat intéressant qui généralise les propriétés des opérateurs de Poisson.

(3.6) PROPRIÉTÉS DES NOYAUX DE POISSON. — Soit $A \in L^m(R^n)$ un OPD propre, de transmission par rapport à $x_n = 0$, et $v \in H_{\text{loc}}^r(R^{n-1})$, $r \in \mathbb{R}$. Alors on a:

$$(i) \quad A(v \otimes \delta_{x_n})|_{x_n > 0} \in H_{\text{loc}}^{r-m-\frac{1}{2}+k, -k}(\bar{R}_+^n), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$(ii) \quad A(v \otimes \delta_{x_n})|_{x_n > 0} \in H_{\text{loc}}^{r-m-\frac{1}{2}}(\bar{R}_+^n) \cap C^\infty(\bar{R}_+, \mathcal{D}'(R^{n-1})).$$

PREUVE. — (ii) est une conséquence immédiate de (i) (faire tout d'abord $k = 0$, et remarquer que $H_{\text{loc}}^{r-m-\frac{1}{2}, 0}(\bar{R}_+^n) = H_{\text{loc}}^{r-m-\frac{1}{2}}(\bar{R}_+^n)$; faire ensuite l'intersection pour $k \in \mathbb{N}$, en notant (2.4)).

Prouvons donc (i). Notons tout d'abord que si $v \in H^r(R^{n-1})$ alors on a:

$$v \otimes \delta \in H^{s,t}(R^n) \Leftrightarrow \begin{cases} s < -\frac{1}{2} \\ s + t \leq r - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

En effet, on a:

$$\begin{aligned} \|v \otimes \delta\|_{s,t}^2 &= \int |\hat{v}(\xi')|^2 (1 + |\xi|^2)^s (1 + |\xi'|^2)^t d\xi \\ &= \int |\hat{v}(\xi')|^2 (1 + |\xi'|^2)^{s+t+\frac{1}{2}} (1 + \theta_n^2)^s d\xi' d\theta_n \end{aligned}$$

en effectuant le changement de variable $\xi_n = (1 + |\xi'|^2)^{\frac{1}{2}} \theta_n$ et l'intégrale converge si et seulement si l'on a précisément: $s + t + \frac{1}{2} \leq r$ et $2s < -1$.

Ceci étant dit, on a donc en particulier:

$$v \otimes \delta \in H_{\text{loc}}^{s, r-s-\frac{1}{2}}(R^n), \quad s < -\frac{1}{2} \text{ fixé.}$$

Ceci donne, en appliquant le théorème (3.1):

$$A(v \otimes \delta)|_{x_n > 0} \in H_{\text{loc}}^{s-m+k', r-s-\frac{1}{2}}(\bar{R}_+^n), \quad \forall k' \in \mathbb{R}.$$

Posant $s - m + k' = r - m - \frac{1}{2} + k$, on obtient:

$$A(v \otimes \delta)|_{x_n > 0} \in H_{\text{loc}}^{r-m-\frac{1}{2}+k, -k}(\bar{R}_+^n), \quad \forall k \in \mathbb{R}. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

4. — Hypoellipticité partielle.

Il s'agit dans ce paragraphe d'appliquer le théorème (3.1) à l'étude de la régularité « au bord » des solutions d'équations pseudo-différentielles.

En fait nous allons généraliser le théorème (1.1) de Hörmander au cas pseudo-différentiel de transmission. Le théorème (4.1) que nous allons démontrer et qui constituera la généralisation annoncée signifie, en gros, que si u appartient à un certain espace $H^{s,t}$ et si P est un OPD de transmission pour lequel le bord $x_n = 0$ n'est pas caractéristique, alors toute augmentation de la régularité de Pu se traduira par une augmentation de la régularité de u (du moins au voisinage du « bord » $x_n = 0$).

La méthode utilisée dans la démonstration consiste en l'application d'un inverse micro-local de P , qui sera encore de transmission, (4.1) en résultant ensuite au moyen des théorèmes (2.8) et (3.1).

Signalons enfin qu'au § 5 cette méthode se transposera sans aucune difficulté à l'étude des systèmes différentiels (et pseudo-différentiels) au sens d'Agmon-Douglis-Nirenberg.

(4.1) THÉORÈME. — Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, posons: $\tilde{H}_{\text{loc}}^\lambda(R^n) = \bigcup_{s \in \mathbb{R}} H_{\text{loc}}^{s, \lambda-s}(R^n)$. Soit alors $P \in L^m(R^n)$ un OPD propre, de transmission par rapport à l'hyperplan $x_n = 0$, que l'on suppose non caractéristique pour P . Alors:

(i) Il existe un voisinage Ω de $\{x_n = 0\}$ dans $\bar{R}_+^n$ tel que:

$$\left. \begin{array}{l} u \in \tilde{H}_{\text{loc}}^\lambda(R^n) \\ Pu|_{x_n > 0} \in H_{\text{loc}}^{\sigma-m, \lambda-\sigma}(\bar{R}_+^n) \end{array} \right\} \Rightarrow u|_{x_n > 0} \in H_{\text{loc}}^{\sigma, \lambda-\sigma}(\Omega)$$

(ii) Pour tout entier $j < \sigma - \frac{1}{2}$, u admet des traces sectionnelles pour $x_n = 0_+$ jusqu'à l'ordre j , et on a:

$$\gamma_k u \in H^{\lambda-\frac{1}{2}-k}(R^{n-1}) \quad (k \leq j).$$

DÉMONSTRATION. — Il est clair que (i) $\Rightarrow$ (ii), d'après (2.2). Prouvons donc l'assertion (i).

Le « bord » $x_n = 0$ de $\bar{R}_+^n$ étant non caractéristique pour P , on a $p(x', 0; 0, \pm 1) \neq 0$, $\forall x' \in R^{n-1}$. Par continuité, il existe donc un voisinage $\tilde{\Omega}$ de $\{x_n = 0\}$ dans R^n , dans lequel on a: $p(x; 0, \pm 1) \neq 0$. Alors, si ω est un ouvert relativement compact de $\tilde{\Omega}$, il existe un voisinage conique γ de $\{\xi' = 0\}$ dans $R^n \setminus 0$ tel que $p(x, \xi) \neq 0$ dans un voisinage $\tilde{I}$ de $\omega \times \gamma$. Dans ce cas, on sait qu'il existe $Q \in L^{-m}(R^n)$, propre, tel que:

$$QP = I + R, \quad \text{avec } R \in L^{-\infty}(\omega \times \gamma) \cap L^0(R^n)$$

et un tel Q est unique modulo $L^{-\infty}(\omega \times \gamma)$. En fait on va voir, par une construction explicite qu'on peut choisir Q classique et de transmission par rapport à $x_n = 0$. (Remarque: l'existence d'un tel Q résulterait directement de (4)).

Cherchons le symbole complet de Q sous la forme:

$$\sigma(Q) \sim \sum_{j \geq 0} q_j \quad \text{avec } q^s(x, \xi) \text{ homogène de } d_0 - m - j \text{ en } \xi.$$

On a d'après une formule classique:

$$\sigma_{QP} \sim \sum_{\alpha, j, k} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha q_j D_x^\alpha p_k$$

(le terme général de cette somme étant homogène en ξ de degré $-m-j-|\alpha|+m-k = -j-k-|\alpha|$), d'où les conditions:

$$\begin{aligned} q_0(x, \xi) p_0(x, \xi) &= 1 \quad \text{dans } \omega \times \gamma \\ \sum_{j+k+|\alpha|=l} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha q_j D_x^\alpha p_k &= d \quad \text{ans } \omega \times \gamma \text{ pour } l \geq 1. \end{aligned}$$

Soit alors $\chi \in C^\infty(R^n \times R^n \setminus 0)$, homogène de degré 0 en ξ , égale à 1 dans $\omega \times \gamma$, à support dans $\tilde{I}$.

Il suffit alors de prendre:

$$q_0(x, \xi) = \frac{\chi(x, \xi)}{p_0(x, \xi)}$$

et on calcule les q_l ($l \geq 1$) de proche en proche:

$$q_l(x, \xi) = - \frac{\chi(x, \xi)}{p_0(x, \xi)} \cdot \sum_{\substack{j+k+|\alpha|=l \\ j \leq l-1}} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha q_j(x, \xi) D_x^\alpha p_k(x, \xi).$$

On vérifie immédiatement que Q est de transmission par rapport à $x_n = 0$.

Posons maintenant $Pu = f$, et appliquons notre parametrix microlocale Q aux deux membres de cette égalité:

$$QPu = Qf$$

soit:

$$u = Qf - Ru.$$

Soit alors $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$; on a:

$$\varphi u = \varphi Qf - \varphi Ru.$$

On a alors $\varphi R = r(x, D) \in L^{-\infty}(R^n X\gamma)$, donc:

$$\varphi Ru \in H^{s+k, \lambda-s-k}(R^n) \quad \forall k \text{ à } N$$

d'après le théorème (2.8), si on a $u \in H_{\text{loc}}^{s, \lambda-s}(R^n)$.

Choisissant alors k tel que $s + k \geq \sigma$, on a bien:

$$\varphi Ru \in H^{\sigma, \lambda-\sigma}(R^n).$$

D'autre part, on a par hypothèse $f|_{x_n > 0} \in H_{\text{loc}}^{\sigma-m, \lambda-\sigma}(\bar{R}_+^n)$; soit alors $\tilde{f} \in H_{\text{loc}}^{\sigma-m, \lambda-\sigma}(R^n)$ un prolongement de f .

Supposant $\sigma > s$ (sinon (i) est trivial), on a:

$$\begin{cases} f - \tilde{f} \in H_{\text{loc}}^{s-m, \lambda-s}(R^n) \\ f - \tilde{f}|_{x_n > 0} = 0 \end{cases}$$

et comme:

$$Qf = Q(f - \tilde{f}) + Q\tilde{f}$$

on a, en appliquant le théorème (3.1) et (2.6) respectivement:

$$\begin{aligned} Q(f - \tilde{f})|_{x_n > 0} &\in H_{\text{loc}}^{s+k, \lambda-s-k}(\bar{R}_+^n), \quad \forall k \in N \\ Q\tilde{f}|_{x_n > 0} &\in H_{\text{loc}}^{\sigma, \lambda-\sigma}(\bar{R}_+^n) \end{aligned}$$

d'où (i) en prenant k tel que $s + k \geq \sigma$. C.Q.F.D.

EXEMPLE. — Si P est un opérateur différentiel, (4.1) s'écrit:

$$\left. \begin{aligned} u &\in H_{\text{loc}}^{s, \lambda-s}(\bar{R}_+^n) \\ Pu &\in H_{\text{loc}}^{\sigma-m, \lambda-\sigma}(\bar{R}_+^n) \end{aligned} \right\} \Rightarrow u \in H_{\text{loc}}^{\sigma, \lambda-\sigma}(\bar{R}_+^n)$$

ce qui n'est autre chose que le théorème (1.1) de Hörmander.

Dans le cas où P n'est plus différentiel, on peut donner une autre formulation de la partie (i) de (4.1), faisant intervenir le « prolongement par 0 ».

Donnons d'abord deux résultats sur le prolongement par 0 d'une distribution.

(4.2) *L'application de $C_0^\infty(\bar{R}_+^n)$ dans $S'(R^n)$ définie par: $u \mapsto u^0$ ($u^0 = u$ si $x_n = 0$; $u^0 = 0$ si $x_n < 0$) vérifie, pour $-\frac{1}{2} < s < \frac{1}{2}$ la majoration:*

$$\|u^0\|_{s,t} \leq C_{s,t} \|u\|_{s,t}$$

et se prolonge donc en une application continue:

$$\begin{aligned} H^{s,t}(\bar{R}_+^n) &\rightarrow H^{s,t}(R^n) \\ u &\mapsto u^0 \end{aligned}$$

Pour la démonstration, le lecteur est invité à se reporter à (6), ainsi qu'à la remarque précédant l'énoncé de (4.3) dans l'introduction.

(4.2') Soit $P \in L^m(R^n)$, un OPD propre, de transmission par rapport à l'hyperplan $x_n = 0$. Alors, l'application

$$u \mapsto P(u^0)|_{x_n > 0}$$

est, pour $s > -\frac{1}{2}$, continue de $H_{\text{loc}}^{s,t}(\bar{R}_+^n)$ dans $H_{\text{loc}}^{s-m,t}(\bar{R}_+^n)$.

DÉMONSTRATION. — La proposition est triviale pour $-\frac{1}{2} < s < \frac{1}{2}$, d'après la définition de u^0 et (2.6).

Nous allons montrer que (4.2') est encore vraie pour $-\frac{1}{2} + k < s < \frac{1}{2} + k$, k entier positif.

On va procéder par récurrence, et voir que si la propriété est vraie pour k , elle l'est aussi pour $k + 1$.

On a besoin du:

LEMME 3. — On a, dans $H^{s+1,t}(\bar{R}_+^n)$ l'équivalence de normes:

$$\|w\|_{s+1,t} \sim \|w\|_{s,t} + \sum_{j=1}^n \|D_{x_j} w\|_{s,t}.$$

Démonstration triviale, compte tenu de ce que l'on a:

$$(1 + |\xi|^2)^{(s+1)/2} \sim (1 + |\xi|^2)^{s/2} + \sum_{j=1}^n \xi_j (1 + |\xi|^2)^{s/2}.$$

Ceci étant dit, prenant $w = P(u^0)|_{x_n > 0}$, on obtient:

$$\|w\|_{s'+1,t} \sim \|w\|_{s',t} + \sum_{j=1}^n \|D_{x_j}(P(u^0)|_{x_n > 0})\|_{s',t}$$

avec $s' = s - m$.

D'après l'hypothèse de récurrence: $\|w\|_{s-m,t} < \infty$; il reste à examiner les termes sous $\sum$.

On a :

$$D_{x_j} P(u^0) = P(D_{x_j} u^0) + [D_{x_j}, P] \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n.$$

1) pour $j \neq n$, on a $D_{x_j} u^0 = (D_{x_j} u)_0$, donc $\|D_{x_j} u\|_{s-m, t} < \infty$ puisque $D_{x_j} u \in H^{s, r}(\bar{R}_+^n)$, et $[D_{x_j}, P] \in L^{m-1}(\bar{R}^n)$ étant de transmission.

2) pour $j = n$, on a : $D_{x_n}(u^0) = (D_{x_n} u)^0 + \gamma_0 u \otimes \delta_{x_n}$.

La conclusion résulte alors de (3.6), compte tenu de (2.2) et du fait que P est de transmission :

$$u \in H^{s+1, t}(R^n) \Rightarrow \gamma_0 u \in H^{s+t+\frac{1}{2}}(\bar{R}^{n-1}),$$

d'où :

$$P(\gamma_0 u \otimes \delta_{x_n})|_{x_n > 0} \in H^{s-m, t}(\bar{R}_+^n).$$

Enfin, on peut prouver que (4.2') est vrai pour $s = -\frac{1}{2} + k$, k entier, par interpolation.

(4.3) THÉORÈME. — *Sous les mêmes hypothèses sur P que dans (4.1), on a :*

$$\left. \begin{array}{l} u \in H_{\text{loc}}^{s, \lambda-s}(\bar{R}_+^n), \quad s > -\frac{1}{2} \\ P(u^0)|_{x_n > 0} \in H_{\text{loc}}^{\sigma-m, \lambda-\sigma}(\bar{R}_+^n) \end{array} \right\} \Rightarrow u \in H_{\text{loc}}^{s, \lambda-s}(\Omega)$$

où Ω est défini comme dans (4.1) et u^0 désignant le prolongement par 0 de u .

DÉMONSTRATION. — a) Cas où $s \geq 0$. Alors $H_{\text{loc}}^{s, \lambda-s} \subset H_{\text{loc}}^{0, \lambda}$ donc, en appliquant le lemme de prolongement (4.2) on peut prendre $u^0 \in H_{\text{loc}}^{0, \lambda}(R^n)$. Il suffit d'appliquer (4.1) avec $s = 0$.

b) Cas où $-\frac{1}{2} < s < 0$. Alors, d'après (4.2), on peut prendre $u^0 \in H_{\text{loc}}^{s, s-\lambda}(R^n)$ et on applique (4.1) dans le cas général. C.Q.F.D.

5. — Systèmes à multi-degré.

Nous nous proposons, dans ce dernier paragraphe, de généraliser les résultats d'hypoellipticité partielle précédents aux systèmes à multi-degré au sens d'Agmon-Douglis-Nirenberg. (En abrégé: ADN dans le texte). Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, la démonstration de Hörmander (théorème (1.1)) ne s'applique pas aux systèmes (même dans le cas différentiel), car on est dans l'impossibilité d'isoler un terme de plus haut degré.

Les résultats sont analogues à ceux obtenus au § 4 l'analogie étant particulièrement frappante dans le cas où l'on a à faire à un système différentiel elliptique.

Rappelons rapidement les principales définitions et les propriétés les plus élémentaires de ces systèmes à multi-degré. Pour plus de détails, on pourra se reporter à (5).

REMARQUE. — Dans la suite, toutes les matrices d'OPD considérées seront carrées, d'ordre $N \times N$.

Soit $P = (P_{ij})$ une matrice carrée avec $P_{ij} \in L^{m,ij}(R^n)$. On dit que P est un système à multi-degré au sens d'ADN s'il existe $s = (s_i) \in Z^N$ et $t = (t_j) \in Z^N$ tels que $m_{ij} = t_j - s_i$. On écrira alors :

$$P \in L^{s,t}(R^n).$$

On remarquera que si $P \in L^{s,t}(R^n)$, on a aussi $P \in L^{s+r,t+r}(R^n)$, $r \in R$ (avec la convention :

$$(s_i) + r = (s_i + r)$$

$$(t_j) + r = (t_j + r)$$

D'autre part, pour tout multi-indice $r = (r_k)$ on pose :

$$R^r(R^n) = \prod_{k=1}^N R^{r_k}(R^n).$$

De même :

$$H^{r,u}(R^n) = \prod_{k=1}^N R^{r_k, u_k}(R^n), \quad u = (u_1, \dots, u_k)$$

et pour $u \in R$, on identifie : u et $(u, \dots, u)$.

Alors on a, si P est propre (i.e. si chaque P_{ij} l'est) :

$$(5.0) \quad P: H_{\text{loc}}^{t,u}(R^n) \rightarrow H_{\text{loc}}^{s,u}(R^n) \text{ si } u \in R$$

(continuité Sobolev des systèmes à multi-degré).

On a alors le théorème :

(5.1) THÉORÈME. — Soit $P = (P_{ij}) \in L^{s,t}(R^n)$ un système à multi-degré au sens d'ADN, propre. On suppose que P est de transmission par rapport à $\{x_n = 0\}$ (i.e. chaque P_{ij} l'est), et que cet hyperplan est non caractéristique pour P (c'est à dire : $\det [p_{ij}(x', 0; 0, 1)] \neq 0, \forall x' \in R^{n-1}$). Alors, il existe un voisinage Ω de $\{x_n = 0\}$ dans $\bar{R}_+^n$ tel que :

$$\left. \begin{array}{l} u \in H_{\text{loc}}^{\alpha, t-\alpha}(R^n), \quad \alpha \in R \\ Pu|_{x_n > 0} \in H_{\text{loc}}^{s+t, -t}(\bar{R}_+^n), \quad \varrho \in R \end{array} \right\} \Rightarrow u_{x_n > 0} \in H_{\text{loc}}^{t+l, \tau-t-l}(\Omega) \quad \tau = \inf(t_i)$$

DÉMONSTRATION. — Exactement comme dans (4.1), on construit un voisinage $\tilde{\Omega}$ de $\{x_n = 0\}$ dans R^n , et pour tout ouvert ω relativement compact dans $\tilde{\Omega}$, une paramétrix microlocale Q de P :

$$QP = I + R, \quad R \in L^{-\infty}(\omega X \gamma) \cap L^0(R^n)$$

$Q \in L^{t,s}(R^n)$, propre, de transmission par rapport à $\{x_n = 0\}$.

Posons alors:

$$Pu = F$$

et appliquons Q aux deux membres:

$$\varphi u = \varphi QF - \varphi Ru$$

avec $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$, ω ouvert relativement compact dans $\tilde{\Omega}$. Examinons le terme φRu . On a:

$$\varphi Ru = ((\varphi Ru)_i)$$

avec:

$$(\varphi Ru)_i = \sum_{1 \leq j \leq N} \varphi R_{ij} u_j.$$

Posant alors $\tau = \inf(t_j)$, le fait que $u_j \in H_{\text{loc}}^{\alpha, t_j - \alpha}(R^n)$ implique que:

$$(\varphi Ru)_i \in \sum_{1 \leq j \leq N} H^{\alpha+k, t_j - \alpha - k} \subset \sum_{1 \leq j \leq N} H^{t_i + l, t_j - t_i - l}$$

soit, en choisissant k tel que $\alpha + k \geq t_i + \varrho$, $\forall i$:

$$(\varphi Ru)_i \in H^{t_i + l, \tau - t_i - l}(\tilde{\Omega})$$

c'est à dire finalement:

$$Ru \in H_{\text{loc}}^{t+l, \tau-t-l}(\Omega), \quad \Omega = \tilde{\Omega} \cap \bar{R}_+^n.$$

Passons maintenant à l'étude du terme φQF . Elle se fait comme dans (4.1).

Soit $\tilde{F} \in H_{\text{loc}}^{s+t, -t}(R^n)$ un prolongement de $F|_{x_n > 0}$. On a:

$$QF = Q(F - \tilde{F}) + Q\tilde{F}.$$

Il est clair que $Q\tilde{F}|_{x_n > 0} \in H_{\text{loc}}^{t+l, -l}(\bar{R}_+^n)$ d'après (5.0) et par restriction.

D'autre part on a $F = Pu$, donc $F_i = \sum_{1 \leq j \leq N} P_{ij} u_j$ est dans la somme des espaces:

$$H_{\text{loc}}^{\alpha-t_i+s_i, t_j-\alpha}(R^n)$$

soit:

$$F_i \in H_{\text{loc}}^{\alpha-T_i+s_i, T-\alpha}(R^n), \quad T = \max(t').$$

Comme, quitte à diminuer α , on peut supposer $\alpha - T \leq \varrho$, on a:

$$F - \tilde{F} \in H_{\text{loc}}^{\alpha-T+s, T-\alpha}(R^n), \quad F - \tilde{F}|_{x_n > 0} = 0$$

d'où:

$$Q(F - \tilde{F})|_{x_n > 0} \in H_{\text{loc}}^{\alpha-T+k+t, T-\alpha-k}(\bar{R}_+^n)$$

et il suffit de choisir k tel que $\alpha - T + k \geq \varrho$.

Le théorème (5.1) en résulte, compte tenu de ce que $H_{\text{loc}}^{t+l, -l}(\bar{R}_+^n) \subset H_{\text{loc}}^{t+l, \tau-t-l}(R_+^n)$, puisque $\tau_i - t_i \leq 0$, $\forall i$. C.Q.F.D.

Dans le cas où P est un système différentiel elliptique, on obtient la généralisation annoncée du théorème (1.1) de Hörmander:

(5.2) THÉORÈME. — On suppose que $P \in L^{s,t}(R^n)$ est un système différentiel elliptique. Alors on a:

$$(i) \quad \left. \begin{array}{l} u \in H_{\text{loc}}^{\alpha, t-\alpha}(\bar{R}_+^n) \\ Pu \in H_{\text{loc}}^{s+l, -l}(\bar{R}_+^n), \quad \varrho \in R \end{array} \right\} \Rightarrow u \in H_{\text{loc}}^{t+l, -l}(\bar{R}_+^n)$$

(ii) sous les hypothèses de (i), u_i admet pour tout entier $k_0 < t_i + \varrho - \frac{1}{2}$ des traces sectionnelles en $x_n = 0_+$ jusqu'à l'ordre k_0 , et on a:

$$\gamma u_i \in H^{t-k-\frac{1}{2}}(R^{n-1}) \quad (k \leq k_0).$$

DÉMONSTRATION. — (ii) résulte de (i) grâce à (2.2). Pour (i), il suffit de reprendre la démonstration de (5.1), en tenant compte de ce que F étant elliptique, on a globalement:

$$R \in L^{-\infty}(R^n)$$

donc $R\tilde{u}$ ($\tilde{u}$: prolongement de u) sera tout simplement dans $C^\infty(R^n) \subset H_{\text{loc}}^{t+l, -l}(R^n)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. HÖRMANDER, *Linear Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1963.
- [1'] L. HÖRMANDER, *Pseudo-differential Operators and Non Elliptic Boundary Problems*, Ann. of Math., **83** (1966).

- [2] L. BOUTET DE MONVEL, *Boundary Problems for Pseudo-Differential Operators*, Acta Mathematica, **126**, 1971, Uppsala.
 - [2'] L. BOUTET DE MONVEL, *Comportement d'un OPD sur une Variété à Bord*, J. Anal. Math., **17** (1966), pp. 241-301.
 - [3] F. TREVES, *Linear Partial Differential Equations with Constant Coefficients*, Gordon and Breach, 1966.
 - [4] A. HIRSCHOWITZ - A. PIRIOU, *Propriétés de Transmission pour les Distributions Integrales de Fourier*, preprint, 1977; à paraître dans *Communications in Partial Differential Equations*.
 - [5] S. AGMON - A. DOUGLIS - L. NIRENBERG, *Boundary Estimates for Elliptic Equations, II*, Comm. Pure and Appl. Math., **17** (1964).
 - [6] LIONS-MAGENES, *Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications*, Volume 1, Dunod, Paris, 1968.
-