Sopra l'esistenza dell'estremo assoluto per una classe di problemi di Lagrange in forma parametrica (*) (**).

MARIA BORGOGNO (Pavia)

Sunto. – *Si considera una classe di problemi di Lagrange in forma parametrica dipendenti dagli elementi differenziali dei primi due ordini e si perviene a teoremi di esistenza dell'estremo assoluto, ottenendo, come caso particolare, un risultato che non era ancora stato rilevato, relativo ai problemi liberi del Calcolo delle Variazioni. Un esempio illustra i risultati raggiunti.*

In una Memoria (1) di alcuni anni fa dedicata agli integrali curvilinei dello spazio (in forma parametrica, dipendenti dagli elementi differenziali di ordine non superiore al terzo) S. CINQUINI, mediante la semicontinuità, è pervenuto a teoremi di esistenza dell'estremo assoluto per gli integrali.

$$\mathfrak{J}^{(2)}_{\mathfrak{C}^{(2)}} = \int_{\mathfrak{C}^{(2)}} F\big(x(s), y(s), z(s);\, x'(s), y'(s), z'(s);\, u_2(s), v_2(s), w_2(s)\big)\, ds\,, \tag{1}$$

dove $\mathfrak{C}^{(2)}$ è una curva ordinaria, s è la lunghezza dell'arco rettificato e (essendo R^{-1} la flessione e λ, μ, ν i coseni direttori della binormale) per brevità di scrittura

$$\begin{cases} u_2(s) = \dfrac{\nu}{R} = x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s) \\ v_2(s) = \dfrac{\lambda}{R} = y'(s)\,z''(s) - y''(s)\,z'(s) \\ w_2(s) = \dfrac{\mu}{R} = z'(s)x''(s) - z''(s)x'(s)\,. \end{cases} \tag{2}$$

(*) Entrata in Redazione l'11 dicembre 1980.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. del C.N.R.

(1) Cfr. S. CINQUINI, *Sopra l'esistenza dell'estremo per una classe di integrali curvilinei in forma parametrica*, Ann. Mat. Pura e Appl., **49** (1960), pp. 25-72. Nel seguito tale lavoro verrà citato quale Memoria C.

Ricordiamo che l'impostazione dei problemi in questione è stata fatta in modo da assicurare l'indipendenza dell'integrale curvilineo dal parametro; successivamente, per semplicità, viene assunto come parametro la lunghezza s dell'arco rettificato.

Facciamo presente inoltre che in successivo lavoro l'A. citato, usufruendo dell'identità

$$z'(s)\,u_2(s) + x'(s)\,v_2(s) + y'(s)\,w_2(s) = 0\,,$$

ha potuto formulare in forma più ampia sia i teoremi di semicontinuità che i teoremi di esistenza del minimo assoluto. Vedi: *Sopra una estensione di alcuni risultati di Calcolo delle Variazioni*, Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend., **107** (1973), pp. 44-60.

È ovvio che tale estensione vale anche per i teoremi dei nn. 12, α) e β), 13 e 18 del presente lavoro.

È ben noto, d'altra parte, che numerosi AA. (2) hanno rivolto la propria indagine scientifica a problemi di controllo ottimo ottenendo, come casi particolari, risultati per classici problemi di Calcolo delle Variazioni.

Oggetto del presente lavoro è una classe di problemi di Lagrange dipendenti dagli elementi differenziali dei primi due ordini (3), i quali costituiscono una generalizzazione degli integrali (1), vale a dire consideriamo gli integrali (cfr. n. 7, α)) (4)

$$\mathfrak{J}(\mathfrak{T}^{(2)}) = \int_{\mathfrak{C}^{(2)}} F\big(x(s), y(s), z(s); x'(s), y'(s), z'(s); \xi(s); u_2(s), v_2(s), w_2(s)\big)\, ds\,, \tag{3}$$

dove le funzioni $u_2(s), v_2(s), w_2(s)$ hanno la forma (2) e

$$\xi(s) = \xi(0) + \int_0^s \Phi\big(x(t), y(t), z(t); x'(t), y'(t), z'(t); \xi(t); u_2(t), v_2(t), w_2(t)\big)\, dt \qquad (0 \leqslant s \leqslant L)\,,$$

con

$$\big(x(s), y(s), z(s)\big) \in A_0\,, \qquad \xi(s) \in E^{(2)} \qquad \text{per ogni } s \in [0, L]\,,$$

essendo A_0 e $E^{(2)}$ insiemi chiusi e limitati (5) e $\Phi(x, y, z; x', y', z'; \xi; u_2, v_2, w_2)$ una funzione continua, positivamente omogenea di grado 1 in x', y', z' e lineare nel complesso delle variabili u_2, v_2, w_2.

Nel § 1, insieme con ben note generalità le quali sono state riportate per chiarezza, diamo le definizioni (n. 5, β) e γ) e n. 7) di *curva ammissibile* $\mathfrak{C}^{(2)}$, di *traiettoria* $\mathfrak{T}^{(2)}$ generata dalla $\mathfrak{C}^{(2)}$ e (n. 9) di *classe di traiettorie completa di ordine* 2.

Il § 2 è dedicato alla ricerca dell'estremo assoluto di $\mathfrak{J}(\mathfrak{T}^{(2)})$. Tra i vari risultati a cui si perviene, è da rilevare il teorema esistenziale del n. 13, anche perchè la funzione F può non essere inferiormente limitata. In tale teorema giuoca un ruolo essenziale la condizione (I_2), la cui efficacia in problemi di controllo ottimo era già stata posta in luce da A. W. J. STODDART (6).

Un esempio (n. 17) illustra i risultati raggiunti.

Soggiungiamo che dal n. 13 tra l'altro segue, come caso particolare, (cfr. n. 14) un teorema di esistenza per gli integrali (1) che non era ancora stato rilevato.

---

(2) Citiamo una fondamentale Memoria di L. CESARI, relativa ad integrali in forma ordinaria: *Existence theorems for weak and usual optimal solutions in Lagrange problems with unilateral constraints, I,* Trans. Amer. Math. Soc., **124** (1966), pp. 369-412.

Ricordiamo anche un lavoro di A. W. J. STODDART, *Existence of optimal controls,* Pacific J. Math., **20-1** (1967), pp. 167-177. In tale lavoro l'A. affronta il problema di applicare alcuni propri risultati, relativi a problemi non parametrici di controllo ottimo, a classici problemi di Calcolo delle Variazioni. Peraltro, non vengono presi in considerazione integrali in forma parametrica dipendenti dagli elementi differenziali di ordine superiore al primo.

(3) Per il momento, non ci occupiamo di problemi del terzo ordine.

(4) In tutto il presente lavoro l'integrazione è intesa nel senso di Lebesgue.

(5) Facciamo presente che al n. 16 si danno condizioni sotto le quali l'ipotesi che l'insieme $E^{(2)}$ sia limitato può essere soppressa.

(6) Vedi luogo cit. in (2).

1. – Generalità.

1. IL CAMPO A_0. – *Campo* A_0 è un insieme di punti dello spazio (x, y, z) chiuso e limitato.

2. L'INSIEME $E^{(2)}$ E L'INSIEME $E_0^{(2)}$. – Salvo avviso contrario (7), $E^{(2)}$ è un insieme lineare di punti chiuso e limitato e $E_0^{(2)}$ è un componente chiuso di $E^{(2)}$.

3. LA FUNZIONE F. – α) Supponiamo che $F(x, y, z; x', y', z'; \xi, u_2, v_2, w_2)$ sia una funzione: 1) definita e continua insieme con le proprie derivate parziali del primo ordine $F_{u_2}, F_{v_2}, F_{w_2}$ in ogni punto $(x, y, z) \in A_0$, per ogni terna di valori reali (x', y', z') con $x'^2 + y'^2 + z'^2 > 0$ (8), per ogni $\xi \in E^{(2)}$ e per tutti i valori reali di (u_2, v_2, w_2); 2) positivamente omogenea di grado 1 nel complesso delle variabili x', y', z'; 3) tale che sia

$$F(x, y, z; 0, 0, 0; \xi; u_2, v_2, w_2) = 0 .$$

β) Come è ben noto, per ogni punto $(x, y, z) \in A_0$, per ogni terna di numeri reali (non tutti nulli) x', y', z', per ogni $\xi \in E^{(2)}$ e per tutti i valori reali $\bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{w}_2, u_2, v_2, w_2$ è definita la funzione

$$\begin{aligned}(4) \quad & \mathcal{E}(x, y, z; x', y', z'; \xi; \bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{w}_2; u_2, v_2, w_2) = \\ & = F(x, y, z; x', y', z'; \xi, u_2, v_2, w_2) - F(x, y, z, x', y', z'; \xi; \bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{w}_2) - \\ & - (u_2 - \bar{u}_2) F_{u_2}(x, y, z; x', y', z'; \xi; \bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{w}_2) - (v_2 - \bar{v}_2) F_{v_2}(\ldots) - (w_2 - \bar{w}_2) F_{w_2}(\ldots) .\end{aligned}$$

4. LA FUNZIONE Φ. – Sia per ogni terna reale u_2, v_2, w_2

$$\begin{aligned}(5) \quad & \Phi(x, y, z; x', y', z'; \xi; u_2, v_2, w_2) \equiv \\ & \equiv \Phi_0(x, y, z; x', y', z'; \xi) + \Phi_1(\ldots) u_2 + \Phi_2(\ldots) v_2 + \Phi_3(\ldots) w_2 ,\end{aligned}$$

dove le funzioni $\Phi_i(x, y, z; x', y', z'; \xi)$, $(i = 0, 1, 2, 3)$, sono: 1) definite e continue in ogni punto $(x, y, z) \in A_0$, per ogni terna (x', y', z') con $x'^2 + y'^2 + z'^2 > 0$ e per ogni $\xi \in E^{(2)}$; 2) positivamente omogenee di grado 1 nel complesso delle variabili x', y', z'; 3) tali che sia

$$\Phi_i(x, y, z; 0, 0, 0; \xi) = 0 , \quad (i = 0, 1, 2, 3) .$$

---

(7) Cfr. n. 16.

(8) È noto che ogni terna (x', y', z') con $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$ viene chiamata *terra normalizzata*.

5. LE CURVE AMMISSIBILI $\mathfrak{C}^{(2)}$. – α) *Curva* $\mathfrak{C}^{(2)}$ è ogni curva rettificabile dello spazio (x, y, z)

$$\mathfrak{C}^{(2)}: \quad x = x(s)\,, \quad y = y(s)\,, \quad z = z(s)\,, \quad (0 \leqslant s \leqslant L)\,,$$

(dove $L > 0$ e s è la lunghezza dell'arco rettificato) per la quale: 1) le funzioni $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ sono assolutamente continue insieme con le loro derivate del primo ordine $x'(s)$, $y'(s)$, $z'(s)$; 2) ogni punto $(x(s), y(s), z(s)) \in A_0$.

β) Una curva $\mathfrak{C}^{(2)}$ è una *curva ammissibile* $\mathfrak{C}^{(2)}$ se tra le funzioni assolutamente continue

$$\xi = \xi(s)\,, \quad (0 \leqslant s \leqslant L)\,,$$

con

$$\xi(0) \in E_0^{(2)}\,, \quad \xi(s) \in E^{(2)} \text{ per ogni } s \in [0, L]\,, \tag{6}$$

soddisfacenti per quasi tutti gli s di $[0, L]$ all'equazione differenziale

$$\xi' = \Phi\big(x(s), y(s), z(s); x'(s), y'(s), z'(s); \xi; u_2(s), v_2(s), w_2(s)\big)\,, \quad (0 \leqslant s \leqslant L)\,, \tag{7}$$

ne esiste almeno una per la quale esiste finito l'integrale (3).

γ) Inoltre si conviene che ogni curva costituita da un solo punto $(x_0, y_0, z_0) \in A_0$ è una curva ammissibile $\mathfrak{C}^{(2)}$.

δ) È ovvio che, nel caso particolare in cui la funzione F non dipende dalla variabile ξ, ogni *curva ammissibile* $\mathfrak{C}^{(2)}$ è una *curva ordinaria* $\mathfrak{C}^{(2)}$ secondo la definizione data da S. CINQUINI ([9]).

OSSERVAZIONE. – Ricordiamo la nota identità ([10])

$$u_2^2(s) + v_2^2(s) + w_2^2(s) = x''^2(s) + y''^2(s) + z''^2(s)\,. \tag{8}$$

6. INTORNO $(\varrho)^2$ DI UNA CURVA AMMISSIBILE $\mathfrak{C}^{(2)}$; CLASSE COMPLETA DI ORDINE 2 DI CURVE AMMISSIBILI $\mathfrak{C}^{(2)}$. – Queste definizioni si deducono da quelle date da S. CINQUINI ([11]) sostituendo ovunque « curva ammissibile » al posto di « curva ordinaria ».

([9]) Vedi Memoria C, n. 3, pp. 29-30.

([10]) Cfr. S. CINQUINI, *Sopra i fondamenti di una classe di problemi variazionali dello spazio*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **6** (1957), pp. 271-288 (in particolare § 2, pp. 275-278).

([11]) Vedi Memoria C, nn. 5 e 7, pp. 31-33.

7. LE TRAIETTORIE $\mathcal{T}^{(2)}$. – α) Chiamiamo *traiettoria* $\mathcal{T}^{(2)}$ *generata dalla curva ammissibile* $\mathcal{C}^{(2)}$ ogni quaterna di funzioni

$$\mathcal{T}^{(2)} \equiv \big(x(s), y(s), z(s); \xi(s)\big), \quad (0 \leqslant s \leqslant L), \tag{9}$$

per la quale $\xi(s)$ soddisfa alle condizioni indicate al n. 5, β).

β) Ogni quaterna di numeri reali $(x_0, y_0, z_0; \xi_0)$, tale che $\xi_0 \in E_0^{(2)}$, è una traiettoria $\mathcal{T}^{(2)}$ generata da $\mathcal{C}^{(2)} \equiv (x_0, y_0, z_0)$, per la quale conveniamo che sia $\mathfrak{J}(\mathcal{T}^{(2)}) = 0$.

8. INTORNO $(\varrho)^2$ DI UNA TRAIETTORIA $\mathcal{T}^{(2)}$. – α) Sia data una traiettoria

$$\mathcal{T}_0^{(2)} \equiv \big(x_0(s), y_0(s), z_0(s); \xi_0(s)\big), \quad (0 \leqslant s \leqslant L_0),$$

generata dalla curva ammissibile

$$\mathcal{C}_0^{(2)}: \quad x = x_0(s), \quad y = y_0(s), \quad z = z_0(s), \quad (0 \leqslant s \leqslant L_0;\ L_0 > 0).$$

Considerato un numero ϱ con $0 < \varrho < 1$, una traiettoria

$$\mathcal{T}^{(2)} \equiv \big(x(\sigma), y(\sigma), z(\sigma); \xi(\sigma)\big), \quad (0 \leqslant \sigma \leqslant L),$$

generata dalla curva ammissibile $\mathcal{C}^{(2)}$ di lunghezza L (avendo indicato con s e σ le lunghezze degli archi rettificati delle curve $\mathcal{C}_0^{(2)}$ e $\mathcal{C}^{(2)}$, contate a partire dai loro primi estremi se le curve sono aperte, e da punti convenientemente scelti se le curve sono chiuse) *appartiene all'intorno* $(\varrho)^2$ *di* $\mathcal{T}_0^{(2)}$, se è possibile determinare una funzione $\sigma(s)$, $(0 \leqslant s \leqslant L_0)$ con $\sigma(0) = 0$, $\sigma(L_0) = L$, la quale sia continua insieme con la propria derivata del primo ordine $\sigma'(s)$ e tale che valga la doppia disuguaglianza

$$1 - \varrho \leqslant \sigma'(s) \leqslant 1 + \varrho,$$

in modo che per ogni s di $[0, L_0]$, oltre alle disuguaglianze (5) della Memoria C (n. 5, a)), sia verificata la disuguaglianza

$$|\xi_0(s) - \xi(\sigma(s))| \leqslant \varrho.$$

β) Nel caso di una traiettoria $\mathcal{T}_0^{(2)}$ definita da una quaterna di numeri reali $(x_0, y_0, z_0; \xi_0)$, una traiettoria $\mathcal{T}^{(2)}$ generata da una curva ammissibile $\mathcal{C}^{(2)}$ di lunghezza $L > 0$ appartiene all'intorno $(\varrho)^2$ di $\mathcal{T}_0^{(2)}$, se per qualunque σ di $[0, L]$, oltre alle (6) della Memoria C (n. 5, b)), vale la disuguaglianza

$$|\xi_0 - \xi(\sigma)| \leqslant \varrho,$$

e se per qualsiasi coppia di valori distinti σ_1, σ_2 di $[0, L]$ sono verificate le disuguaglianze (7) della Memoria C (n. 5, *b*)).

Infine, ogni traiettoria definita da una quaterna di numeri reali $(x, y, z; \xi)$ appartiene all'intorno $(\varrho)^2$ di $\mathfrak{T}_0^{(2)} \equiv (x_0, y_0, z_0; \xi_0)$, se è

$$|x_0 - x| < \varrho\,, \qquad |y_0 - y| < \varrho\,, \qquad |z_0 - z| < \varrho\,, \qquad |\xi_0 - \xi| < \varrho\,.$$

9. CLASSE DI TRAIETTORIE COMPLETA DI ORDINE 2. – Dato un insieme Γ_0 di infinite traiettorie $\mathfrak{T}^{(2)}$, si dice che una traiettoria $\mathfrak{T}_0^{(2)}$ è una *traiettoria di accumulazione di ordine* 2 *dell'insieme* Γ_0, se a ogni intorno $(\varrho)^2$ di $\mathfrak{T}_0^{(2)}$ appartengono infinite traiettorie dell'insieme.

Ciò premesso, un insieme Γ_0 di traiettorie $\mathfrak{T}^{(2)}$ costituisce una *classe completa di ordine* 2, quando ogni traiettoria di accumulazione di ordine 2 dell'insieme Γ_0 appartiene a Γ_0.

OSSERVAZIONE. – È ovvio che una classe completa di ordine 2 di curve ammissibili $\mathfrak{C}^{(2)}$ genera una classe di traiettorie anch'essa completa di ordine 2.

10. DEFINIZIONI. – Come estensione immediata di una ben nota definizione, l'integrale $\mathfrak{J}(\mathfrak{T}^{(2)})$ si chiama *quasi regolare positivo*, se è

$$\mathcal{E}(x, y, z; x', y', z'; \xi; \bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{w}_2; u_2, v_2, w_2) \geq 0 \tag{10}$$

in ogni punto $(x, y, z) \in A_0$, per qualsiasi terna di valori reali non tutti nulli (x', y', z'), per ogni $\xi \in E^{(2)}$ e per tutti i valori reali di $\bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{w}_2, u_2, v_2, w_2$.

Analogamente, $\mathfrak{J}(\mathfrak{T}^{(2)})$ è *definito positivo*, se in tutti i punti $(x, y, z) \in A_0$, per tutte le terne (x', y', z') con $x'^2 + y'^2 + z'^2 \neq 0$, per ogni $\xi \in E^{(2)}$ e per tutti i valori reali di u_2, v_2, w_2 è $F > 0$.

11. SEMICONTINUITÀ E CONTINUITÀ DELL'INTEGRALE $\mathfrak{J}(\mathfrak{T}^{(2)})$. – Queste definizioni si ottengono in modo immediato da quelle, ben note, relative all'integrale (1) ([12]) tenendo presente il n. 8.

2. – Esistenza dell'estremo assoluto.

12. α) UN TEOREMA DI SEMICONTINUITÀ. – *Sia* Γ_0 *una classe di traiettorie*

$$\mathfrak{T}^{(2)} \equiv \big(x(s), y(s), z(s); \xi(s)\big)\,, \qquad (0 \leq s \leq L)\,,$$

([12]) Vedi Memoria C, n. 6, pp. 32-33.

ed esista un numero $H_0 > 0$ in modo che, per qualunque traiettoria di Γ_0, sia verificata la disuguaglianza

$$\int_0^L \sqrt{x''^2(s) + y''^2(s) + z''^2(s)}\,ds \leqslant H_0 . \tag{11}$$

Allora, se $\mathfrak{J}(\mathfrak{T}^{(2)})$ è un integrale quasi regolare positivo, $\mathfrak{J}(\mathfrak{T}^{(2)})$ risulta semicontinuo inferiormente nella classe Γ_0.

Basta ripetere, con evidenti modifiche, una dimostrazione di S. CINQUINI [13], usufruendo di un noto lemma [14].

β) ESTENSIONE DELLA SEMICONTINUITÀ. – *Sia Γ_0 una classe di traiettorie $\mathfrak{T}^{(2)}$ per la quale è verificata la condizione* (11).

Si consideri una quaterna di funzioni assolutamente continue

$$T_0 \equiv \big(x_0(s), y_0(s), z_0(s); \xi_0(s)\big) , \qquad (0 \leqslant s \leqslant L_0) ,$$

per la quale

1) $\mathfrak{C}_0^{(2)}: \ x = x_0(s) , \quad y = y_0(s) , \quad z = z_0(s) , \quad (0 \leqslant s \leqslant L_0)$

è una curva $\mathfrak{C}^{(2)}$ (n. 5, α)) *con $L_0 > 0$;*

2) *la funzione $\xi_0(s)$ verifica le condizioni*

$$\xi_0(0) \in E_0^{(2)} , \qquad \xi_0(s) \in E^{(2)} , \qquad (0 \leqslant s \leqslant L_0) ,$$

e soddisfa per quasi tutti gli s di $[0, L_0]$ all'equazione differenziale (7).

Allora, supposto che l'integrale $\mathfrak{J}(\mathfrak{T}^{(2)})$ sia quasi regolare positivo, se la funzione [15]

$$F\big(x_0(s), y_0(s), z_0(s); x_0'(s), y_0'(s), z_0'(s); \xi_0(s); u_{2,0}(s), v_{2,0}(s), w_{2,0}(s)\big)$$

non è integrabile sull'intervallo $(0, L_0)$, preso ad arbitrio un numero $N > 0$, si può determinare un numero $\varrho > 0$ in modo che, per ogni traiettoria della classe Γ_0 appartenente all'intorno $(\varrho)^2$ della quaterna T_0, sia verificata la disuguaglianza

$$\mathfrak{J}(\mathfrak{T}^{(2)}) > N .$$

---

[13] Vedi Memoria C, nn. 11-13, pp. 37-40. Cfr. anche L. TONELLI, *Su gli integrali del Calcolo delle Variazioni in forma ordinaria*, Annali Scuola Normale di Pisa, (2), **3** (1934), pp. 401-450 (in particolare n. 3, p. 408).

[14] Vedi Memoria C, n. 10, pp. 36-37.

[15] Usufruendo di notazioni ovvie, poniamo

$$u_{2,0}(s) = x_0'(s)\, y_0''(s) - x_0''(s)\, y_0'(s) , \qquad v_{2,0}(s) = \dots , \qquad w_{2,0}(s) = \dots .$$

Per provare l'asserto basta fare appello a note considerazioni ([16]).

13. PRIMO TEOREMA DI ESISTENZA DELL'ESTREMO ASSOLUTO. – *Sia* $\mathfrak{J}(\mathfrak{T}^{(2)})$ *un integrale quasi regolare positivo; sia* $K^{(2)}$ *una classe, completa di ordine* 2, *di curve ammissibili* $\mathfrak{C}^{(2)}$

$$\mathfrak{C}^{(2)}: \quad x = x(s)\,, \quad y = y(s)\,, \quad z = z(s)\,, \quad (0 \leqslant s \leqslant L)\,,$$

soddisfacente alle seguenti condizioni

(I_1) *esiste un numero* $L^{(0)} > 0$, *in modo che ogni curva di* $K^{(2)}$ *ha lunghezza non superiore a* $L^{(0)}$;

(I_2) *esistono uu numero* $H > 0$ *e una funzione* $\Psi(t)$, $(0 \leqslant t < +\infty)$, *inferiormente limitata e tale che*

$$\lim_{t \to +\infty} (\Psi(t) : t) = +\infty\,, \tag{12}$$

in modo che per qualunque curva $\mathfrak{C}^{(2)}$ *della classe* $K^{(2)}$ *è verificata la disuguaglianza* ([17])

$$\int_0^L \Psi\left(\sqrt{x''^2(s) + y''^2(s) + z''^2(s)}\right) ds \leqslant H\,. \tag{13}$$

Allora, sotto l'ipotesi che l'insieme $E^{(2)}$ *sia chiuso e limitato, indicata con* $\Gamma_{K^{(2)}}$ *la classe delle traiettorie* $\mathfrak{T}^{(2)}$ *generata dalle curve di* $K^{(2)}$, *esiste il minimo assoluto di* $\mathfrak{J}(\mathfrak{T}^{(2)})$ *in* $\Gamma_{K^{(2)}}$.

DIMOSTRAZIONE. – *a*) Prescindiamo dal caso ovvio in cui la classe $\Gamma_{K^{(2)}}$ è costituita da un numero finito di traiettorie.

È ben noto che, in virtù dell'identità $x'^2(s) + y'^2(s) + z'^2(s) = 1$, le funzioni $x(s), y(s), z(s)$ relative alle curve di $K^{(2)}$ risultano equiassolutamente continue in $[0, L]$; inoltre sono ugualmente limitate, perchè il campo A_0 è limitato.

Utilizzando le (12) e (13) e procedendo in modo analogo ad altri AA. ([18]), si prova che gli integrali

$$\int \sqrt{x''^2(s) + y''^2(s) + z''^2(s)}\, ds \tag{14}$$

([16]) Vedi S. CINQUINI, Memoria C, n. 14, pp. 41-42; vedi anche L. TONELLI, luogo cit. in ([13]), n. 6, pp. 412-413.

([17]) È ovvio che nell'ipotesi che sia verificata la (13) è implicita la condizione che esista finito l'integrale al primo membro.

([18]) Vedi: L. TONELLI, luogo cit. in ([13]), n. 9, pp. 414-415; S. CINQUINI, *Sopra i problemi variazionali in forma parametrica dipendenti dalle derivate di ordine superiore*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **13** (1944) [1947], pp. 19-49 (in particolare n. 15, pp. 33-35); A. W. J. STODDART, luogo cit. in ([2]), n. 7, teorema 6, p. 174.

relativi alle curve $\mathcal{C}^{(2)}$ della classe $K^{(2)}$, e quindi anche le funzioni $x'(s), y'(s), z'(s)$, $(0 \leqslant s \leqslant L)$, sono equiassolutamente continui.

Da questa proprietà, tenuta presente la condizione (I_1), segue in modo ovvio l'esistenza di una costante $H_1 > 0$ tale che per qualsiasi curva di $K^{(2)}$ risulta

$$\int_0^L \sqrt{x''^2(s) + y''^2(s) + z''^2(s)}\, ds \leqslant H_1 . \tag{15}$$

b) Rileviamo che le funzioni $\xi(s)$, $(0 \leqslant s \leqslant L)$, relative alle traiettorie della classe $\Gamma_{K^{(2)}}$ sono equiassolutamente continue.

Infatti, qualunque sia la traiettoria $\mathfrak{T}^{(2)} \in \Gamma_{K^{(2)}}$, se E è un qualsiasi insieme di punti di $[0, L]$, dalla (7), in virtù della (5) abbiamo

$$\int_E |\xi'(s)|\, ds = \int_E |\Phi_0(x(s), \dots, \xi(s)) + \Phi_1(\dots)u_2(s) + \Phi_2(\dots)v_2(s) + \Phi_3(\dots)w_2(s)|\, ds . \tag{16}$$

Per la continuità delle funzioni $\Phi_i(x, y, z;\, x', y', z';\, \xi)$, $(i = 0, 1, 2, 3)$, è ovvio che esiste un numero $M > 0$ per il quale dalla (16) segue

$$\int_E |\xi'(s)|\, ds \leqslant M \left[m(E) + \sqrt{3} \int_E \sqrt{u_2^2(s) + v_2^2(s) + w_2^2(s)}\, ds \right], \tag{17}$$

vale a dire, in virtù della equiassoluta continuità degli integrali (14) e della (8), l'asserto è evidente.

È ovvio inoltre che le funzioni $\xi(s)$, $(0 \leqslant s \leqslant L)$, sono ugualmente limitate, perchè l'insieme $E^{(2)}$ è limitato.

c) Si dimostra facilmente che il limite inferiore i di $\mathfrak{J}(\mathfrak{T}^{(2)})$ nella classe $\Gamma_{K^{(2)}}$ è finito.

Infatti dalla (4), assumendo $\bar{u}_2 = 0$, $\bar{v}_2 = 0$, $\bar{w}_2 = 0$, siccome l'integrale $\mathfrak{J}(\mathfrak{T}^{(2)})$ è quasi regolare positivo, per ogni settupla

$$(x, y, z;\, x', y', z';\, \xi) \tag{18}$$

per la quale

$$(x, y, z) \in A_0 , \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 , \quad \xi \in E^{(2)} ,$$

e per tutti i valori reali di u_2, v_2, w_2, risulta

$$F(x, y, z;\, x', y', z';\, \xi;\, u_2, v_2, w_2) \geqslant F(x, y, z;\, x', y', z';\, \xi;\, 0, 0, 0) +$$
$$+ u_2 F_{u_2}(x, y, z;\, x', y', z';\, \xi;\, 0, 0, 0) + v_2 F_{v_2}(\dots) + w_2 F_{w_2}(\dots) ,$$

ossia

$$F(x,y,z;x',y',z';\xi;u_2,v_2,w_2) \geqslant -|F(x,\ldots;\xi;0,0,0)| -$$
$$-\sqrt{F^2_{u_2}(x,\ldots;\xi;0,0,0)+F^2_{v_2}(\ldots)+F^2_{w_2}(\ldots)} \times \sqrt{u_2^2+v_2^2+w_2^2}\,.$$

Per la continuità delle funzioni $F(x,y,z;x',y',z';\xi;0,0,0), F_{u_2}(\ldots), F_{v_2}(\ldots), F_{w_2}(\ldots)$, esistono due numeri positivi N_0, N_1 tali che per ogni settupla (18) risulta

$$(19) \qquad F(x,y,z;x',y',z';\xi;u_2,v_2,w_2) \geqslant -N_1\sqrt{u_2^2+v_2^2+w_2^2}-N_0\,,$$

vale a dire, qualunque sia la traiettoria $\mathfrak{T}^{(2)} \in \Gamma_{K^{(2)}}$, in virtù delle (8), (15) e della condizione (I_1)

$$(20) \qquad \mathfrak{J}(\mathfrak{T}^{(2)}) \geqslant -N_1H_1-N_0L^{(0)}\,.$$

d) Consideriamo, seguendo un noto procedimento ([19]), una successione minimizzante, estratta da $\Gamma_{K^{(2)}}$, di traiettorie $\mathfrak{T}^{(2)}$

$$(21) \qquad \mathfrak{T}^{(2)}_n \equiv \big(x_n(s), y_n(s), z_n(s); \xi_n(s)\big)\,, \quad (0 \leqslant s \leqslant L_n)\,, \quad n=1,2,\ldots$$

tali cioè che sia

$$(22) \qquad \mathfrak{J}(\mathfrak{T}^{(2)}_n) \leqslant i+\frac{1}{n}\,,$$

intendendo che, quando è $i<0$, si considerano solo le traiettorie $\mathfrak{T}^{(2)}_n$ con $n>\bar{n}$, dove $\bar{n}$ è il minimo intero positivo per cui $\bar{n}>-2/i$.

È ovvio che, se è $i=0$ e se fra le traiettorie della successione minimizzante (21) ce n'è almeno una definita da una quaterna di numeri reali $(x_0, y_0, z_0; \xi_0)$, essa fornisce il minimo di $\mathfrak{J}(\mathfrak{T}^{(2)})$ nella classe $\Gamma_{K^{(2)}}$.

Eliminata tale eventualità, si possono presentare due casi: o è $i=0$, ma nessuna traiettoria della successione (21) è definita da una quaterna di numeri reali, oppure $i \neq 0$ e in questo caso, in virtù di quanto abbiamo convenuto a proposito della (22), non esiste alcuna traiettoria (21) definita da una quaterna di numeri reali. Vale a dire, in entrambi i casi, per ogni traiettoria $\mathfrak{T}^{(2)}_n$, $(n=1,2,\ldots)$ la curva (che genera $\mathfrak{T}^{(2)}_n$)

$$\mathfrak{C}^{(2)}_n: \quad x=x_n(s)\,, \quad y=y_n(s)\,, \quad z=z_n(s)\,, \quad (0 \leqslant s \leqslant L_n)\,,$$

ha lunghezza

$$L_n>0\,.$$

([19]) Cfr. L. TONELLI, luogo cit. in ([13]), n. 9, pp. 414-415; S. CINQUINI, luogo cit. in ([18]), n. 15 e anche Memoria C, n. 16, p. 43.

e) Ciò premesso, sia

$$\inf L_n = 0\,, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{23}$$

e, in corrispondenza a ciascuna delle traiettorie (21), consideriamo nell'iperspazio $(x, y, z; \xi)$ la curva

$$x = x_n(s)\,, \quad y = y_n(s)\,, \quad z = z_n(s)\,, \quad \xi = \xi_n(s)\,, \quad (0 \leqslant s \leqslant L_n)\,, \tag{24}$$

la quale risulta rettificabile e ha lunghezza

$$\Lambda_n = \int_0^{L_n} \sqrt{x_n'^2(s) + y_n'^2(s) + z_n'^2(s) + \xi_n'^2(s)}\,ds = \int_0^{L_n} \sqrt{1 + \xi_n'^2(s)}\,ds\,,$$

vale a dire, in virtù della (17) [20]

$$\Lambda_n \leqslant (1 + M)L_n + \sqrt{3}\,\mathrm{M}\int_0^{L_n} \sqrt{u_{2,n}^2(s) + v_{2,n}^2(s) + w_{2,n}^2(s)}\,ds\,.$$

Da questa disuguaglianza, tenendo conto della (23), in virtù della equiassoluta continuità degli integrali (14), segue che anche il limite inferiore delle lunghezze Λ_n è uguale a zero.

Quindi [21] possiamo estrarre dalla successione (24) una successione parziale la quale converge uniformemente verso una quaterna di numeri reali

$$(x_0, y_0, z_0; \xi_0)\,. \tag{25}$$

È ovvio che (x_0, y_0, z_0) è una curva (dello spazio (x, y, z)) che appartiene al campo A_0 e inoltre, in virtù della equiassoluta continuità delle derivate $x_n'(s), y_n'(s), z_n'(s)$, è di accumulazione di ordine 2 della classe $K^{(2)}$ [22]: perciò, siccome questa classe è completa di ordine 2, la curva (x_0, y_0, z_0) appartiene alla classe.

È evidente inoltre che $\xi_0 \in E_0^{(2)}$; quindi la quaterna (25) è una traiettoria della classe $\Gamma_{K^{(2)}}$.

Ne segue, riprendendo in modo opportuno un noto ragionamento [23], che necessariamente risulta $i = 0$.

---

[20] Usando ovvie notazioni, poniamo

$$u_{2,n}(s) = x_n'(s)\,y_n''(s) - x_n''(s)\,y_n'(s)\,, \qquad v_{2,n}(s) = \ldots\,, \qquad w_{2,n}(s) = \ldots\,.$$

[21] Cfr. L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, 2 volumi, N. Zanichelli, Bologna (1921-23). In particolare, vol. I, cap. II, § 3, pp. 86-92.

[22] Vedi S. CINQUINI, luogo cit. in [18], p. 34.

[23] Cfr. luogo cit. in [22].

Infatti, tenuto presente che per la traiettoria (25) risulta $\mathfrak{J}(\mathfrak{C}^{(2)})=0$, non può essere ovviamente $i>0$.

Se poi fosse $i<0$, onde, in virtù di quanto abbiamo convenuto in *d*),

$$\mathfrak{J}(\mathfrak{C}_n^{(2)})\leqslant i+\frac{1}{n}<\frac{i}{2}, \qquad n=1,2,\ldots \tag{26}$$

di nuovo giungeremmo ad un assurdo.

Infatti per la (23), tenuto ancora conto dell'equiassoluta continuità degli integrali (14), esisterebbe qualche valore di n per cui sarebbero verificate entrambe le disuguaglianze

$$\int_0^{L_n}\sqrt{u_{2,n}^2(s)+v_{2,n}^2(s)+w_{2,n}^2(s)}\,ds<-\frac{i}{4N_1}, \qquad L_n<-\frac{i}{4N_0},$$

e quindi anche, per la (19)

$$\mathfrak{J}(\mathfrak{C}_n^{(2)})>N_1\frac{i}{4N_1}+N_0\frac{i}{4N_0}=\frac{i}{2},$$

contrariamente alla (26).

Pertanto quanto abbiamo asserito risulta provato, vale a dire la traiettoria (25) fornisce il minimo di $\mathfrak{J}(\mathfrak{C}^{(2)})$ nella classe $\Gamma_{K^{(2)}}$.

f) Rimane da considerare il caso in cui sia, per ogni n,

$$L_n\geqslant L^*>0\,.$$

In tale eventualità, ripetendo una dimostrazione di S. CINQUINI [24], nella quale è stato ripreso, con opportuni adattamenti, un noto procedimento [25], si estrae dalla (21) una successione parziale

$$\mathfrak{C}_{r_n}^{(2)}\equiv\big(x_{r_n}(s),y_{r_n}(s),z_{r_n}(s);\xi_{r_n}(s)\big)\,, \qquad (0\leqslant s\leqslant L_{r_n})\,, \qquad n=1,2,\ldots \tag{27}$$

in modo che le successioni

$$\{x_{r_n}(s)\}\,,\ \{y_{r_n}(s)\}\,,\ \{z_{r_n}(s)\}\,,\ \{\xi_{r_n}(s)\}\,,\ \left\{\frac{dx_{r_n}(s)}{ds}\right\},\ \left\{\frac{dy_{r_n}(s)}{ds}\right\},\ \left\{\frac{dz_{r_n}(s)}{ds}\right\}, \tag{28}$$

convergano in modo uniforme rispettivamente verso sette funzioni

$$x_\infty(\sigma),\ y_\infty(\sigma),\ z_\infty(\sigma),\ \xi_\infty(\sigma),\ x'_\infty(\sigma),\ y'_\infty(\sigma),\ z'_\infty(\sigma)\,, \tag{29}$$

([24]) Vedi luogo cit. per secondo in ([18]), p. 35.
([25]) Vedi L. TONELLI, luogo cit. in ([21]).

definite in $[0, L_\infty]$ con $L^* \leqslant L_\infty \leqslant L^{(0)}$, assolutamente continue e tali che sia

$$x'_\infty(\sigma) = \frac{dx_\infty(\sigma)}{d\sigma}, \qquad y'_\infty(\sigma) = \frac{dy_\infty(\sigma)}{d\sigma}, \qquad z'_\infty(\sigma) = \frac{dz_\infty(\sigma)}{d\sigma},$$
$$x'^2_\infty(\sigma) + y'^2_\infty(\sigma) + z'^2_\infty(\sigma) = 1,$$

per ogni σ di $[0, L_\infty]$ [26].

Tenuto conto che il campo A_0 e gli insiemi $E^{(2)}$, $E_0^{(2)}$ sono chiusi e che la classe di curve $K^{(2)}$ è completa di ordine 2, segue evidentemente che la curva

$$(30) \qquad \mathcal{C}_\infty^{(2)}: \quad x = x_\infty(\sigma), \quad y = y_\infty(\sigma), \quad z = z_\infty(\sigma), \quad (0 \leqslant \sigma \leqslant L_\infty)$$

appartiene a $K^{(2)}$ e inoltre

$$\xi_\infty(0) \in E_0^{(2)}, \qquad \xi_\infty(\sigma) \in E^{(2)}, \qquad (0 \leqslant \sigma \leqslant L_\infty).$$

Ciò premesso, dimostriamo che $\xi_\infty(\sigma)$, $[0, L_\infty]$, è un integrale dell'equazione differenziale (7), ossia, in virtù della (5), che per ogni σ di $[0, L_\infty]$ è [27]

$$(31) \qquad \xi_\infty(\sigma) - \xi_\infty(0) = \\ = \int_0^\sigma [\Phi_0(x_\infty(\tau), \ldots; x'_\infty(\tau), \ldots; \xi_\infty(\tau)) + \Phi_1(\ldots) u_{2,\infty}(\tau) + \Phi_2(\ldots) v_{2,\infty}(\tau) + \\ + \Phi_3(\ldots) w_{2,\infty}(\tau)]\, d\tau\,.$$

Infatti, siccome le (27) costituiscono una successione di traiettorie, le funzioni

---

[26] Facciamo presente che dalla dimostrazione di S. Cinquini segue

$$\lim_{n \to +\infty} L_{r_n} = L_\infty$$

e che, considerata una qualunque traiettoria $\mathcal{T}_{r_n}^{(2)}$, risulta

$$s = \frac{L_{r_n}}{L_\infty}\sigma$$

[dove, come è ovvio, s e σ rappresentano rispettivamente le lunghezze degli archi rettificati delle curve (dello spazio (x, y, z)

$$\mathcal{C}_{r_n}^{(2)}: \quad x = x_{r_n}(s), \quad y = y_{r_n}(s), \quad z = z_{r_n}(s), \quad (0 \leqslant s \leqslant L_{r_n}),$$
$$\mathcal{C}_\infty^{(2)}: \quad x = x_\infty(\sigma), \quad y = y_\infty(\sigma), \quad z = z_\infty(\sigma), \quad (0 \leqslant \sigma \leqslant L_\infty)].$$

[27] Con le notazioni $(u_{2,\infty}(\sigma), v_{2,\infty}(\sigma), w_{2,\infty}(\sigma))$, $(u_{2,r_n}(s), v_{2,r_n}(s), w_{2,r_n}(s))$ indichiamo le funzioni u_2, v_2, w_2 relative rispettivamente alle curve $\mathcal{C}_\infty^{(2)}$, $\mathcal{C}_{v_n}^{(2)}$ (cfr. [26]).

$\xi_{r_n}(s)$, $(n = 1, 2, \dots)$ sono integrali della (7), vale a dire

$$\begin{aligned}(32)\qquad \xi_{r_n}(s) - \xi_{r_n}(0) = \\ &= \int_0^s [\Phi_0(x_{r_n}(t), \dots; x'_{r_n}(t), \dots; \xi_{r_n}(t)) + \Phi_1(\dots)u_{2,r_n}(t) + \Phi_2(\dots)v_{2,r_n}(t) + \\ &+ \Phi_3(\dots)w_{2,r_n}(t)]\, dt\,, \qquad (0 \leqslant s \leqslant L_{r_n})\,.\end{aligned}$$

D'altra parte, tenendo presente quanto abbiamo rilevato in ([26]), in virtù di un'ovvia estensione di un teorema di S. CINQUINI ([28]), qualunque sia $\sigma \in [0, L_\infty]$, risulta

$$\begin{aligned}(33)\qquad &\lim_{n\to+\infty} \int_0^\sigma \left[\Phi_0\left(x_{r_n}\left(\frac{L_{r_n}}{L_\infty}\tau\right), \dots; x'_{r_n}\left(\frac{L_{r_n}}{L_\infty}\tau\right), \dots; \xi_{r_n}\left(\frac{L_{r_n}}{L_\infty}\tau\right)\right) + \right.\\ &\left. + \Phi_1(\dots)u_{2,r_n}\left(\frac{L_{r_n}}{L_\infty}\tau\right) + \dots\right] \frac{L_{r_n}}{L_\infty}\, d\tau = \\ &= \int_0^\sigma [\Phi_0(x_\infty(\tau), \dots; x'_\infty(\tau), \dots; \xi_\infty(\tau)) + \Phi_1(\dots)u_{2,\infty}(\tau) + \dots + \Phi_3(\dots)w_{2,\infty}(\tau)]\, d\tau\,.\end{aligned}$$

Essendo inoltre

$$(34)\qquad \lim_{n\to+\infty}\left[\xi_{r_n}\left(\frac{L_{r_n}}{L_\infty}\sigma\right) - \xi_{r_n}(0)\right] = \xi_\infty(\sigma) - \xi_\infty(0)\,,$$

dalla (32), tenendo ancora conto della ([26]), per le (33) e (34) segue in modo ovvio la (31), vale a dire l'asserto risulta provato.

g) Considerata la quaterna di funzioni

$$(35)\qquad x_\infty(\sigma),\; y_\infty(\sigma),\; z_\infty(\sigma);\; \xi_\infty(\sigma)\,, \qquad (0 \leqslant \sigma \leqslant L_\infty)\,,$$

in virtù di quanto abbiamo rilevato in *f*), dalla (22) e dal teorema del n. 12, β) si deduce che la funzione

$$F(x_\infty(\sigma), \dots; x'_\infty(\sigma), \dots; \xi_\infty(\sigma); u_{2,\infty}(\sigma), v_{2,\infty}(\sigma), w_{2,\infty}(\sigma))$$

è integrabile sull'intervallo $(0, L_\infty)$.

Pertanto la quaterna (35) è una traiettoria (che indichiamo con $\mathcal{C}_\infty^{(2)}$) la quale, siccome $\Gamma_{K^{(2)}}$ è una classe completa di ordine 2 ([29]), appartiene a $\Gamma_{K^{(2)}}$.

([28]) Vedi S. CINQUINI, *Sopra la continuità di una classe di integrali del Calcolo delle Variazioni*, Riv. Mat. Univ. Parma, (3), **3** (1974), pp. 139-161 (in particolare n. 3, pp. 146-149); vedi anche A. W. J. STODDART, luogo cit. in ([2]), teorema 2, pp, 170-172 e teorema 4, pp. 172-173.

([29]) Vedi n. 9, Osservazione.

Ancora dalla (22) e dal teorema del n. 12, α) si deduce

$$\mathfrak{J}(\mathcal{C}_{\infty}^{(2)}) = i\,,$$

vale a dire $\mathcal{C}_{\infty}^{(2)}$ fornisce il minimo di $\mathfrak{J}(\mathcal{C}^{(2)})$ nella classe $\Gamma_{K^{(2)}}$.

14. OSSERVAZIONE. – Nel caso particolare in cui la funzione F non dipende dalla variabile ξ, dal risultato del n. 13 segue una condizione non ancora rilevata per l'esistenza del minimo assoluto dell'integrale (3) in una qualunque classe, completa di ordine 2, di *curve ordinarie* $C^{(2)}$ (definite da S. CINQUINI) per la quale sono verificate le ipotesi (I_1) e (I_2) del n. 13.

15. COROLLARIO I. – *Nel teorema del* n. 13 *la condizione* (I_1) *può essere soppressa, se è verificata almeno una delle seguenti ipotesi:*

(A) *Esiste un numero $h_0 > 0$ in modo che in tutto il campo A_0, per ogni terna normalizzata (x', y', z'), per ogni $\xi \in E^{(2)}$, e per tutti i numeri reali u_2, v_2, w_2, sia*

$$F(x, y, z; x', y', z'; \xi; u_2, v_2, w_2) \geqslant h_0\,.$$

(B) *Esiste un numero $h > 0$ in modo che, per ogni $t \geqslant 0$, sia*

$$\Psi(t) \geqslant ht\,.$$

(C) *Per la funzione $\Psi(t)$, oltre alla condizione* (I_2) *sono verificate le seguenti ipotesi: $\Psi(t)$, $(0 \leqslant t < +\infty)$, è crescente, convessa secondo Jensen e tale che $\Psi(0) = 0$.*

Per provare l'asserto basta tenere presente quanto ha rilevato S. CINQUINI al n. 19 della Memoria C ([30]).

16. COROLLARIO II. – *Ferma restando l'ipotesi che l'insieme $E^{(2)}$ è chiuso e l'insieme $E_0^{(2)}$ è limitato e chiuso, nel teorema del* n. 13 *l'ipotesi che $E^{(2)}$ sia limitato può essere soppressa, se è verificata la seguente condizione:*

Le funzioni $\Phi_i(x, y, z; x', y', z'; \xi)$, $(i = 0, 1, 2, 3)$, soddisfano alle ipotesi 1), 2), 3) *del* n. 4 *e inoltre sono limitate nel loro campo di definizione, vale a dire esiste un numero $M > 0$ tale che in ogni punto $(x, y, z) \in A_0$, per ogni terna normalizzata (x', y', z') e per ogni $\xi \in E^{(2)}$, valgono le disuguaglianze*

$$|\Phi_i(x, y, z; x', y', z'; \xi)| \leqslant M\,, \qquad (i = 0, 1, 2, 3)\,. \tag{36}$$

([30]) È ovvio che, nell'ipotesi (B), nel presente lavoro si usufruisce della (13) (invece della (23) di Memoria C).

Infatti, qualunque sia la traiettoria (9) della classe $\Gamma_{K^{(2)}}$, siccome $\xi(s)$ è un integrale dell'equazione (7), per ogni $s \in [0, L]$ è

$$\xi(s) = \xi(0) + \int_0^s \Phi(x(t), y(t), z(t); x'(t), y'(t), z'(t); \xi(t); u_2(t), v_2(t), w_2(t))\, dt, \tag{37}$$

con

$$\xi(0) \in E_0^{(2)}.$$

Poichè l'insieme $E_0^{(2)}$ è limitato, vale a dire esiste un numero M_0 per il quale è $|\xi| \leqslant M_0$ in tutti i punti di $E_0^{(2)}$, in virtù delle (5) e (36), dalla (37) segue

$$|\xi(s)| \leqslant M_0 + M \int_0^L (1 + |u_2(s)| + |v_2(s)| + |w_2(s)|)\, ds, \qquad (0 \leqslant s \leqslant L),$$

e anche, per le (15), (8) e per la condizione (I_1)

$$|\xi(s)| \leqslant M_0 + M(L^{(0)} + \sqrt{3}\, H_1), \qquad (0 \leqslant s \leqslant L).$$

17. ESEMPIO. – Rileviamo che il teorema del n. 13 fornisce un risultato relativo all'esistenza del minimo assoluto di $\mathfrak{J}(\mathfrak{C}^{(2)})$ anche nel caso in cui la funzione F non è inferiormente limitata.

Sia

$$A_0 \equiv [-2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi, \quad -2\pi \leqslant y \leqslant 2\pi, \quad -2\pi \leqslant z \leqslant 2\pi],$$

$$E^{(2)} \equiv E_0^{(2)} \equiv [0, \exp[2\pi]], \tag{38}$$

$$\begin{aligned} &F(x, y, z; x', y', z'; \xi; u_2, v_2, w_2) \equiv \\ &\equiv \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,[(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3 (u_2^2 + v_2^2 + w_2^2) - \xi u_2 + \exp[4\pi]], \end{aligned}$$

$$\Phi(x, y, z; x', y', z'; \xi; u_2, v_2, w_2) \equiv \sqrt{x'^2 + y'^2}\, \xi u_2. \tag{39}$$

Si consideri la classe $K^{(2)}$ completa di ordine 2 costituita dalla successione di curve

$$\mathfrak{C}_n^{(2)}: \begin{cases} x = x_n(s) \equiv \dfrac{1}{n} \cos ns, & \text{per } 0 \leqslant s \leqslant \dfrac{2\pi}{n^4}, \\ x = x_n(s) \equiv -\left(\operatorname{sen} \dfrac{2\pi}{n^3}\right)\left(s - \dfrac{2\pi}{n^4}\right) + \dfrac{1}{n} \cos \dfrac{2\pi}{n^3}, & \text{per } \dfrac{2\pi}{n^4} < s \leqslant \dfrac{4\pi}{n^2}; \\ y = y_n(s) \equiv \dfrac{1}{n} \operatorname{sen} ns, & \text{per } 0 \leqslant s \leqslant \dfrac{2\pi}{n^4}, \\ y = y_n(s) \equiv \left(\cos \dfrac{2\pi}{n^3}\right)\left(s - \dfrac{2\pi}{n^4}\right) + \dfrac{1}{n} \operatorname{sen} \dfrac{2\pi}{n^3}, & \text{per } \dfrac{2\pi}{n^4} < s \leqslant \dfrac{4\pi}{n^2}; \\ z = z_n(s) \equiv 0, & \text{per } 0 \leqslant s \leqslant \dfrac{4\pi}{n^2}; \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

e dalla curva

$$\mathcal{C}_0^{(2)} \equiv (0, 0, 0)\,.$$

Assumiamo

$$\Psi(t) \equiv t^2;$$

è ovvio che la (13) è soddisfatta.

Tenendo presente la (7), in virtù della (39) si verifica facilmente che ciascuna delle curve $\mathcal{C}_n^{(2)}$, $(n = 1, 2, \dots)$ è una curva ammissibile $\mathcal{C}^{(2)}$, la quale genera l'insieme delle traiettorie

$$\mathcal{T}_{n,c}^{(2)} \equiv \left(x_n(s), y_n(s), z_n(s); \xi_{n,c}(s)\right)\,, \qquad \left(0 \leqslant s \leqslant \frac{4\pi}{n^2}\right), \tag{40}$$

dove

$$\xi_{n,c}(s) \equiv c \exp[ns] \qquad \text{per } 0 \leqslant s \leqslant \frac{2\pi}{n^4}\,,$$

$$\xi_{n,c}(s) \equiv c \exp[2\pi/n^3] \qquad \text{per } \frac{2\pi}{n^4} < s \leqslant \frac{4\pi}{n^2}\,,$$

perchè per c variabile nel rispettivo intervallo $[0 \exp[2\pi(1 - 1/n^3)]]$ è soddisfatta la (38).

Risulta

$$\mathfrak{I}(\mathcal{T}_{n,c}^{(2)}) = \int\limits_0^{2\pi/n^4} \left(\frac{1}{n^3} n^2 - nc \exp[ns] + \exp[4\pi]\right) ds + \int\limits_{2\pi/n^4}^{4\pi/n^3} \exp[4\pi] ds =$$
$$= \frac{2\pi}{n^5} - c\left(\exp\left[\frac{2\pi}{n^3}\right] - 1\right) + \frac{4\pi \exp[4\pi]}{n^2}\,.$$

Anche $\mathcal{C}_0^{(2)}$ è una curva ammissibile, la quale genera la famiglia di traiettorie (ciascuna definita da una quaterna di numeri reali)

$$\mathcal{T}_{0,c}^{(2)} \equiv (0, 0, 0; c)\,, \tag{41}$$

dove c varia nell'intervallo $[0, \exp[2\pi]]$, ed è

$$\mathfrak{I}(\mathcal{T}_{0,c}^{(2)}) = 0\,.$$

Si verifica facilmente [31] che per ogni intero n, qualunque sia $c \in [0, \exp[2\pi(1 - 1/n^3)]]$, è

$$\mathfrak{I}(\mathcal{T}_{n,c}^{(2)}) > 0\,.$$

---

[31] Infatti, siccome per ogni intero n, qualunque sia $c \in [0, \exp[2\pi(1 - 1/n^3)]]$, è verificata la disuguaglianza

$$\frac{2\pi}{n^5} - c[\exp(2\pi/n^3] - 1) + \frac{4\pi \exp[4\pi]}{n^2} > -\exp[2\pi] \times (\exp[2\pi/n^3] - 1) + \frac{4\pi \exp[4\pi]}{n^2}\,,$$

Pertanto, ognuna delle traiettorie (41) fornisce il minimo di $\mathfrak{J}(\mathfrak{T}^{(2)})$ nella classe $\Gamma_{K^{(2)}}$.

18. SECONDO TEOREMA DI ESISTENZA DELL'ESTREMO ASSOLUTO. – *Sia $\mathfrak{J}(\mathfrak{T}^{(2)})$ un integrale quasi regolare positivo; sia $K^{(2)}$ una classe, completa di ordine 2, di curve ammissibili $\mathfrak{C}^{(2)}$ aventi lunghezza inferiore a un numero fisso $L^{(0)} > 0$; esista una funzione $\Psi(t)$, $(0 \leq t < +\infty)$, inferiormente limitata e tale che sia verificata la (12), in modo che in tutto il campo A_0, per ogni terna normalizzata (x', y', z'), per ogni ξ appartenente all'insieme chiuso e limitato $E^{(2)}$ e per tutti i numeri reali u_2, v_2, w_2, sia*

$$F(x, y, z; x', y', z'; \xi; u_2, v_2, w_2) \geq \Psi\left(\sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}\right). \tag{42}$$

Allora, indicata con $\Gamma_{K^{(2)}}$ la classe delle traiettorie $\mathfrak{T}^{(2)}$ generata dalle curve di $K^{(2)}$, esiste il minimo assoluto di $\mathfrak{J}(\mathfrak{T}^{(2)})$ in $\Gamma_{K^{(2)}}$.

Per provare l'asserto, basta modificare in modo opportuno il ragionamento del n. 13, tenendo presente una dimostrazione di S. CINQUINI ([32]).

19. OSSERVAZIONE. – Quanto abbiamo rilevato ai nn. 15 e 16, vale anche per il teorema del n. 18, tenendo presente che, in virtù della (42), alla ipotesi (A) del n. 15 può essere sostituita la

(A') *L'integrale $\mathfrak{J}(\mathfrak{T}^{(2)})$ è definito positivo.*

---

basta osservare che la successione

$$\left\{-\exp[2\pi]\times(\exp[2\pi/n^3]-1)+\frac{4\pi\exp[4\pi]}{n^2}\right\}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

è decrescente e che risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\left[-\exp[2\pi]\times(\exp[2\pi/n^3]-1)+\frac{4\pi\exp[4\pi]}{n^2}\right] = 0.$$

([32]) Vedi Memoria C, n. 16, p. 43; cfr. anche luogo cit. per secondo in ([18]), n. 15.