Sulla struttura dello spazio-tempo (*) (**).

RENATO GRASSINI (Napoli)

Summary. – *The paper fits in the sphere of foundational researches on Physical Geometry.*

A methodological line is followed which aims at giving general mathematical models of space and time and capturing the foundational value of the corresponding chronogeometrical structures; along this line a canonical model of space-time is provided which forms the largest substratum underlying both the Newtonian and the relativistic models of space-time, whose peculiar features are then derived by means of the invariance conditions imposed upon the chronogeometrical structures by some additional physical hypotheses.

Introduzione.

Con lo sviluppo della Teoria della Relatività è invalso il punto di vista di considerare *elemento primitivo* della Geometria Fisica, sia nelle teorie newtoniane che in quelle relativistiche, lo *spazio-tempo* o *universo degli eventi*, di cui poi ciascuna teoria è intesa fornire un particolare *modello matematico*. Ne è seguita quindi l'esigenza di analizzare in dettaglio le strutture inerenti i suddetti modelli e specialmente le relazioni fra tali strutture e le assunzioni fisiche che esse esprimono [1].

Per tal via si è venuto costituendo un quadro di *ricerche comparate* sui fondamenti della Geometria Fisica newtoniana e relativistica, nel quale si distinguono due linee direttrici principali: da un lato le ricerche sugli aspetti relativistici dello spazio-tempo newtoniano [2-5], rivolte ad analizzare in questo le successive strutture geometrico-differenziali (conforme, proiettiva, affine, metrica) assunte come fondamentali in Relatività [6, 7]; dall'altro le ricerche sugli aspetti newtoniani dello spazio-tempo relativistico [8-12], rivolte a derivare in questo strutture corrispondenti alle nozioni newtoniane di spazio e tempo ed aventi il significato operativo di osservabili fisiche.

Recentemente si è venuta poi configurando una terza linea di ricerca, rivolta alla descrizione formale generale dello spazio e del tempo ed al recupero del valore fondamentale delle corrispondenti *strutture cronogeometriche*.

Precisamente, nell'ambito di tale linea di ricerca, C. Harrison ha introdotto [13] nell'universo degli eventi strutture cronogeometriche *globali* (*sistema spazio-temporale, classe canonica di sistemi spazio-temporali*) che risultano un comune fondamento delle teorie *piatte*, newtoniane e relativistiche, dello spazio-tempo.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica del C.N.R.

(**) Entrata in Redazione il 5 dicembre 1978.

D'altra parte, nell'ambito della medesima linea di ricerca, ho introdotto [14-16] in un modello generale d'universo, costituito da una 4-varietà a connessione affine [17], strutture cronogeometriche *locali* (1-forma temporale, metrica spaziale, connessione spaziale) che risultano comuni anche alle teorie *non piate* dello spazio-tempo.

Nel presente lavoro, sulla base di quest'ultima impostazione metodologica, propongo una generalizzazione della teoria formale di C. Harrison che, sintetizzando i risultati cronogeometrici dei vari lavori precedentemente citati, realizza un approccio fondazionale unificato a *tutte* le teorie, newtoniane e relativistiche, dello spazio-tempo. Momento centrale di tale approccio è l'individuazione di un *modello canonico di spazio-tempo*, che evidenzia il completo bagaglio di strutture cronogeometriche e corrispondenti assunzioni fisiche costituenti il comune fondamento delle suddette teorie.

Il piano del lavoro ⁽¹⁾ è il seguente:

(i) In una 4-varietà M , assunta come modello matematico fondamentale d'universo, si ridefiniscono (§§ 1, 2) le strutture cronogeometriche di C. Harrison, in corrispondenza a nozioni locali di spazio e tempo intese nella molteplicità delle relative determinazioni fisiche.

(ii) L'introduzione in M di una classe canonica C di sistemi spazio-temporali e di una connessione affine D , collegate da naturali condizioni di compatibilità, conduce (§ 3) al preannunciato modello canonico di spazio-tempo.

(iii) Condizioni di invarianza imposte all'interno di C da un principio di isotropia ottica e dal suo limite newtoniano conducono (§§ 4, 5) alle specializzazioni einsteiniana e newtoniana del modello canonico. La prima viene a identificarsi (nel caso generale) con lo spazio-tempo di Einstein-Cartan [23, 24], di cui poi la seconda fornisce l'analogo newtoniano.

1. – Sistema spazio-temporale.

1.1 Definizione.

Sia M una varietà differenziale reale 4-dimensionale, assunta come modello matematico fondamentale d'universo.

Le nozioni di spazio e tempo (e quelle correlate di misura ed evoluzione) saranno modellate in M mediante la struttura di *sistema spazio-temporale* S , definito come segue:

1-1 DEFINIZIONE. – S è un sistema spazio-temporale in M se è

$$S = (II, g, \nabla),$$

⁽¹⁾ Per le tecniche matematiche in esso adoperate (teoria dei fibrati vettoriali e strutture associate), cf. [18-20]; per le tecniche logiche (metodo di assiomatizzazione mediante predicati teorico-insiemistici), cf. [21, 22].

denotando (Π, g, ∇) un insieme costituito da una struttura quasi-prodotto Π , una metrica lorentziana g ed una connessione affine ∇ verificanti i seguenti assiomi:

(S1) Π decompone il fibrato tangente TM nella somma di Whitney

$$(1.1) \quad TM = \sigma \oplus \theta,$$

dove σ denota una distribuzione 3-dimensionale e θ una distribuzione orientata 1-dimensionale su M .

(S2) g si decompone nella somma ⁽²⁾

$$(1.2) \quad g = g_\sigma \circ \mathcal{F}_\sigma + g_\theta \circ \mathcal{F}_\theta,$$

dove g_σ denota una metrica fibrata definita positiva in σ e g_θ una metrica fibrata definita negativa in θ .

(S3) ∇ si decompone nella somma

$$(1.3) \quad \nabla = \nabla_\sigma \circ \mathcal{F}_\sigma + \nabla_\theta \circ \mathcal{F}_\theta,$$

dove ∇_σ denota una connessione metrica in σ e ∇_θ una connessione metrica in θ .

1.2 Proprietà.

a) L'assioma (S1) descrive, precisandone la struttura topologica, le nozioni di spazio e tempo locali.

Precisamente, Π definisce nello spazio tangente $T_x M$ (per ogni $x \in M$) due relazioni di equivalenza, caratterizzate da quozienti Σ_x e Θ_x costituiti dai laterali di θ_x e σ_x rispettivamente, tali che, stante (1.1), $T_x M$ risulta isomorfo, tramite le corrispondenti proiezioni canoniche, al prodotto cartesiano 3 + 1-dimensionale $\Sigma_x \times \Theta_x$.

Identificando $T_x M$ con un intorno infinitesimo di x in M , le suddette relazioni saranno allora interpretate come relazioni di *genidentità* e *simultaneità locali* in M , ossia relazioni i cui quozienti Σ_x e Θ_x (isomorfi a σ_x e θ_x rispettivamente) definiscono *spazio* e *tempo locali* in M (per questi assumendo valida l'ordinaria geometria affine). Il prefissato orientamento su θ , che sarà denotato con f , corrisponderà poi all'assunzione che sia univocamente determinato il verso del tempo.

Con riferimento al sistema S , σ e θ si diranno *distribuzioni spaziale* e *temporale* e Π , che le sintetizza, *struttura spazio-temporale*.

Si osservi che la distribuzione temporale θ , essendo 1-dimensionale, è senz'altro integrabile. È pertanto possibile riguardare le varie relazioni di genidentità locale

⁽²⁾ Con $\mathcal{F}_\sigma: TM \rightarrow \sigma$, $\mathcal{F}_\theta: TM \rightarrow \theta$ si indicheranno le proiezioni su σ e θ definite da Π in TM .

come determinazioni di un'unica relazione di *genidentità globale*, caratterizzata da un quoziente Σ costituito dalle sottovarietà integrali massimali di θ . Lo *spazio globale* Σ (recante generalmente una struttura differenziale, ma non affine) sarà inteso rappresentativo di un continuo 3-dimensionale di particelle (reali o ideali) ovvero di un *sistema di riferimento*, costituente il supporto fisico di S .

b) L'assioma (S2) definisce la struttura metrica dello spazio e del tempo locali.

Precisamente, g si decompone, stante (1.2), in una coppia di metriche degeneri (semidefinite e di opposte segnature), $g_\sigma \circ \mathcal{T}_\sigma$ e $g_\theta \circ \mathcal{T}_\theta$, che risultano invarianti per trasformazioni di TM preservanti rispettivamente la genidentità e la simultaneità.

I relativi intervalli elementari saranno allora interpretati come *intervalli spaziale e temporale*, corrispondenti alle misure locali di distanza e durata (per queste assumendo valida l'ordinaria geometria euclidea).

Con riferimento al sistema S , g_σ e g_θ si diranno *metriche spaziale e temporale* e g , che le sintetizza, *metrica spazio-temporale* ⁽³⁾.

Al fine di un'ulteriore caratterizzazione delle metriche g verificanti l'assioma (S2), consideriamo, insieme alla classe $\mathcal{L}$ delle metriche suddette, la classe $\mathcal{L}'$ delle coppie (τ, h) costituite da

(i) una *1-forma temporale* τ ⁽⁴⁾, ossia una 1-forma ovunque non nulla in M verificante le condizioni

$$(1.4) \quad \text{Ker}(\tau) = \sigma$$

$$(1.5) \quad \tau - \text{or}(\theta) = f \text{ } ^{(5)}$$

(una siffatta 1-forma, oltre a descrivere la struttura topologica e l'orientamento del tempo locale, definisce una metrica temporale k data da $k \circ \mathcal{T}_\theta = -\tau \otimes \tau$);

(ii) una *metrica spaziale* h ⁽⁶⁾.

Ogni metrica $g \in \mathcal{L}$ è suscettibile, in modo univoco, della decomposizione

$$(1.6) \quad g = -\tau \otimes \tau + h \circ \mathcal{T}_\sigma,$$

in cui la coppia $(\tau, h) \in \mathcal{L}'$ è data da

$$(1.7) \quad \tau = -g(\gamma)$$

$$(1.8) \quad h = g_\sigma,$$

⁽³⁾ L'introduzione in M della metrica spazio-temporale g consente di fornire un'interpretazione potenzialmente operativa alla struttura differenziale di M , che viene infatti ad ammettere un atlante di coordinate interpretabili, nell'intorno infinitesimo di ciascun punto, come misure di distanza e durata.

⁽⁴⁾ Cf. [14], pp. 721-722.

⁽⁵⁾ Si è posto $\text{Ker}(\tau) = \{u \in TM: \langle \tau, u \rangle = 0\}$; inoltre $\tau - \text{or}(\theta)$ denota il τ -orientamento di θ (definito dal generatore globale $\tilde{\nu}$ caratterizzato dalla condizione $\langle \tau, \tilde{\nu} \rangle = 1$).

⁽⁶⁾ Cf. [16], p. 510.

denotando γ il generatore globale f -orientato di θ caratterizzato dalla condizione

$$(1.9) \quad g(\gamma, \gamma) = -1$$

e $g(\gamma)$ la relativa immagine nell'isomorfismo definito da g fra TM e il suo duale.

D'altra parte, ad ogni coppia $(\tau, h) \in \mathcal{L}'$ l'equazione (1.6) associa evidentemente una metrica $g \in \mathcal{L}$, sicchè sussiste la seguente proposizione:

1-2 PROPOSIZIONE. — L'equazione (1.6) definisce una biiezione di $\mathcal{L}$ su $\mathcal{L}'$.

c) L'assioma (S3) introduce una connessione tra le varie determinazioni dello spazio e del tempo locali.

Precisamente, ∇ si scompone, stante (1.3), in una coppia di connessioni metriche in M , $\nabla_\sigma \circ \mathcal{F}_\sigma$ e $\nabla_\theta \circ \mathcal{F}_\theta$, che risultano invarianti per trasformazioni preservanti rispettivamente la genidentità e la simultaneità.

Le corrispondenti derivazioni covarianti saranno allora interpretate come *derivazioni spaziale* e *temporale*, atte a descrivere localmente (in accordo con l'ordinaria geometria euclidea) l'evoluzione relativa, spaziale e temporale, di grandezze fisiche.

Con riferimento al sistema S , ∇_σ e ∇_θ si diranno *connessioni spaziale* ⁽⁷⁾ e *temporale* e ∇ , che le sintetizza, *connessione spazio-temporale*.

Al fine di un'ulteriore caratterizzazione della connessione spazio-temporale ∇ , consideriamone i coefficienti $\tilde{\omega}_j^i$ ⁽⁸⁾ relativi alla generica sezione s del fibrato

$$B(\Pi) = \{ \langle e_i \rangle / e_\alpha \in \sigma, e_0 \in \theta \}$$

costituito dalle basi di TM adattate a Π .

La scomponibilità (1.3), che equivale alla duplice condizione di σ e θ -riducibilità di ∇ , è espressa in s dalle equazioni ⁽⁹⁾

$$(1.10) \quad \tilde{\omega}_\alpha^0 = 0, \quad \tilde{\omega}_0^\alpha = 0;$$

i rimanenti coefficienti $\tilde{\omega}_\alpha^\beta$, $\tilde{\omega}_0^0$ caratterizzano le connessioni ridotte ∇_σ e ∇_θ , il cui carattere metrico è espresso in s , se questa è g -ortonormale, dalle condizioni di antisimmetria ⁽¹⁰⁾

$$(1.11) \quad \tilde{\omega}_\beta^\alpha + \tilde{\omega}_\alpha^\beta = 0, \quad \tilde{\omega}_0^0 = 0.$$

Sussiste pertanto le seguente proposizione:

⁽⁷⁾ Cf. [15], p. 212.

⁽⁸⁾ Gli indici latini variano da 0 a 3, quelli greci da 1 a 3.

⁽⁹⁾ Cf. [15], p. 216.

⁽¹⁰⁾ Cf. [18], p. 118.

1-3 PROPOSIZIONE. — La connessione spazio-temporale ∇ ammette, in ogni sezione g -ortonormale di $B(\Pi)$, coefficienti verificanti le condizioni (1.10, 11).

d) Sia $S = (\Pi, g, \nabla)$ un sistema spazio-temporale in M .

1-4 DEFINIZIONE. — S è un sistema spazio-temporale *piatto* se ∇ è una connessione globalmente piatta in M ⁽¹¹⁾.

La connessione globalmente piatta ∇ stabilisce tra le fibre di TM un isomorfismo canonico che consente di identificarle tutte con un unico spazio vettoriale M . Nel suddetto isomorfismo si corrispondono isometricamente, stante (S3), sia le fibre di σ che quelle di θ . Di conseguenza, stante (S1) e (S2), il sistema piatto S risulta caratterizzato nello spazio affine (M, M) come segue:

(i) La struttura $\Pi = (\sigma, \theta)$ risulta costituita da una coppia di sottospazi vettoriali supplementari di M (con θ direzione orientata). Questi definiscono in M due relazioni di equivalenza (genidentità e simultaneità globali), caratterizzate da quozienti Σ e Θ (spazio e tempo globali) costituiti dai sottospazi affini di direzione θ e σ rispettivamente e muniti di naturali strutture affini (Σ, σ) , (Θ, θ) che rendono un isomorfismo la proiezione canonica di M nel prodotto cartesiano $\Sigma \times \Theta$.

(ii) La metrica spazio-temporale $g = (g_\sigma, g_\theta)$ risulta costituita da una coppia di metriche strettamente euclidee (di opposte segnature) in (Σ, σ) e (Θ, θ) , cui corrispondono in M intervalli spaziale e temporale globali.

(iii) La connessione spazio-temporale $\nabla = (\nabla_\sigma, \nabla_\theta)$ risulta costituita dalla coppia delle connessioni piatte di (Σ, σ) e (Θ, θ) , cui corrispondono le derivazioni ordinarie in σ e θ .

2. — Classe canonica di sistemi spazio-temporali.

2.1 Definizione.

Il carattere relativo (al sistema di riferimento) delle nozioni di spazio e tempo, modellate in M mediante la struttura di sistema spazio-temporale, induce a considerare in M classi di sistemi siffatti.

Precisamente, ad ogni collezione di sistemi di riferimento corrisponderà in M una *classe canonica* C di sistemi spazio-temporali, definita come segue:

2-1 DEFINIZIONE. — C è una classe canonica di sistemi spazio-temporali in M se è

$$C = \{S, S', \dots\},$$

⁽¹¹⁾ ∇ è cioè caratterizzata, in coordinate globali su M , da coefficienti identicamente nulli.

denotando $\{S, S', \dots\}$ un insieme costituito da sistemi spazio-temporali in M verificanti i seguenti assiomi:

(C1) Per ogni $S, S' \in C$, ed in ogni punto di M , vale la disequazione ⁽¹²⁾

$$(2.1) \quad g(\gamma, \gamma') < 0.$$

(C2) Per ogni $S, S' \in C$, ed in ogni punto di M , valgono le implicazioni ⁽¹³⁾

$$(2.2) \quad \theta = \theta' \Rightarrow \tau = \tau'$$

$$(2.3) \quad \sigma = \sigma' \Rightarrow h = h'$$

e inoltre

$$(2.4) \quad \sigma = \sigma' \Rightarrow \nabla_\sigma = \nabla_{\sigma'}.$$

2.2 Proprietà.

a) L'assioma (C1) impone a C una condizione di ammissibilità fisica.

Precisamente, siano T_c la classe dei vettori del *genere tempo* (costituita dai vettori non nulli appartenenti alle distribuzioni temporali di C) ed S_c la classe dei vettori del *genere spazio* (costituita dai vettori non nulli appartenenti alle distribuzioni spaziali di C). Da (C1) segue che dette classi sono disgiunte,

$$(2.5) \quad T_c \cap S_c = \emptyset.$$

Inoltre ciascun sistema $S \in C$ realizza, mediante le sottoclassi

$$T_c^- = \{u \in T_c : g(\gamma, u) > 0\}$$

$$T_c^+ = \{u \in T_c : g(\gamma, u) < 0\},$$

una *partizione passato-futuro* P_s di T_c che, stante (C1), risulta invariante al variare di S in C . Infatti, indicata con u' la componente del generico vettore $u \in T_c$ lungo il generatore γ' della distribuzione temporale θ' che lo contiene, per ogni $S \in C$ sussiste, stante (2.1), l'equivalenza

$$g(\gamma, u) \geq 0 \Leftrightarrow u' \leq 0$$

⁽¹²⁾ Per S' si adotteranno, munite di apici, le medesime notazioni introdotte per S .

⁽¹³⁾ In corrispondenza al generico sistema spazio-temporale S , (τ, h) denoterà la coppia caratterizzata da (1.7,8).

il cui secondo membro è indipendente da S ; ciò prova appunto la preannunciata condizione di invarianza

$$(2.6) \quad P_S = P_{S'} \quad (\forall S, S' \in C).$$

Inversamente, ove sussistano per ipotesi le condizioni (2.5, 6), risulta senz'altro verificato l'assioma (C1). In tal caso infatti, per ogni $S, S' \in C$ ed in ogni punto di M non possono essere verificate nè la condizione $g(\gamma, \gamma') = 0$ (che comporterebbe, in contrasto con (2.5), la relazione assurda $\gamma' \in T_C \cap S_C$), nè la condizione $g(\gamma, \gamma') > 0$ (che, coesistendo con $g'(\gamma', \gamma') = -1$, comporterebbe, stante (2.6), la relazione assurda $\gamma' \in T_C^- \cap T_C^+$); rimane quindi verificata la condizione (2.1) che prova l'asserto.

Sussiste pertanto la seguente proposizione:

2-2 PROPOSIZIONE. — L'assioma (C1) è completamente equivalente alle condizioni (2.5, 6).

Le condizioni (2.5, 6), riguardando i vettori del genere tempo come *traiettorie d'universo* locali di particelle ⁽¹⁴⁾, hanno il seguente significato fisico: la condizione (2.5) è conforme all'assunzione che, rispetto a ciascun sistema di riferimento, ogni particella abbia velocità finita; la condizione (2.6) è conforme all'assunzione che sia invariante l'ordine temporale degli eventi causalmente connettabili.

b) L'assioma (C2) riduce C ad una classe di sistemi spazio-temporali fisicamente distinti.

Precisamente, le condizioni (2.2, 3) richiedono che su ciascuna fibra delle distribuzioni spaziali e temporali di C la struttura metrica, che è a priori determinata solo a meno di isomorfismi, sia univocamente fissata (la (2.2) richiede anche che a ciascuna fibra temporale risulti univocamente associato un ordinamento temporale locale in M).

Analogamente (derivando da (2.2) l'implicazione $\theta = \theta' \Rightarrow \nabla_\theta = \nabla_{\theta'}$) le condizioni (2.2, 4) richiedono che su ciascuna distribuzione spaziale e temporale di C anche la connessione metrica sia univocamente fissata.

Se ne deduce, tenendo conto anche di (2.1), la seguente proposizione:

2-3 PROPOSIZIONE. — I sistemi spazio-temporali $S, S' \dots$ costituenti una classe canonica hanno supporti fisici distinti, ovvero

$$S \neq S' \Leftrightarrow \Sigma \neq \Sigma'.$$

c) Si assuma ora che la classe canonica C corrisponda alla *totalità* dei sistemi di riferimento.

In tal caso, T_C dovrà essere riguardata come la totalità delle traiettorie d'universo locali di particelle; in particolare, ogni distribuzione θ del genere tempo (generata

⁽¹⁴⁾ Cf. il comma a) del n. 1.2.

cioè da sezioni di T_c) rappresenterà un continuo che, stante l'ipotesi dianzi assunta su C , dovrà necessariamente costituire il supporto fisico di un sistema $S \in C$.

Pertanto, nel caso in esame, C deve possedere il seguente requisito di *T-massimalità*:

2-4 DEFINIZIONE. — C è una classe canonica *T*-massimale se, per ogni distribuzione θ del genere tempo, esiste un sistema $S \in C$ che ha θ come sua distribuzione temporale.

d) Sia C una classe canonica di sistemi spazio-temporali in M .

2-5 DEFINIZIONE. — C è una classe canonica *piatta* se è costituita da sistemi piatti aventi la medesima connessione spazio-temporale.

Da un punto di vista geometrico, C individua univocamente in M una struttura di spazio affine $(M, \mathbf{M})$ recante una classe privilegiata di sistemi caratterizzati dai requisiti (i), (ii), (iii) di cui al n. 1.2 d).

Da un punto di vista cinematico, C risulta costituita da sistemi reciprocamente animati di moto traslatorio uniforme. Basta infatti osservare che, indicato con $v = -\mathfrak{F}_\sigma(\gamma')/g(\gamma, \gamma')$ il campo delle velocità relative di due sistemi spazio-temporali S ed S' , dalla condizione $\nabla = \nabla'$, verificata in C , si deduce la condizione $\nabla v = 0$, che caratterizza appunto un moto traslatorio uniforme.

3. — Modello canonico di spazio-tempo.

3.1 Definizione.

In tutte le attuali teorie fisiche il modello matematico fondamentale d'universo M si considera altresì munito di una *connessione fondamentale* D , necessaria ai fini della formulazione differenziale generalmente covariante delle teorie.

Introducendo in M una tal connessione insieme ad una classe canonica di sistemi spazio-temporali, si perviene ad un *modello canonico di spazio-tempo* K , definito come segue:

3-1 DEFINIZIONE. — K è un modello canonico di spazio-tempo se è

$$K = (M, C, D),$$

denotando (M, C, D) un insieme costituito da una 4-varietà M , una classe canonica *T*-massimale C in M ed una connessione affine D in M , verificanti i seguenti assiomi:

(K1) Per ogni $S \in C$ valgono le relazioni

$$(3.1) \quad \nabla_\sigma = \mathfrak{F}_\sigma(D), \quad \nabla_\theta = \mathfrak{F}_\theta(D).$$

(K2) Le classi T_c ed S_c sono *D*-invarianti ⁽¹⁵⁾.

⁽¹⁵⁾ Il trasporto parallelo definito da D in TM trasforma vettori di T_c (risp. S_c) in vettori di T_c (risp. S_c).

Risultano poi separatamente *D*-invarianti le sottoclassi T_c^-, T_c^+ .

3.2 *Proprietà.*

a) L'assioma (*K* 1) determina univocamente, per ogni $S \in C$, il criterio di scelta (che è a priori del tutto arbitrario) della relativa connessione spazio-temporale ∇ .

Precisamente, stante (3.1), ∇ definisce, lungo la generica linea l di M , un trasporto parallelo (e_i) in $B(II)$ che si identifica con il *trasporto generalizzato di Fermi-Walker*, sia della terna spaziale (e_α) ⁽¹⁶⁾ e sia dell'asse temporale e_0 , ivi definito da D mediante le relazioni di *parallelismo naturale*

$$\mathcal{T}_\sigma(e'_\alpha) = e_\alpha, \quad \mathcal{T}_\theta(e'_0) = e_0,$$

in cui la base (e'_i) è da intendersi definita dai differenziali, valutati lungo l , $De_i = e'_i - e_i$.

Dall'assioma (*K*1) si deduce la seguente proposizione:

3-2 PROPOSIZIONE. — In un modello canonico K sussistono, in corrispondenza a ciascun sistema $S \in C$, le *equazioni di struttura*

$$(3.2) \quad \mathcal{T}_{\sigma\sigma}(Dg) = 0, \quad \mathcal{T}_{\theta\theta}(Dg) = 0$$

o equivalentemente

$$(3.3) \quad \mathcal{T}_{\sigma\sigma}(Dh) = 0, \quad \mathcal{T}_\theta(D\tau) = 0.$$

Indicati infatti con ω_j^i i coefficienti di D in una sezione s di $B(II)$, le condizioni (3.1) sono espresse da

$$(3.4) \quad \tilde{\omega}_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\beta, \quad \tilde{\omega}_0^0 = \omega_0^0.$$

Se poi s è g -ortonormale, da (1.11) e (3.4) si deducono le equazioni

$$(3.5) \quad \omega_\alpha^\beta + \omega_\beta^\alpha = 0, \quad \omega_0^0 = 0$$

che, in termini intrinseci, si scrivono nella forma (3.2) o (3.3).

b) L'assioma (*K*2) esprime un naturale requisito di compatibilità fra le strutture componenti C e D imposte alla varietà di base M dalla struttura composta K .

Da tale requisito consegue che:

3-3 PROPOSIZIONE. — In un modello canonico K l'insieme delle geodetiche della connessione fondamentale D risulta ripartito nelle seguenti classi: geodetiche del

⁽¹⁶⁾ Cf. [14], pp. 723 e seg.

genere tempo, ovunque tangenti a vettori di T_c ; geodetiche del genere spazio, ovunque tangenti a vettori di S_c ; infine geodetiche ovunque tangenti a vettori di $L_c = TM - (T_c \cup S_c)$.

La suddetta ripartizione consente di individuare nell'insieme delle geodetiche di D classi di traiettorie d'universo fisicamente privilegiate. In particolare, si indicherà con $\overset{\circ}{C}$ la sottoclasse privilegiata di C costituita dai sistemi spazio-temporali *a supporto geodetico*, cioè dai sistemi $S \in C$ il cui supporto fisico Σ è una congruenza di geodetiche, del genere tempo, di D .

c) Sia $K = (M, C, D)$ un modello canonico di spazio-tempo.

3-4 DEFINIZIONE. — K è un modello canonico *piatto* di spazio-tempo se

- (i) D è una connessione globalmente piatta in M ;
- (ii) per ogni $S \in C$, vale l'implicazione D θ -riducibile $\Rightarrow D$ σ -riducibile.

Stante (i), l'insieme dei campi vettoriali D -uniformi su M è senz'altro non vuoto; in particolare risulta non vuoto, stante (K2), il sottoinsieme costituito dai campi del genere tempo, ciascuno dei quali genera, per la T -massimalità di C , il supporto, evidentemente geodetico, di un sistema $S \in C$. Risulta pertanto provato che:

3-5 PROPOSIZIONE. — La classe $\overset{\circ}{C}$ dei sistemi a supporto geodetico è non vuota.

Stante (ii), la connessione D , che in ciascun sistema $S \in \overset{\circ}{C}$ è già θ -riducibile, risulta ivi altresì σ -riducibile; dette condizioni di riducibilità, unite alle condizioni (3.1), identificano D con la connessione spazio-temporale ∇ relativa ad S ,

$$(3.6) \quad D = \nabla.$$

Ne segue che:

3-6 PROPOSIZIONE. — $\overset{\circ}{C}$ è una classe canonica piatta, con connessione spazio-temporale D .

Valgono dunque per $\overset{\circ}{C}$ le considerazioni, geometriche e cinematiche, esposte al n. 2.2 d).

Dal punto di vista geometrico va peraltro precisato che la classe $\overset{\circ}{C}$ è completamente caratterizzata in C dalla condizione

$$(3.7) \quad D\gamma = 0.$$

Infatti, ogni sistema $S \in C$ verificante (3.7) ha un supporto evidentemente geodetico ed appartiene quindi a $\overset{\circ}{C}$; viceversa, ogni sistema $S \in \overset{\circ}{C}$ verifica, stante 3-6, la condizione (3.6), da cui, tenendo conto di (1.10)₂ e (1.11)₂, segue la (3.7).

Rimane dunque provato che:

3-7 PROPOSIZIONE. — Appartengono a $\mathring{C}$ tutti e soli i sistemi $S \in C$ verificanti la condizione (3.7).

Dal punto di vista cinematico va inoltre precisato che $\mathring{C}$ è una classe completa di sistemi reciprocamente animati di moto traslatorio uniforme.

Infatti, la condizione $Dv = 0$, che caratterizza i moti traslatori uniformi di sistemi $S' \in C$ rispetto ad un prefissato sistema $S \in \mathring{C}$, risulta equivalente alla condizione $D\gamma' = 0$, che caratterizza, stante 3-7, l'appartenenza di S' a $\mathring{C}$.

Rimane dunque provato che:

3-8 PROPOSIZIONE. — Fissato un generico sistema $S \in \mathring{C}$, risultano appartenere a $\mathring{C}$ tutti e soli i sistemi $S' \in C$ animati di moto traslatorio uniforme rispetto ad S .

4. — Modello einsteiniano di spazio-tempo.

4.1 Definizione.

Si assuma che in ogni sistema di riferimento un agente fisico L (la luce) si propaghi isotropicamente con velocità $c = 1$.

Indicata con C una classe canonica T -massimale, rappresentativa della totalità dei sistemi di riferimento, si consideri, in corrispondenza a ciascun sistema $S \in C$, la struttura conforme $\text{Ker } (g)$ ⁽¹⁷⁾ definita in M dalla relativa metrica spazio-temporale g .

Il *principio di isotropia ottica* dianzi enunciato si formula in M richiedendo l'invarianza della suddetta struttura conforme al variare di S in C , ovvero, per ogni $S, S' \in C$,

$$\text{Ker } (g) = \text{Ker } (g') .$$

Da detta condizione di invarianza segue la relazione

$$g = fg' ,$$

con f funzione differenziabile su M alla quale un *principio di reciprocità* impone di soddisfare anche la relazione

$$g' = fg ,$$

che, insieme alla precedente, rende per essa possibili solo le determinazioni

$$f = 1 , \quad f = -1 ;$$

⁽¹⁷⁾ Si è posto $\text{Ker } (g) = \{u \in TM : g(u, u) = 0\}$.

di queste solo la prima è compatibile con l'assioma (C1), sicchè, per ogni $S, S' \in C$, risulta

$$g = g'.$$

Si è pertanto indotti ad assumere che la classe C sia precisamente una classe canonica massimale di sistemi spazio-temporali in M aventi la medesima metrica spazio-temporale. Denominata *classe einsteiniana* una siffatta classe canonica, si perviene per tal via ad un *modello einsteiniano di spazio-tempo* E , definito come segue:

4-1 DEFINIZIONE. — E è un modello einsteiniano di spazio-tempo se è

$$E = (M, C, D),$$

denotando (M, C, D) un modello canonico di spazio-tempo verificante l'assioma (E) C è una classe einsteiniana.

4.2 Proprietà.

a) Sia $E = (M, C, D)$ un modello einsteiniano di spazio-tempo.

I sistemi $S \in C$ definiscono in M (stante l'assioma (E)) una *metrica spazio-temporale assoluta* g , con $\text{Ker}(g)$ univocamente orientato (stante l'assioma (C1)) dai relativi generatori γ ⁽¹⁸⁾.

Inoltre la connessione fondamentale D soddisfa l'*equazione di struttura*

$$(4.1) \quad Dg = 0.$$

Infatti, in corrispondenza a ciascun sistema $S \in C$ risultano soddisfatte (stante 3-2) le equazioni di struttura (3.2); si perviene allora alla (4.1) mostrando che in S risultano soddisfatte anche le equazioni

$$\mathfrak{F}_{\sigma\sigma}(Dg) = 0.$$

A tale scopo basta osservare che l'equazione del trasporto parallelo $Du = 0$, lungo la generica linea di M , ammette come soluzioni (stante (K2)) anche sezioni di L_C ; per ognuna di tali soluzioni, in una sezione di $B(II)$ si ha

$$(Dg_{x_0})u^\alpha u^0 = 0,$$

⁽¹⁸⁾ Le classi T_C, L_C, S_C vengono a identificarsi rispettivamente con l'interno, la frontiera, l'esterno dei coni nulli costituenti le fibre di $\text{Ker}(g)$ e la partizione invariante (T_C^-, T_C^+) di T_C si identifica con quella ivi determinata dall'orientamento di $\text{Ker}(g)$.

da cui, potendo assegnare valori iniziali arbitrari ad u^α , segue

$$Dg_{\alpha 0} = 0$$

ovvero l'asserto.

Sussiste pertanto la seguente proposizione:

4-2 PROPOSIZIONE. — Passando da una classe einsteiniana C alla corrispondente metrica spazio-temporale assoluta g , si viene a definire un'applicazione

$$\Psi: E \rightarrow E'$$

che ad ogni modello einsteiniano di spazio-tempo

$$(4.2) \quad E = (M, C, D)$$

associa una struttura geometrica

$$(4.3) \quad E' = (M, g, D)$$

costituita da una 4-varietà M recante una metrica lorentziana g con $\text{Ker}(g)$ orientato ed una connessione affine D verificante (4.1).

Sia ora $E' = (M, g, D)$ una struttura geometrica del tipo (4.3).

Dagli assiomi della teoria si deduce che un modello einsteiniano E verificante la condizione

$$\Psi(E) = E',$$

se esiste, è univocamente determinato ed è dato precisamente da $E = (M, C, D)$, dove C denota la classe di tutti e soli i sistemi $S = (II, g, \nabla)$ così costituiti:

- (i) II consiste di una distribuzione 1-dimensionale θ interna ed equiorientata a $\text{Ker}(g)$ ⁽¹⁹⁾;
- (ii) $g \in E'$ ⁽²⁰⁾;
- (iii) ∇ è data, in funzione di $D \in E'$, da (1.3), (3.1) ⁽²¹⁾.

⁽¹⁹⁾ Per l'esistenza di una siffatta distribuzione, cf. [19], p. 531.

⁽²⁰⁾ La 1-forma temporale e la metrica spaziale dedotte da g , in corrispondenza a II , mediante (1.7,8) si identificano con il *tempo standard* e la *metrica spaziale standard* introdotti in [8].

⁽²¹⁾ Le connessioni verificanti, in corrispondenza a II , la condizione (1.3) si identificano con le connessioni *adattate* introdotte in [24]. In particolare, la connessione (1.3), (3.1) si identifica con la connessione *vincolata* introdotta in [25].

D'altra parte, con tale determinazione della classe C (senz'altro non vuota), risultano soddisfatti, stante (4.1), tutti gli assiomi che garantiscono che E sia effettivamente un modello einsteiniano di spazio-tempo.

Rimane pertanto provato che:

4-3 PROPOSIZIONE. — L'applicazione Ψ è biiettiva.

Le proposizioni 4-2 e 4-3 forniscono una caratterizzazione del modello einsteiniano di spazio-tempo (4.2) in termini della ben nota struttura geometrica (4.3), costituente lo *spazio-tempo di Einstein-Cartan* ⁽²²⁾ del quale la formulazione (4.2) fornisce la completa analisi cronogeometrica.

b) Sia $E = (M, C, D)$ un modello einsteiniano di spazio-tempo con connessione fondamentale D piatta.

In tal caso C definisce univocamente in M , stante (4.1), una *metrica g minkowskiana* e $\Psi(E)$ è lo *spazio-tempo di Minkowski* (M, g) .

Sussistono le seguenti proposizioni:

4-4 PROPOSIZIONE. — E è un modello canonico piatto.

Basta infatti osservare che, stante (4.1), per ogni $S \in C$ sono soddisfatte, nella generica sezione g -ortonormale s di $B(\Pi)$, le equazioni

$$Dg_{\alpha 0} = \omega_{\alpha}^0 - \omega_0^{\alpha} = 0 ;$$

poiché d'altra parte le condizioni di θ e σ -riducibilità di D sono espresse in s dalle equazioni

$$\omega_0^{\alpha} = 0 , \quad \omega_{\alpha}^0 = 0 ,$$

risulta verificata anche la condizione (ii) della definizione 3-4.

4-5 PROPOSIZIONE. — $\hat{C}$ si identifica con la *classe minkowskiana* costituita dai sistemi spazio-temporali piatti di metrica g .

Basta infatti osservare che, stante (4.1), $\hat{C}$ esaurisce l'intera classe dei sistemi spazio-temporali piatti appartenenti a C , la quale, per la costituzione di C , coincide appunto con la suddetta classe minkowskiana.

5. — Modello newtoniano di spazio-tempo.

5.1 Definizione.

Si assuma ora che l'agente fisico L (la luce) in ogni sistema di riferimento si propaghi isotropicamente con velocità $c = \infty$.

⁽²²⁾ Cf. [23].

Indicata con C una classe canonica T -massimale, rappresentativa della totalità dei sistemi di riferimento, si consideri, in corrispondenza a ciascun sistema $S \in C$, la struttura conforme (degenere) $\text{Ker}(\tau)$ definita in M dalla relativa 1-forma temporale τ .

Il *limite newtoniano* dianzi accolto si formula in M richiedendo l'invarianza della suddetta struttura conforme al variare di S in C , ovvero, per ogni $S, S' \in C$,

$$\text{Ker}(\tau) = \text{Ker}(\tau').$$

Da detta condizione di invarianza segue la relazione

$$\tau = f\tau',$$

con f funzione differenziabile su M alla quale un principio di reciprocità impone di soddisfare anche la relazione

$$\tau' = f\tau,$$

che, insieme alla precedente, rende per essa possibile solo le determinazioni

$$f = 1, \quad f = -1;$$

di queste solo la prima è compatibile con l'assioma (C1), sicchè, per ogni $S, S' \in C$, risulta

$$\tau = \tau'$$

da cui, stante (2.3), segue anche

$$h = h'.$$

Si è pertanto indotti ad assumere che la classe C sia precisamente una classe canonica massimale di sistemi spazio-temporali in M aventi la medesima 1-forma temporale e la medesima metrica spaziale. Denominata *classe newtoniana* una siffatta classe canonica, si perviene per tal via ad un *modello newtoniano di spazio-tempo* N , definito come segue:

5-1 DEFINIZIONE. — N è un modello newtoniano di spazio-tempo se è

$$N = (M, C, D),$$

denotando (M, C, D) un modello canonico di spazio-tempo verificante l'assioma (N) C è una classe newtoniana.

5.2 *Proprietà.*

a) Sia $N = (M, C, D)$ un modello newtoniano di spazio-tempo.

I sistemi $S \in C$ definiscono in M (stante l'assioma (N)) una 1-forma temporale assoluta τ ⁽²³⁾ ed una metrica spaziale assoluta h .

Inoltre la connessione fondamentale D soddisfa le equazioni di struttura

$$(5.1) \quad D\tau = 0, \quad Dh = 0.$$

Infatti, in corrispondenza a ciascun sistema $S \in C$ risultano soddisfatte (stante 3-2) le equazioni di struttura (3.3); si perviene allora alle (5.1) mostrando che in S risultano soddisfatte anche le equazioni

$$\mathcal{F}_\sigma(D\tau) = 0.$$

A tale scopo basta osservare che l'equazione del trasporto parallelo $Du = 0$, lungo la generica linea di M , ammette come soluzioni (stante $(K2)$) anche sezioni di S_C ; per ognuna di tali soluzioni, in una sezione di $B(II)$ si ha

$$(D\tau_\alpha)u^\alpha = 0,$$

da cui, potendo assegnare valori iniziali arbitrari ad u^α , segue

$$D\tau_\alpha = 0$$

ovvero l'asserto ⁽²⁴⁾.

Sussiste pertanto la seguente proposizione:

5-2 PROPOSIZIONE. — Passando da una classe newtoniana C alle corrispondenti metriche spaziale e temporale assolute (τ, h) , si viene a definire un'applicazione

$$\Phi: N \rightarrow N'$$

che ad ogni modello newtoniano di spazio-tempo

$$(5.2) \quad N = (M, C, D)$$

associa una struttura geometrica

$$(5.3) \quad N' = (M, \tau, h, D)$$

⁽²³⁾ Le classi T_C ed S_C vengono a identificarsi rispettivamente con l'interno e la frontiera dei coni nulli (degeneranti in iperpiani) costituenti le fibre di $\text{Ker}(\tau)$ e la partizione invariante (T_C^-, T_C^+) di T_C si identifica con quella ivi determinata dal τ -orientamento.

⁽²⁴⁾ Se D è simmetrica, l'equazione (5.1)₁ assicura in particolare l'integrabilità della distribuzione $\text{Ker}(\tau)$ (cf. [5], p. 447).

costituita da una 4-varietà M recante una 1-forma τ ovunque non nulla, una metrica fibrata h in $\text{Ker}(\tau)$ definita positiva ed una connessione affine D verificante (5.1).

Sia ora $N' = (M, \tau, h, D)$ una struttura geometrica del tipo (5.3).

Dagli assiomi della teoria si deduce che un modello newtoniano N verificante la condizione

$$\Phi(N) = N',$$

se esiste, è univocamente determinato ed è dato precisamente da $N = (M, C, D)$, dove C denota la classe di tutti e soli i sistemi $S = (II, g, \nabla)$ così costituiti:

- (i) II consiste di una distribuzione 1-dimensionale $\theta \notin \text{Ker}(\tau)$ ⁽²⁵⁾, τ -orientata, e da $\sigma = \text{Ker}(\tau)$;
- (ii) g è data, in funzione di $\tau, h \in N'$, da (1.6);
- (iii) ∇ è data, in funzione di $D \in N'$, da (1.3), (3.1).

D'altra parte, con tale determinazione della classe C (senz'altro non vuota), risultano soddisfatti, stante (5.1), tutti gli assiomi che garantiscono che N sia effettivamente un modello newtoniano di spazio-tempo.

Rimane pertanto provato che:

5-3 PROPOSIZIONE. — L'applicazione Φ è biiettiva.

Le proposizioni 5-2 e 5-3 forniscono una caratterizzazione del modello newtoniano di spazio-tempo (5.2) in termini della ben nota struttura geometrica (5.3), costituente lo *spazio-tempo di Newton-Cartan* (analogo newtoniano dello spazio-tempo relativistico di Einstein-Cartan) del quale la formulazione (5.2) fornisce la completa analisi cronogeometrica.

b) Sia $N = (M, C, D)$ un modello newtoniano di spazio-tempo con connessione fondamentale *piatta*.

In tal caso C definisce in M , stante (5.1), una *metrica* (τ, h) *galileiana* ⁽²⁶⁾ e $\Phi(N)$ è lo *spazio-tempo di Galilei* (M, τ, h) .

Poiché da (5.1) segue la riducibilità di D in $\text{Ker}(\tau)$ e ricordando la costituzione di C , sussistono le seguenti proposizioni:

5-4 PROPOSIZIONE. — N è un modello canonico piatto.

5-5 PROPOSIZIONE. — $\hat{C}$ si identifica con la *classe galileiana* costituita dai sistemi spazio-temporali piatti di metrica (τ, h) .

⁽²⁵⁾ Per l'esistenza di una siffatta distribuzione, cf. [5], p. 447.

⁽²⁶⁾ La metrica (τ, h) è cioè caratterizzata, in coordinate globali su M , da componenti costanti.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. TRAUTMAN, *Invariance of Lagrangian systems*, in L. O'Raifeartaigh (ed.), *General Relativity*, Clarendon Press, Oxford (1972).
- [2] A. TRAUTMAN, *Sur la théorie newtonienne de la gravitation*, *Comp. Rend. Paris*, **257**, (1963), p. 617.
- [3] A. TRAUTMAN, *Comparison of Newtonian and relativistic theories of space-time*, in B. Hoffman (ed.), *Perspectives on Geometry and Relativity*, Indiana University Press, Bloomington (1966).
- [4] P. HAVAS, *Four-dimensional formulations of Newtonian mechanics and their relation to the special and the general theory of relativity*, *Rev. Mod. Phys.*, **36** (1964), p. 938.
- [5] H. P. KUNZLE, *Covariant Newtonian limit of Lorentz space-times*, *Gen. Rel. Grav.*, **7** (1976), p. 445.
- [6] R. PENROSE, *The structure of space-time*, in C. M. De Witt, J. A. Wheeler (ed.), *Battelle Rencontres*, Benjamin Inc. (1968).
- [7] J. EHLERS - F. A. E. PIRANI - A. SCHILD, *The geometry of free fall and light propagation*, in L. O'Raifeartaigh (ed.), *General Relativity*, Clarendon Press, Oxford (1972).
- [8] C. CATTANEO, *General relativity: relative standard mass, momentum, energy and gravitational field in a general system of reference*, *Il Nuovo Cimento*, **10** (1958), p. 318.
- [9] C. CATTANEO, *Introduzione alla teoria einsteiniana della gravitazione*, Veschi, Roma (1961).
- [10] C. CATTANEO, *Sur la loi relative du mouvement d'une particule d'épreuve gravitant librement*, *Compt. Rend. Paris*, **256** (1963), p. 3974.
- [11] F. EASTBROOK - H. WAHLQUIST, *Dyadic analysis of space-time congruences*, *J. Math. Phys.*, **5** (1964), p. 1629.
- [12] C. MØLLER, *The Theory of Relativity*, Clarendon Press, Oxford (1972).
- [13] C. HARRISON, *On the structure of space-time*, in P. Suppes (ed.), *Space, Time and Geometry*, Reidel Publ. Co. (1973).
- [14] R. GRASSINI, *Estensione del trasporto misto di Fermi ad un modello generale di spazio-tempo*, *Atti Acc. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.*, **56** (1974), p. 720.
- [15] R. GRASSINI, *Riferimenti fisici e relative connessioni spaziali in un modello matematico generale di spazio-tempo*, *Rend. Acc. Sci. Fis. Mat. Napoli*, **41** (1974), p. 209.
- [16] R. GRASSINI, *Misura ed evoluzione di grandezze fisiche relative in un modello matematico generale di spazio-tempo*, *Boll. U.M.I.*, **11** (1975), p. 507.
- [17] A. TRAUTMAN, *Foundations and current problems of general relativity*, in S. Deser - K. Ford (ed.), *Lectures on General Relativity*, Brandeis Summer Institute in Theoretical Physics, vol. **1**, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1965).
- [18] S. KOBAYASHI - K. NOMIZU, *Foundation of Differential Geometry*, vol. **1**, Interscience Publ. (1963).
- [19] G. S. WHISTON, *Topics on space-time geometry*, *Gen. Rel. Grav.*, **5** (1974), p. 526.
- [20] A. TRAUTMAN, *Fibre bundles associated with space-time*, *Rep. Math. Phys.*, **1** (1970), p. 29.
- [21] P. SUPPES, *Introduction to Logic*, Van Nostrand Co. (1967).
- [22] J. D. SNEED, *The Logical Structure of Mathematical Physics*, Reidel Publ. (1971).
- [23] A. TRAUTMAN, *On the structure of Einstein-Cartan equations*, *Symp. Math.*, **12** (1973), p. 139.
- [24] E. MASSA, *Space tensors in general relativity*, *Gen. Rel. Grav.*, **5** (1974), p. 555.
- [25] I. CATTANEO GASPARINI, *Dérivée covariant liée dans une V_{n+1} riemannienne à structure presque produit*, *Compt. Rend. Paris*, **256** (1963), p. 2089.