# Wo ist die Riemannsche Funktion $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2}$ nichtdifferenzierbar? (*).

ERNST MOHR (Berlin)

*in memoriam Gustav Doetsch † 9. Juni 1977*

Summary.' – *G. H. Hardy proved* 1916 *for the first time, that the function* $R(x)$ *of Riemann in the title has no finite differential quotient for all* $x$, *except two classes of rational numbers, noted in the text by* 3) *and* 4). *We prove in the following by Laplace-Transformation*: $R(x)$ *is also not differentiable for the class* 4) *and it is differentiable for the class* 3) *with* $R'(x)$ *always equal to* $-\frac{1}{2}$.

## Einleitung, die Ergebnisse und die Methode von G. H. Hardy.

**1.** – Wir schreiben mit Hardy $\pi x$ anstelle von $x$ und betrachten demgemäß die Riemannsche Funktion [1]

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n^2 x}{\pi n^2} .$$

Differenzierbar bedeutet mit Hardy stets: es existiert eine endliche Ableitung; im gleichen Sinne ist im folgenden rechts und linksdifferenzierbar zu verstehen. Die im Titel gestellte Frage hat HARDY in einer Arbeit aus dem Jahre 1916 [2] fast vollständig beantwortet, indem er zeigte:

I) $R(x)$ ist nichtdifferenzierbar für irrationales $x$;

II) $R(x)$ ist nichtdifferenzierbar für die rationalen $x$, welche von einer der zwei Formen sind ($\lambda, \mu$ ganz und die Brüche wie immer reduziert)

$$1) \quad x = \frac{2\lambda + 1}{2\mu} \qquad 2) \quad x = \frac{2\lambda}{4\mu + 1} .$$

Zu dieser Klassifizierung gelangt Hardy im Zusammenhang mit der $R(x)$ zugeordneten $\vartheta =$ Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n^2} \exp[i\pi n^2 x] .$$

(*) Entrata in Redazione il 5 settembre 1978.

Ist nämlich $x$ rational und ohne Einschränkung $x > 0$, so ist $x/2$ von einer der vier Formen

$$\frac{x}{2}: \quad \frac{2\lambda+1}{4\mu}, \quad \frac{\lambda}{4\mu+1}, \quad \frac{2\lambda+1}{4\mu+2}, \quad \frac{\lambda}{4\mu+3},$$

je nachdem der Nenner kongruent 0, 1, 2, 3 modulo 4 ist; für $x$ ergeben sich daraus die vier Fälle

$$1)\ x = \frac{2\lambda+1}{2\mu} \qquad 2)\ x = \frac{2\lambda}{4\mu+1} \qquad 3)\ x = \frac{2\lambda+1}{2\mu+1} \qquad 4)\ x = \frac{2\lambda}{4\mu+3}.$$

Schreiben wir $r/s$ für $x/2$, so ist in diesen vier Fällen

$$\sum_{\nu=0}^{s-1} \exp\left[\nu^2 2\pi i \frac{r}{s}\right] = \begin{cases} (\pm 1 \pm i)\sqrt{s} \\ \pm\sqrt{s} \\ 0 \\ \pm i\sqrt{s} \end{cases} \tag{1}$$

je nachdem $s \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod 4$ ist. Daraus folgt, daß die Teilsummen

$$s_n = \sum_{0 \leqq \nu \leqq n} \exp[\nu^2 \pi i x] = \sum_{0 \leqq \nu \leqq n} \cos \nu^2 \pi x + i \sum_{0 \leqq \nu \leqq n} \sin \nu^2 \pi x \tag{2}$$

in der obigen Reihenfolge bis auf ein $O(1)$ gleich

$$(\pm 1 \pm i) A n, \quad \pm A n, \quad 0, \quad \pm i A n \tag{3}$$

sind, wo $A > 0$ eine (leicht angebbare) Konstante ist. Daraus liest man für die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos n^2 \pi x$ ab: die Reihe divergiert nach $+\infty$ oder $(-\infty)$ in den Fällen 1) und 2). Wie betrachten die Oberfunktionen ([3], Seite 44)

$$\phi^+(t) = R(a+t) - R(a), \qquad \phi^-(t) = R(a-t) - R(a), \qquad \text{sowie}$$

$$\begin{cases} X(t) = \left\{ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \pi n^2 a \cdot \dfrac{\cos \pi n^2 t - 1}{\pi n^2} \right\}, \\ \Psi(t) = \left[ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos \pi n^2 a \cdot \dfrac{\sin \pi n^2 t}{\pi n^2} \right]. \end{cases} \tag{4}$$

Diesen Funktionen entsprechen im Unterbereich Funktionen $\varphi^+(s)$, $\varphi^-(s)$, $\chi(s)$ und $\psi(s)$ gültig für $x > 0$:

$$\varphi^+(s) = \chi(s) + \psi(s), \qquad \varphi^-(s) = \chi(s) - \psi(s) \tag{5}$$

$$(6)\qquad \begin{cases} \chi(s) = \left\{-\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\pi n^2\cdot\sin\pi n^2 a}{s[s^2+\pi^2 n^4]}\right\}, \\ \psi(s) = \left[\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos\pi n^2 a}{[s^2+\pi^2 n^4]}\right]. \end{cases}$$

Wir lassen in diesen Reihen den Zeiger $n$ von $-\infty$ bis $+\infty$ laufen, multiplizieren sie mit $\frac{1}{2}$ und kennzeichnen sie dann mit einem Stern:

$$(7)\qquad \begin{cases} X(t) = X^*(t)\,, \qquad \Psi(t) = -\dfrac{t}{2} + \Psi^*(t) \\ \chi(s) = \chi^*(s)\,, \qquad \psi(s) = \dfrac{-1}{2s^2} + \psi^*(s)\,. \end{cases}$$

Wir zeigen mittels Laplace-Transformation:

III) im Falle 4) ist $R(x)$ in $x=a$ weder rechts $=$ noch linksdifferenzierbar;

IV) im Falle 3) ist $R(x)$ in $x=a$ differenzierbar und es ist stets $R'(a) = -\frac{1}{2}$.

**Die Beweismethode im Fall 4); der Ausnahmefall 3).**

**2.** – Daß $R(x)$ in $x=a$ eine Rechtsableitung $B$ bezw. eine Linksableitung $b$ besitzt, bedeutet

$$(8)\qquad \Phi^+(t) \sim B\cdot t \quad \text{bezw.} \quad \Phi^-(t) \sim (-b)\cdot t \qquad \text{für } t\to 0\,.$$

Nach [3] Seite 473, Satz 1 ziehen diese Beziehungen für jedes $\alpha$ mit $0 \leqq \alpha < \pi/2$ die folgenden im Unterbereich für

$$(9)\qquad s\to\infty\,, \qquad |\arg s| \leqq \alpha < \frac{\pi}{2}$$

nach sich:

$$(10)\qquad \varphi^+(s) \sim \frac{B}{s^2} \quad \text{bezw.} \quad \varphi^-(s) \sim \frac{-b}{s^2}\,.$$

Sobald also diese notwendigen Bedingungen nicht erfüllt sind, folgt: $R(x)$ ist in $x=a$ nicht differenzierbar. Dies trifft im Falle 4) zu; im Falle 3) dagegen sind sie mit $B=b=-\frac{1}{2}$ erfüllt, was zeigt: Wenn $R'(a)$ existiert, so ist stets $R'(a)=-\frac{1}{2}$.

**Dor Fall 4):** $a=2p/q, q\equiv -1 \pmod{4}$.

**3.** – In den Reihen für $\chi^*(s)$, $\psi^*(s)$ setzen wir

$$n = l + q\nu\,, \qquad l = 0, 1, \ldots, q-1$$

und beachten

$$\exp\left[i\pi\frac{2p}{q}n^2\right] = \exp\left[i\pi\frac{2p}{q}l^2\right].$$

Jede Reihe baut sich dann aus $l$ Teilreihen $\chi_l^*(s)$, $\psi_l^*(s)$ auf und es ist

$$\tag{11} \begin{cases} \chi_l^*(s) = \sum\limits_{l=0}^{q-1} \sin 2\pi\frac{p}{q}l^2 \cdot \chi_l^*(s)\,, \\ \psi_l^*(s) = \sum\limits_{l=0}^{q-1} \cos 2\pi\frac{p}{q}l^2 \cdot \psi_l^*(s)\,. \end{cases}$$

Eine Residuenrechnung ergibt für $\chi_l^*(s)$, $\psi_l^*(s)$ Ausdrücke, die sich für $s>0$, $s\to\infty$ so verhalten

$$\tag{12} \begin{cases} \chi_l^*(s) = -\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}q}\cdot\dfrac{1}{s^{\frac{3}{2}}} + o\left(\dfrac{1}{s^2}\right), \\ \psi_l^*(s) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}q}\cdot\dfrac{1}{s^{\frac{3}{2}}} + o\left(\dfrac{1}{s^2}\right); \end{cases}$$

Daraus, aus (11) und aus (1) folgt für $s\to\infty$

$$\lim|s^2\varphi^+(s)| = \infty\,, \qquad \lim|s^2\varphi^-(s)| = \infty\,,$$

d.h. die Behauptung III.

**Der Fall 3):** $a = p/q$; $p, q$ **ungerade.**

**4.** – Wir zerlegen wie vorhin in Teilreihen, beachten

$$\exp\left[i\pi\frac{p}{q}n^2\right] = \exp\left[i\pi\frac{p}{q}l^2\right]\cdot(-1)^\nu$$

und erhalten analoge Formeln

$$\tag{13} \begin{cases} \chi^*(s) = \sum\limits_{l=0}^{q-1} \sin\pi\frac{p}{q}l^2\cdot\chi_l^*(s)\,, \quad X^*(t) = \sum\limits_{l-1}^{q-1} \sin\pi\frac{p}{q}l^2\cdot X_l^*(t)\,, \\ \psi_l^*(s) = \sum\limits_{l=0}^{q-1} \cos\pi\frac{p}{q}l^2\cdot\psi_l^*(s)\,, \quad \Psi^*(t) = \sum\limits_{l=0}^{q-1} \cos\pi\frac{p}{q}l^2\cdot\Psi_l^*(t)\,. \end{cases}$$

Eine Residuenrechnung ergibt

$$\chi_l^*(s) = \frac{i}{8qs^2}\left(\begin{Bmatrix}\sqrt{-i\pi s}\\ l\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\sqrt{i\pi s}\\ l\end{Bmatrix}\right), \tag{14}$$

$$\psi_l^*(s) = \frac{1}{8qs^2}\left(\begin{Bmatrix}\sqrt{-i\pi s}\\ l\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\sqrt{i\pi s}\\ l\end{Bmatrix}\right), \tag{15}$$

worin die geschweiften Klammern die folgenden eindeutigen meromorphen Funktionen sind

$$\begin{Bmatrix}\sqrt{-i\pi s}\\ l\end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{-i\pi s}}{\sin[(\sqrt{-i\pi s}-\pi l)/q]} + \frac{\sqrt{-i\pi s}}{\sin[(\sqrt{-i\pi s}+\pi l)/q]}, \tag{16}$$

$$\begin{Bmatrix}\sqrt{i\pi s}\\ l\end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{i\pi s}}{\sin[(\sqrt{i\pi s}-\pi l)/q]} + \frac{\sqrt{i\pi s}}{\sin[(\sqrt{i\pi s}+\pi l)/q]}. \tag{17}$$

Daraus liest man in einem Winkelbereich (9) ab, daß

$$\chi_l^*(s) = o\left(\frac{1}{s^2}\right), \qquad \psi_l^*(s) = o\left(\frac{1}{s^2}\right),$$

das heisst, daß, wie in 2. bemerkt,

$$\lim\{s^2\varphi^+(s)\} = -\tfrac{1}{2}, \qquad \lim\{s^2\varphi^-(s)\} = -\tfrac{1}{2}$$

ist.

**5.** – Wir denken uns die $s$-Ebene längs der negativ reellen Achse aufgeschnitten. In dem so entstandenen Gebiet $D$ sei $\sqrt{s}$ der Hauptwert, und

$$\sqrt{-i\pi s} = \exp\left[-i\frac{\pi}{4}\right]\sqrt{\pi s}, \qquad \sqrt{i\pi s} = \exp\left[i\frac{\pi}{4}\right]\sqrt{\pi s}.$$

Mit dieser Erklärung ist z.B. jeder der vier Bausteine in (16) rechts holomorph in $D$ und (der Querstrich bedeuted die konjugiert komplexe Zahl)

$$\overline{\begin{Bmatrix}\sqrt{-i\pi s}\\ l\end{Bmatrix}} = \begin{Bmatrix}\sqrt{i\pi \bar{s}}\\ l\end{Bmatrix}. \tag{18}$$

$\begin{Bmatrix}\sqrt{-i\pi s}\\ l\end{Bmatrix}$ hat für $1 \leqq l \leqq q-1$ die einfachen Pole $s = i\pi(l+q\nu)^2$; diese $\nu$ sind gegeben durch $l+q\nu$ für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ und $(-l+q\nu)$ für $\nu = 1, 2, \ldots$ oder durch $(\hat{l}+q\mu)$ für $\mu = 0, 1, 2, \ldots,$ wo $\hat{l} = q-l$ ist. $l = \hat{l}$ ist unmöglich, da $q$ ungerade. Ist

$l > q/2$, so $\hat{l} < q/2$ und umgekehrt. Für $l = 0$ sind die Pole $s = i\pi(q\nu)^2$, $\nu = 1, 2, \ldots$. Benutzt man (18) und schreibt für $\bar{s}$ wieder $s$, so erhält man die entsprechenden Aussagen für $\left\{\begin{matrix}\sqrt{i\pi s}\\ l\end{matrix}\right\}$.

**6.** – Es sei $n$ eine natürliche Zahl (schon groß gedacht). Dann ist $s = \pm i\pi q^2 \cdot (n+\frac{1}{2})^2$ kein Pol. Sei weiter $C_n$ eine einfach geschlossene Kurve in der $s$-Ebene, die $s = 0$ umschlingt, spiegelbildlich zu $y = 0$ liegt und die $y$-Achse genau in den Punkten $y = \pm\pi q^2(n+\frac{1}{2})^2$ schneidet. $C_n$ enthält im Innern *die* Pole $s = \pm i\pi(l + q\nu)^2$, für welche der Zeiger $\nu$ einer der beiden Ungleichungen genügt, je nachdem $l < q/2$ oder $\hat{l} < q/2$ ist:

$$|l + q\nu| < q(n+\tfrac{1}{2})\,, \qquad |\hat{l} + q\nu| < q(n+\tfrac{1}{2})\,. \tag{19}$$

Wir bezeichnen die betreffende Zeigermenge für $\nu$ mit $Z_n$ und schreiben für sie $\nu \in Z_n$, und für die restlichen $\nu \notin Z_n$; für $l = 0$ bedeutet $\nu \notin Z_n$: $\nu \geqq n+1$.

Mit dieser Verabredung ergibt eine Residuenrechnung ($l = 0, 1, \ldots, q-1$)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_n} ds \exp[ts]\,\chi_l^*(s) = X_l^*(t) - \frac{1}{2}\sum_{\nu\notin Z_n}(-1)^\nu \frac{\cos\pi(l+q\nu)^2 t}{\pi(l+q\nu)^2}\,, \tag{20}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_n} ds \exp[ts]\,\psi_l^*(s) = \Psi_l^*(t) - \frac{1}{2}\sum_{\nu\notin Z_n}(-1)^\nu \frac{\sin\pi(l+q\nu)^2 t}{\pi(l+q\nu)^2}\,. \tag{21}$$

Nachträglich darf die Kurve $C_n$ auch eine Selbstdurchdringung in einem Bereich besitzen, der polfrei ist, wie das die Figur im ersten Quadranten andeutet.

**Beweisanordnung.**

**7.** – Es sei im folgenden $\varkappa$ eine Konstante, $\varkappa > 1$ (schon groß gedacht), beliebig und dann fest. Sei weiter $t$ schon klein, speziell $0 < t \leqq 1$. Wir koppeln die natürliche Zahl $n$ mit $t$ wie folgt: Ist z.B. $l < q/2$ (sonst tritt in (22) einfach $\hat{l}$ anstelle von $l$), so liegt die Zahl $\pi\varkappa^2/16(qt)^2$ in genau einem Intervall

$$\pi(l+qn)^2 \leqq \frac{\pi\varkappa^2}{16(qt)^2} < \pi(l+q(n+1))^2; \tag{22}$$

in jedem Falle gilt

$$n \sim \frac{\varkappa}{4q(qt)} \qquad \text{für } t \to 0\,. \tag{23}$$

Die in (20) und (21) auftretenden Summen sind dann absolut kleiner als

$$\frac{8}{\pi}\cdot\frac{t}{\varkappa-12q(qt)}\,. \tag{24}$$

Wir zeigen: Es existiert ein Weg $L_{t,\varkappa}$, spiegelbildlich zu $y=0$, der von $t$ und $\varkappa$ abhängt, der die $y$-Achse in $y=\pm\pi q^2(n+\frac{1}{2})^2$ schneidet, wo das $n$ mit dem $t$ gemäß (22) gekoppelt ist, und den wir mit der Kurve $C_n$ in (20) und (21) identifizieren, derart, daß

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_{t,\varkappa}} ds \exp[ts]\,\chi_l^*(s)=o(t;\varkappa)\,,\qquad \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_{t,\varkappa}} ds \exp[ts]\,\psi_l^*(s)=o(t;\varkappa) \tag{25}$$

ist; $o(t;\varkappa)$ bedeutet: die linke Seite, noch dividiert durch $t$, strebt für das feste $\varkappa$ nach Null für $t\to 0$. Für $X_l^*(t)$ (ebenso für $\Psi_l^*(t)$) folgt aus (25), (20) und (24)

$$\limsup_{t\to 0}\left|\frac{X_l^*(t)}{t}\right|\leqq\frac{4}{\pi\varkappa}\,;$$

die linke Seite hängt nicht von $\varkappa$ ab, d.h. dieser lim sup ist gleich Null und es folgt aus (13) $X_l^*(t)=\Psi_l^*(t)=o(t)$, also nach (7)

$$\Phi^+(t)=-\frac{t}{2}+o(t)\,,\qquad \Phi^-(t)=-\frac{t}{2}+o(t)\,,$$

d.h. die Behauptung IV in 1.

**8.** – Es genügt, (25) für die obere Hälfte $W_{t,\varkappa}$ in $y\geqq 0$ anstelle von $L_{t,\varkappa}$ zu beweisen (man beachte (18)). In $y\geqq 0$ ist die Funktion (17) polfrei, so daß es genügt, nur die Funktion (16) weiter im Integranden mitzuführen, und hier genügt es wieder, wenn wir uns in (16) auf den ersten Summanden beschränken. Mit der Abkürzung

$$W_{t,\varkappa}[\sqrt{-i\pi s}-\pi l]=\frac{1}{2\pi i}\int_{W_{t,\varkappa}} ds\,\frac{\exp[ts]}{s^2}\cdot\frac{\sqrt{-i\pi s}}{\sin[(\sqrt{-i\pi s}-\pi l)/q]} \tag{26}$$

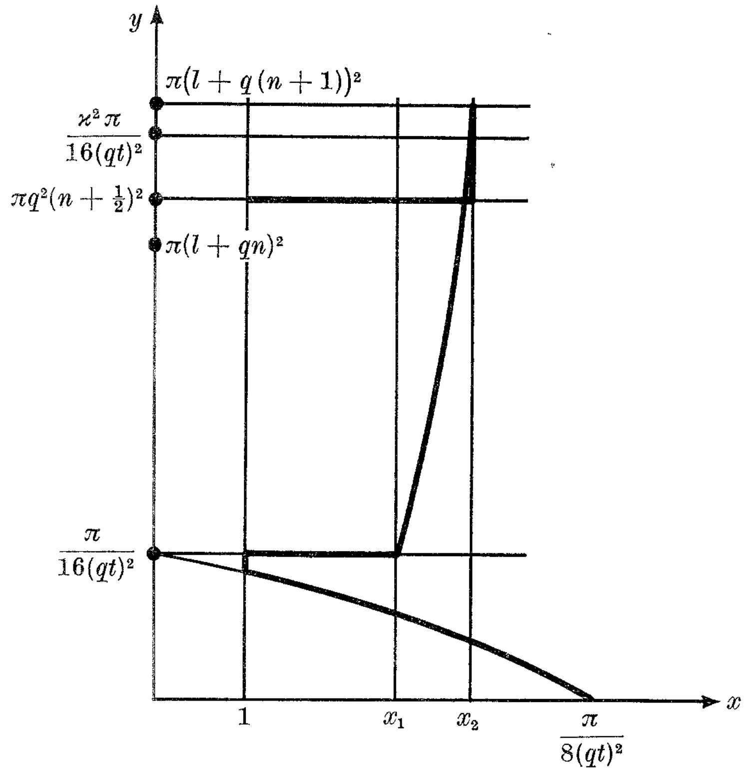
reduziert sich der Beweis auf die Behauptung

$$W_{t,\varkappa}[\sqrt{-i\pi s}-\pi l]=o(t;\varkappa)\,. \tag{27}$$

Der Weg $W_{t,\varkappa}$ wird aus sieben Wegen $W_1$ bis $W_7$ aufgebaut und (27) ist bewiesen, wenn für jeden Weg $W_\lambda$

$$W_\lambda[\sqrt{-i\pi s}-\pi l]=o(t;\varkappa)\,;\qquad \lambda=1,2,\ldots,7 \tag{28}$$

bewiesen ist; darin ist miteingeschlossen, daß für einen einzelnen Weg $W_\lambda$ das betreffende $o(t;\varkappa)$ von $\varkappa$ gar nicht abhängt; wir schreiben dann $o(t)$ anstelle von $o(t;\varkappa)$.




**Beweis der Behauptungen (28).**

**9.** – Die Integrale für die einzelnen Wege $W_\lambda$ schreiben wir von $s$ auf die Integrationsvariable $\vartheta$ um; dabei ist im ersten Quadranten für die Wege $W_1$ bis $W_6$ $s = \varrho \exp[(\pi/2 - \vartheta)]$ und für $W_7$ im zweiten Quadranten: $s = \varrho \exp[i(\pi/2 + \vartheta)]$; stets ist also $0 \leqq \vartheta \leqq \pi/2$. Wir unterdrücken die Umrechnung auf $\vartheta$ und geben jeweils (soweit überhaupt notwendig) nur die Zwischen formeln an, aus denen die behauptete $o(t;\varkappa)$-Aussage folgt. $\operatorname{arctg} x$ bedeutet den Hauptwert, $\mathfrak{S}_{\text{in}\,x}$, $\mathfrak{C}_{\text{of}\,x}$ die Hyperbelfunktionen. Die Figur deutet die Wege $W_1$ bis $W_6$ an. Bis auf den Weg $W_3$ kommen wir mit Betragsabschätzungen ans Ziel; lediglich bei $W_3$ nutzen wir aus, daß der Integrand für $t \to 0$ immer rascher schwingt.

$W_1$. Der Integrand in (26) ist von der Größenordnung $\exp[\ldots]$, wo der Exponent ... so lautet:

$$t\varrho \sin\vartheta - \frac{\sqrt{\pi\varrho}}{q}\sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{\sqrt{\pi\varrho}\sin\vartheta/2}{q}\left\{2(qt)\sqrt{\frac{\varrho}{\pi}}\cdot\cos\frac{\vartheta}{2} - 1\right\}.$$

Wir fordern für den Weg $W_1$:

$$2(qt)\sqrt{\frac{\varrho}{\pi}}\cos\frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{2}, \qquad \varrho = \frac{\pi}{16(qt)^2}\,\frac{1}{\cos^2\vartheta/2};$$

Das ist eine nach unten geöffnete Parabel mit $s = 0$ als Brennpunkt. Wir folgen ihr für $\pi/8(qt)^2 \geqq x \geqq 1$; das gibt $W_1$. Eine einfache Abschätzung liefert

$$\left|W_1[\sqrt{-i\pi s} - \pi l]\right| \leqq \frac{4(qt)}{\pi} \cdot \left|\int_{\vartheta_1}^{\pi/2} d\vartheta \ldots\right|,$$

wo das Integral nach Null strebt für $t \to 0$, also ein $o(t)$.

$W_2$. Vom Endpunkt von $W_1$ gehen wir vertikal nach oben bis $y = \pi/16(qt)^2$ und anschließend horizontal nach rechts bis

$$x = x_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2(qt)}\left\{1 + \frac{16(qt)^2}{\pi}\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{29}$$

($x_1$ ist durch den nächsten Schritt so festgelegt). Dieser Weg $W_2$ macht keine Mühe und liefert (28) für $\lambda = 2$ mit einem $o(t)$.

$W_3$. An $W_2$ schließen wir einen Weg $W_3$ an, von dem wir verlangen, daß auf ihm ($I =$ Imaginärteil)

$$I\left[\frac{\sqrt{-i\pi s} - \pi l}{q}\right] = -\frac{\sqrt{\pi}}{q}$$

ist. Das führt auf die Parabel

$$\sqrt{\varrho}\sin\frac{\varrho}{2} = 1\,, \qquad \varrho = \frac{1}{\sin^2\vartheta/2}, \qquad x^2 = 4(y+1)\,,$$

welche nach oben geöffnet ist mit $s = 0$ als Brennpunkt. Für $y = \pi/16(qt)^2$ ist $x$ gleich dem $x_1$ in (29). Wir folgen dieser Parabel nach oben bis zu dem Punkt

$$y_2 = \frac{\varkappa^2\pi}{16(qt)^2}, \qquad x_2 = \frac{\varkappa\sqrt{\pi}}{2(qt)}\left\{1 + \frac{16(qt)^2}{\varkappa^2\pi}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Für diesen Weg $W_3$ ist $\vartheta_1 \geqq \vartheta \geqq \vartheta_2$ mit

$$\vartheta_1 = \operatorname{arctg}\frac{8(qt)}{\sqrt{\pi}}\left\{1 + \frac{16(qt)^2}{\pi}\right\}^{\frac{1}{2}} = \theta_1 + O(t^3); \qquad \theta_1 = \frac{8(qt)}{\sqrt{\pi}}$$

$$\vartheta_2 = \operatorname{arctg}\frac{8(qt)}{\varkappa\sqrt{\pi}}\left\{1 + \frac{16(qt)^2}{\varkappa^2\pi}\right\}^{\frac{1}{2}} = \theta_2 + O(t^3); \qquad \theta_2 = \frac{8(qt)}{\varkappa\sqrt{\pi}}.$$

Bedeutet $\{\vartheta\}$ den Ausdruck

$$\left(\sin\left[\frac{\sqrt{-i\pi s} - \pi l}{q}\right]\right)^{-1},$$

omgeschriebeu auf $\vartheta$, so lautet das betreffende Integral

$$-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} d\vartheta \exp\,[i\vartheta]\cdot\exp\left[2t\,\mathrm{ctg}\,\frac{\vartheta}{2}+i\,\frac{t\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta/2}\right]\cdot\{\vartheta\}\,.$$

Da $\vartheta$ von der Größenordnung $t$ ist, so überzeugt man sich: ersetzt man $\mathrm{ctg}\,\vartheta/2$ durch $2/\vartheta$, $\sin\vartheta/2$ durch $\vartheta/2$, wodurch $\{\vartheta\}$ in

$$\left[\frac{\sin\left(2\sqrt{\pi}(/q\vartheta)-\pi l/q\right)\mathfrak{C}_{\mathrm{of}}\sqrt{\pi}/q+i\cos\left(2\sqrt{\pi}(/q\vartheta)-\pi l/q\right)\mathfrak{S}_{\mathrm{in}}\,(\pi/q)}{\sin^2\left(2\sqrt{\pi}(/q)-\pi l/q\right)+\mathfrak{S}_{\mathrm{in}}{}^2(\pi/q)}\right], \tag{30}$$

übergeht, und ersetzt man weiter $\vartheta_2$, $\vartheta_1$ durch ihre Näherungswerte $\theta_2$, $\theta_1$ so ist das Integral *bis auf ein additives* $o(t;\varkappa)$ gleich dem Integral

$$\int_{\theta_2}^{\theta_1} d\vartheta \exp\left[\frac{4t}{\vartheta}+i\frac{4t}{\vartheta^2}\right]\cdot[\;]\,,$$

die Klammer wie in (30). Der Faktor vor der Klammer ist

$$\exp\left[\frac{4t}{\vartheta}+i\frac{4t}{\vartheta^2}\right]=\exp\left[\frac{4t}{\vartheta}\right]\left(\cos\frac{4t}{\vartheta^2}+i\sin\frac{4t}{\vartheta^2}\right).$$

Trägt man diesen Ausdruck in das letzte Integral ein und multipliziert die Klammern aus, so baut sich dasselbe linear aus vier Einzelintegralen auf, die alle von derselben Bauart sind, so daß es genügt, wenn wir eines davon als typisch weiterbehandeln. Mit $x=(2\sqrt{t})/\vartheta$ als neuer Integrationsvariabler lautet ein solches

$$2\sqrt{t}\left\{\int_{(\sqrt{\pi})/(4q\sqrt{t})}^{(\varkappa\sqrt{\pi})/(4q\sqrt{t})} dx\,\frac{1}{x^2}\exp\left[2\sqrt{t}\,x\right]\cdot\sin(x^2)\left(\frac{\cos\left((\sqrt{t/\pi}\,/x/q)-\pi l/q\right)}{\sin^2\left((\sqrt{\pi/t})\,(x/q)-\pi l/q\right)+\mathfrak{S}_{\mathrm{in}}{}^2\left(\sqrt{\pi}/q\right)}\right)\right\}.$$

$1/x^2$ fällt und $\exp(2\sqrt{t}x)$ steigt mit $x$. Wie befreien uns von diesen Faktoren mittels des zweiten Mittelwertsatzes der Integralrechnung: dadurch tritt vor das Integral ein Faktor, der zusammen mit $2\sqrt{t}$ absolut kleiner gleich

$$\frac{32\,q^2}{\pi}\exp\left[\frac{\varkappa\sqrt{\pi}}{2q}\right]\cdot t^{\frac{3}{2}}$$

ist und es verbleibt mit $v=1/t$ das Integral

$$J=\int_{c_1\sqrt{v}}^{c_2\sqrt{v}} dx\,\sin(x^2)\left\{\frac{\cos\left((\sqrt{\pi v}/q)\,x-\pi l/q\right)}{\sin^2\left((\sqrt{\pi v}/q)x-\pi l/q\right)+\mathfrak{S}_{\mathrm{in}}{}^2\left(\sqrt{\pi}/q\right)}\right\},$$

$c_1$, $c_2$ Funktionen von $v$. Es ist aber $|J| \leqq K$, $K > 0$ eine Konstante: die Klammer läßt sich nämlich in eine Fourier-Reihe nach $\cos ky$ mit $y = q^{-1}(\sqrt{\pi v}x - \pi l)$ entwickeln mit Koeffizienten $a_k$, für die $\sum |a_k| = A < \infty$ ist. Jedes $\cos ky$ liefert mit $\sin(x^2)$ multipliziert Integrale vom Fresnelschen Typ, deren jedes *unabhängig von den Integrationsgrenzen* absolut kleiner gleich $\Gamma$ ist, $\Gamma > 0$ eine absolute Konstante. Aus Allem folgt (28) für $\lambda = 3$.

$W_4$. Wir koppeln $n$ mit $t$ gemäß (22). Ist dann z.B. $l < q/2$ (sonst ist $\hat{l} < q/2$), so wählen wir $W_5$ als *den* Weg, der vom Endpunkt von $W_3$ vertikal nach oben bzw. nach unten bis zu der Höhe $y = \pi q^2(n + \frac{1}{2})^2$ führt und stellen leicht fest ($B > 0$ eine absolute Konstante)

$$\left|W_4[\sqrt{-i\pi s} - \pi l]\right| \leqq B \exp\left[\frac{\varkappa\sqrt{\pi}}{2q}\right] \cdot t^2 = o(t; \varkappa)\,.$$

$W_5$. Vom Endpunkt von $W_4$ gehen wir horizontal nach links bis $x = 1$. Für diesen Weg $W_5$ ergibt sich wie bei $W_2$ die Behauptung (28) für $\lambda = 5$ mit einem $o(t)$.

$W_6$. Hier gehen wir horizontal weiter bis $x = 0$; für diesen Weg $W_6$ ist

$$\vartheta_1 \geqq \vartheta \geqq 0\,, \qquad \vartheta_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{\pi q^2(n + \frac{1}{2})^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Der Integrand ist ein $O(1/n)$, das Integral also ein $O(1/n^3) = O(t^3/\varkappa^3)$ d.h. (28) gilt für $\lambda = 6$ mit einem $o(t)$.

$W_7$. An $W_6$ schließen wir den Viertelkreis $W_7$ mit dem Radius $\varrho = \pi q^2(n + \frac{1}{2})^2$ an. Eine einfache Abschätzung ergibt, daß der Beitrag ein $O$ von $1/t\varrho^{\frac{3}{2}}$, also von $1/tn^3$, d.h. $t^2/\varkappa^3$, also ein $o(t)$ ist.

## LITERATUR


[1] *Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstraß 1815-1965*, herausgegeben von H. Behnke und K. Kopfermann, Westdeutscher Verlag Köln und Opladen, 1966, Seite 89, Zeile 11 von oben.

[2] G. H. HARDY, *Weierstraß's Nondifferentiable Function*, Trans. Amer. Math. Soc., **17** (1916), S. 301-325 und speziell für die Riemannsche Funktion, S. 322 ff.

[3] G. DOETSCH, *Handbuch der Laplace-Transformation*, Band I: *Theorie der Laplace-Transformation*, Verlag Birkhäuser, Basel, 1950.


## ZUSATZE

1) Die Arbeit bildet den Inhalt eines Vortrages, den ich auf Einladung der Stuttgarter Mathematiker am 14. Juli 1967 in Stuttgart gehalten habe.

2) Herr Prof. Dr. G. Tautz von der Universität Freiburg i.Br. war so freundlich, mein Manuskript kritisch zu prüfen, wofür ich ihm auch an dieser Stelle herzlich danke.

3) Auf die in [1] genannte Stelle machten mich meine Mitarbeiter, Herr Dr. Förster und Herr Dr. Wills, aufmerksam. Später besorgte mir Herr Dr. Wills die Arbeit [2] von G. H. Hardy, aus der ich erst ersah, daß das Problem nicht vollständig gelöst war. Beiden Herren danke ich auch an dieser Stelle herzlich für ihre Hilfe.

4) Herr Prof. Dr. G. Sansone machte mich in einem Brief vom 14. Juli 1978 auf den kurzen Bericht von S. L. Segal über die die Riemannsche «nichtdifferenzierbare» Funktion in *The Mathematical Intelligencer*, vol. 1, no. 2 (1978), pp. 81-82 aufmerksam, von dem er mir auch eine Kopie beilegte. Aus diesem Bericht und der dort zitierten Literatur ersehe ich, daß in der Zwischenzeit (mein Beweis stammt aus dem Jahre 1967). J. Gerver, 1968-69 die bei Hardy offen gebliebenen Fälle auf einem ganz anderen Wege ebenfalls erledigt und daß A. Smith 1971 einen außerordentlich einfachen Beweis für die von Hardy und Gerver gewonnenen Resultate gegeben hat. Ich danke Herrn Prof. Dr. G. Sansone auch an dieser Stelle herzlich für diesen Hinweis und seine Hilfe.