Diophantische Approximationen in imaginär quadratischen Zahlkörpern.

By **Alexander Oppenheim** in Singapore.
(From a letter to **N. Hofreiter**.)

N. Hofreiter hat in seiner gleichnamigen Arbeit (Monatsh. **45**, S. 175—190) unter anderem den Satz bewiesen: Ist $k(i\sqrt{m})$ ein beliebiger imaginär quadratischer Körper und α eine beliebige komplexe Zahl [nur nicht in $k(i\sqrt{m})$], so hat die Ungleichung

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{\sqrt{6m}}{\pi}, \text{ wenn } m \not\equiv 3\ (4), \quad \frac{\sqrt{6m}}{2\pi}, \text{ wenn } m \equiv 3\ (4)$$

unendlich viele Lösungen in ganzen Zahlen p, q aus $k(i\sqrt{m})$.

Die Redaktion.

„Have you noticed that your upper bound can be replaced by

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \quad (m \not\equiv 3), \qquad \sqrt{\frac{m}{8}} \quad (m \equiv 3)?$$

The proof is simple since

$$2\,|q(\alpha q-p)| \leqq t^2\,|q^2| + \frac{1}{t^2}\,|\alpha q - p|^2 = f$$

say: for any real t. Here f is a positive definite quaternary form of determinant $\mu^4 m^2$ where $\mu = \frac{1}{2}(m \equiv 3)$, $\mu = 1\,(m \not\equiv 3)$. By the theorem of Korkine and Zolotareff we can make

$$f \leq \sqrt[4]{4\mu^4 m^2} = \sqrt{2\mu^2 m}$$

by choice of integers p, q in $k(i\sqrt{m})$. Hence integers p, q in $k(i\sqrt{m})$ exist $((p, q) \neq (0, 0))$ such that

$$|q(\alpha q-p)| \leqq \sqrt{\frac{\mu^2 m}{2}}.$$

The use of parameter t yields the desired result."

(Eingegangen: 31. V. 1937.)