Sull'esistenza di soluzioni periodiche per certe equazioni ellittiche totalmente non lineari (*).

ALBINO CANFORA (Napoli) (**)

Summary. - *In this paper we study the problem*:

$$\lambda u + F(D_x^{2m} u, D_y^{2m} u) = f(x, y) , \quad m = 1, 2 , \tag{1}$$

where f is given in $\mathbb{C}_{\#}^{\infty} = \{g \in \mathbb{C}^{\infty} | g \text{ periodic}\}$.
We find, for every $f \in \mathbb{C}_{\#}^{\infty}$, at least one solution u in the same class $\mathbb{C}_{\#}^{\infty}$.
The hypothesis on $F(\xi, \eta)$ is the following:

$$|D_\xi^h D_\eta^k F(\xi, \eta)| \leqslant N_{h+k} ; \quad 0 < \nu \leqslant F_\xi(\xi, \eta) \leqslant N_1 , \quad 0 < \nu \leqslant F_\eta(\xi, \eta) \leqslant N_1 ; \tag{2}$$

moreover, when $m = 2$, a Cordes condition is required:

$$\inf \frac{(D_\xi F + D_\eta F + \lambda)^2}{(D_\xi F)^2 + (D_\eta F)^2 + \lambda^2} > 2 . \tag{3}$$

The method used is based on R. Caccioppoli's inversion theorem for proper-open mappings, in the context of countably normed spaces. An essential tool is a theorem of S. Campanato concerning the existence of $W^{2,p}$-solutions (p « near 2 ») for elliptic-Cordes equations with bounded measurable coefficients.

Introduzione.

Uno dei risultati più significativi dell'Analisi Nonlineare è il Teorema di RENATO CACCIOPPOLI (cfr. [7]) sull'invertibilità globale, tra spazi di Banach, delle trasformazioni proprie e localmente invertibili. Questo teorema, enunciato e utilizzato per la prima volta da CACCIOPPOLI in [7] è da inquadrarsi in una serie di risultati consimili dovuti ad altri Autori (vedi C. MIRANDA [17], nn. 10, 13 del cap. II e nn. 8, 9 del cap. III).

Le applicazioni — nello studio dei problemi al contorno per equazioni alle derivate parziali — sono state molteplici; soprattutto per le equazioni quasi-lineari. Per quanto riguarda le equazioni totalmente non lineari, si presentano difficoltà maggiori.

(*) Entrata in Redazione il 10 ottobre 1980.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dl GNAFA presso l'Istituto di Matematica Renato Caccioppoli dell'Università di Napoli.

Tuttavia, non sono mancati significativi risultati per le equazioni (totalmente non lineari) ellittiche del secondo ordine in due variabili. Ricordiamo, al riguardo, quelli ottenuti da JEAN LERAY, in due Memorie del 1938-39 ([15], [16]), per l'equazione:

$$f(r, s, t, p, q, x, y, z) = 0 \left[p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y},\ r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y},\ t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right] \tag{1}$$

in un aperto limitato Ω del piano (x, y), supponendo verificate le condizioni: $f \in C^3$, ed inoltre:

$$\begin{cases} f_p^2 + f_q^2 + f_x^2 + f_y^2 + f_z^2 + f_{p^2}^2 + \ldots + f_{px}^2 + \ldots + f_{z^2}^2 \\ \qquad\qquad < A(D)[f_s^2 + f_r^2 + f_t^2][r^2 + t^2 + s^2 + 1] \\ f_{rp}^2 + \ldots + f_{tz}^2 \qquad < A(D)[f_s^2 + f_r^2 + f_t^2] \\ f_{r^2}^2 + \ldots + f_{sr}^2 + \ldots + f_{t^2}^2 < A(D)[f_s^2 + f_r^2 + f_t^2][r^2 + s^2 + t^2 + 1]^{-1} \\ f_s^2 + f_r^2 + f_t^2 \qquad < A(D)[4 f_r f_t - f_s^2] \end{cases} \tag{2}$$

dove $A(D)$ è una costante positiva crescente nella classe dei domini $D \subset \Omega$ (ovviamente ordinata per inclusione).

Per la (1) si stabiliscono dei teoremi di esistenza di soluzioni regolari (di classe C^3).

Nel caso che la f sia analitica nei suoi argomenti, va ricordato un teorema ottenuto da BERNSTEIN nel 1910 (cfr. [5], pag. 13) che asserisce: «Se in (1) la f è analitica (anche rispetto ad un parametro α oltre che rispetto a x, y, z, p, q, r, s, t), se si sa che (1) è risolubile per $\alpha = \alpha_0$ e se — uniformemente rispetto ad $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$ — si possono maggiorare a priori i massimi moduli delle derivate di ordine $\leqslant 2$ delle eventuali soluzioni della (1), allora la (1) risulta effettivamente risolubile qualunque sia $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$.»

Ricordiamo, infine che in [6] BERS e NIRENBERG indicano un procedimento per risolvere la (1), con il quale, tuttavia, non sembra si possano ottenere soluzioni se non di classe $W^{2,2}$.

Nella presente nota ci occuperemo di alcune equazioni ellittiche (totalmente non lineari) del 2° e del 4° ordine, determinandone le soluzioni — con una tecnica basata sul Teorema di Caccioppoli — nella classe delle funzioni C^∞ periodiche.

Consideriamo, invero, il problema:

$$\lambda v + F(D_x^2 v, D_y^2 v) = f(x, y)\,, \qquad v \in \mathrm{C}_\#^\infty,\ f \in \mathrm{C}_\#^\infty \tag{3}$$

dove $\mathrm{C}_\#^\infty = \{u \in \mathrm{C}^\infty | u \text{ è periodica di periodo 1 in } x \text{ e } y\}$.

Su $F(\xi, \eta) \in C^\infty(\boldsymbol{R}^2)$ e su $\lambda \in \boldsymbol{R}$ si suppone che:

$$(4) \qquad \begin{cases} |D_\xi^h D_\eta^k F(\xi, \eta)| \leqslant N_{h+k} \quad \text{per } h+k \geqslant 1,\ \forall (\xi, \eta);\ \lambda > 0 \\ -N_1 \leqslant D_\xi F(\xi, \eta) \leqslant -\nu < 0; \quad -N_1 \leqslant D_\eta F(\xi, \eta) \leqslant -\nu < 0 \end{cases}$$

con $\nu, N_1, N_2, \ldots$ costanti assolute (1).

Consideriamo anche il problema:

$$(5) \qquad \lambda v + F(D_x^4 v, D_y^4 v) = f(x, y)\,, \qquad v \in C_\#^\infty,\ f \in C_\#^\infty$$

con $F(\xi, \eta)$ verificante le condizioni:

$$(4)' \qquad \begin{cases} |D_\xi^k D_\eta^h F(\xi, \eta)| \leqslant N_{h+k} \quad \text{per } h+k \geqslant 1,\ \forall (\xi, \eta); \quad \lambda > 0 \\ N_1 \geqslant D_\xi F(\xi, \eta) \geqslant \nu > 0; \quad N_1 \geqslant D_\eta F(\xi, \eta) \geqslant \nu > 0; \\ \inf \dfrac{(D_\xi F + D_\eta F + \lambda)^2}{(D_\xi F)^2 + (D_\eta F)^2 + \lambda^2} > 2 \\ \qquad\qquad\qquad (\text{condizione « di Cordes »})\,. \end{cases}$$

Come si vede, nei problemi (3) e (5) si cercano soluzioni « molto regolari » ($v \in C_\#^\infty$) assegnando dati ($f \in C_\#^\infty$) « molto regolari ».

Per risolvere questo problema (riferiamoci, ad esempio, al (3)) si possono seguire due vie:

A) Si studia prima il problema « meno regolare »:

$$(3)' \qquad \lambda v + F(D_x^2 v, D_y^2 v) = f(x, y)\,, \qquad v \in C_\#^{k+2,\mu},\ f \in C_\#^{k,\mu}$$

dove $C_\#^{h,\mu} = \{u \in C^{h,\mu} | u$ è periodica di periodo 1 in $(x, y)\}$, e, poi, supponendo la $f \in C_\#^\infty$, si regolarizza la soluzione v ricorrendo ai teoremi generali di NIRENBERG e FRIEDMAN ([9], [11]); in questo modo si ottiene anche un teorema di unicità.

B) Oppure si lavora direttamente in $C_\#^\infty$, e cioè si studia direttamente la (3).

Nella presente nota ci atteniamo a questo secondo procedimento. Naturalmente, in questo modo, non si opera più negli Spazi di Banach, ma in Spazi di tipo diverso; più precisamente $C_\#^\infty$ viene strutturato come Spazio numerabilmente normato perfetto (vedi § 1), e viene così a godere della fondamentale proprietà secondo cui ogni parte limitata è compatta (spazio di Montel).

(1) Notiamo che $f(r, s, t, p, q, x, y, z) \equiv \lambda z + F(r, t)$ *non* verifica la 3ª delle (2) (che si scriverebbe: $F_{r^2}^2 + F_{rt}^2 + F_{t^2}^2 \leqslant A(D)(F_r^2 + F_t^2)(r^2 + s^2 + t^2 + 1)^{-1}$), bensì la condizione meno restrittiva: $F_{r^2}^2 + F_{rt}^2 + F_{t^2}^2 \leqslant 3N_2^2$. Si veda, ad es., il caso in cui è $F(r, t) = -2r + \operatorname{sen} r - 2t + \operatorname{sen} t$.

In questo quadro funzionale diverso si riesce pur sempre a provare che

$$\mathcal{F}: v \in \mathrm{C}_{\#}^{\infty} \to \mathcal{F}(v) = \lambda v + F(D_x^{2m} v, D_y^{2m} v) \in \mathrm{C}_{\#}^{\infty} \qquad (m = 1, 2)$$

è un operatore proprio a codominio aperto.

Per cui si può utilizzare ancora il Teorema di Caccioppoli, che — almeno nella parte esistenziale — continua a valere (senza modifiche nella dimostrazione) negli spazi numerabilmente normati.

La cosa essenziale è stabilire delle opportune maggiorazioni a priori per le eventuali soluzioni v (di (3) o (5)) e per le loro derivate. Ciò è reso possibile (per la (3)) da alcune stime L^p (con p «poco maggiore di 2») ottenute da CAMPANATO in [8] per le equazioni ellittiche del 2° ordine, a coefficienti limitati e misurabili; e, per la (5), da un'estensione delle suddette stime a certe equazioni di ordine superiore (vedi § 7).

In tal modo stabiliamo dei teoremi di esistenza per i problemi (3) e (5).

La trattazione del problema (3) è svolta (seguendo il procedimento B)) nei § da 2 a 6, strutturando come spazio perfetto $\mathrm{C}_{\#}^{\infty}$ mediante la successione di norme:

$$\{\|v\|_k\} = \{\|v\|_{\mathrm{C}^k(T)}\}\,, \qquad T = [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]^2\,.$$

La trattazione del problema (5) è svolta nei § 7, 8 (sempre col procedimento B)), strutturando come spazio perfetto $\mathrm{C}_{\#}^{\infty}$, mediante la successione di norme $\{\|v\|_k'\} = \{\|v\|_{W^{k,p}(T)}\}$ ($p > 2$, opportuno).

Per concludere, osserviamo che una condizione sufficiente affinchè valgano le (4)' è che risulti:

$$(4)'' \qquad \left(\frac{N_1}{\nu}\right)^2 < 3\,; \qquad 2\nu - \sqrt{2(3\nu^2 - N_1^2)} < \lambda < 2\nu + \sqrt{2(3\nu^2 - N_1^2)}\,.$$

Infatti, l'ultima delle (4)' si può scrivere:

$$\inf\left[2\,\frac{D_\xi F\cdot D_\eta F + \lambda D_\xi F + \lambda D_\eta F}{(D_\xi F)^2 + (D_\eta F)^2 + \lambda^2}\right] > 1\,;$$

ed è presto visto (grazie a (4)'') che:

$$1 < 2\,\frac{\nu^2 + 2\lambda\nu}{2N_1^2 + \lambda^2} < 2\,\frac{D_\xi F\cdot D_\eta F + \lambda D_\xi F + \lambda D_\eta F}{(D_\xi F)^2 + (D_\eta F)^2 + \lambda^2}\,, \qquad \forall(\xi, \eta)\,.$$

Si noti come, in (4)'', man mano che $N_1 \to \sqrt{3}\nu$, si restringa l'intervallo in cui si può assegnare λ.

Vediamo un esempio concreto di equazione verificante (4)′ (e (4)″), assumendo:

$$\lambda = 4\,, \qquad F(\xi, \eta) = 2\xi + \operatorname{arctg} \xi + 2\eta + \operatorname{arctg} \eta$$

(per cui $\nu = 2$, $N_1 = 3$).

Sulla base dei risultati del § 8, si potrà dire che l'equazione:

$$4v + 2D_x^4 v + \operatorname{arctg} D_x^4 v + 2D_y^4 v + \operatorname{arctg} D_y^4 v = f(x, y)$$

ammette almeno una soluzione $v \in \mathrm{C}_\#^\infty$, comunque si assegni $f \in \mathrm{C}_\#^\infty$.

1. – Alcuni richiami.

È opportuno, per il seguito, richiamare alcune nozioni della Teoria degli Spazi numerabilmente normati (si veda, per una più approfondita esposizione, il II volume di Guelfand-Chilov [14] ed anche A. Friedman [10]).

Intanto due norme confrontabili $\|\ \|_1$ e $\|\ \|_2$ (2), assegnate su di uno spazio vettoriale Φ, si dicono «concordanti» se avviene che:

Per ogni successione $(x_n) \subset \Phi$ *di Cauchy rispetto ad entrambe le norme*: $\{\|x_n\|_1 \to \to 0\} \Leftrightarrow \{\|x_n\|_2 \to 0\}$.

Assegnamo sullo spazio vettoriale Φ una successione (non decrescente) di norme a due a due concordanti:

$$\forall x \in \Phi\,, \qquad \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \ldots \leqslant \|x\|_p \leqslant \ldots\,.$$

In Φ si può introdurre una topologia (compatibile con la struttura vettoriale), a partire dal «sistema fondamentale di intorni dell'origine» $\mathfrak{J}(0)$ il cui generico elemento è definito da:

$$J_{p,\varepsilon}(0) = \{x \in \Phi\colon \|x\|_p < \varepsilon\}\,, \qquad \varepsilon \in \boldsymbol{R}_+,\ p = 1, 2, \ldots\,.$$

Per il generico $y \in \Phi$, la famiglia di insiemi:

$$y + J_{p,\varepsilon}(0) \equiv \{x \in \Phi\colon \|x - y\|_p < \varepsilon\}\,, \qquad \varepsilon \in \boldsymbol{R}_+,\ p = 1, 2, \ldots\,,$$

costituisce un sistema fondamentale di intorni $\mathfrak{J}(y)$; il generico elemento di $\mathfrak{J}(y)$ si dirà «intorno fondamentale di y». In particolare, si ottiene un sistema fondamentale numerabile $\mathcal{N}(y)$, considerando gli intorni del tipo: $y + J_{p,1/n}(0)$, $p, n = 1, 2, \ldots$.

---

(2) $\|\ \|_1$ e $\|\ \|_2$ sono «confrontabili» se esiste un numero c positivo tale che $\forall x \in \Phi$, $\|x\|_1 \leqslant c\|x\|_2$ (ovvero $\forall x \in \Phi$, $\|x\|_2 \leqslant c\|x\|_1$).

È evidente che, in questa topologia, la convergenza di una successione $(x_n) \subset \Phi$ verso $x \in \Phi$ ha il seguente significato (di convergenza rispetto a *tutte* le norme):

$$\{x_n \underset{\Phi}{\to} x\} \Leftrightarrow \{\forall p,\ \lim_n \|x - x_n\|_p = 0\}\,. \tag{1.1}$$

Così pure, una successione di Cauchy $(x_n) \subset \Phi$ è una successione (di Cauchy rispetto a tutte le norme) tale che:

$$\forall p\,,\quad \lim_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\|_p = 0\,. \tag{1.2}$$

Se indichiamo con Φ_p lo spazio di Banach completamento di Φ rispetto alla norma $\|\ \|_p$, si ha ovviamente:

$$\Phi_1 \supseteq \Phi_2 \supseteq \ldots \supseteq \Phi_p \supseteq \ldots \supseteq \Phi\,.$$

Ebbene, si prova che Φ è *completo* rispetto alla topologia (1.1) [e cioè: ogni successione di Cauchy (ossia, verificante la (1.2)) è convergente verso un $x \in \Phi$ nel senso della (1.1)] *se e solo se risulta*:

$$\Phi = \bigcap_{p=1}^{\infty} \Phi_p\,. \tag{1.3}$$

Se Φ è completo, si dice che Φ è uno *spazio numerabilmente normato.*

DEFINIZIONE 1.I. – *Si dice che B è un limitato nello spazio numerabilmente normato Φ, se:*

$$\exists (C_p) \subset \boldsymbol{R}_+ : \forall p,\ \forall x \in B\,,\qquad \|x\|_p \leqslant C_p\,. \tag{1.4}$$

La chiusura di un limitato è ancora un limitato. Così pure, se (x_n) è una successione di Cauchy in Φ, allora gli x_n formano un insieme limitato.

Come si sa, negli spazi normati, un insieme limitato, in generale, *non* è compatto. Anzi, se X è uno spazio normato in cui ogni limitato è compatto, allora X ha necessariamente dimensione finita (e cioè, è uno spazio euclideo).

Ebbene, per un'importante classe di spazi numerabilmente normati, la situazione è ben diversa.

DEFINIZIONE 1.II. – *Lo spazio numerabilmente normato Φ si dice «perfetto», se ogni limitato $B \subset \Phi$ è compatto. (Se, cioè, quando $B \subset \Phi$ è limitato, ogni successione (x_n) di elementi di B ammette un punto di accumulazione $x \in \Phi$.)* [3]

---

[3] Secondo un'altra locuzione, per insieme compatto si intende un insieme B tale che ogni successione $(x_n) \subset B$ ammette un punto di accumulazione $x \in B$.

Sussiste la seguente:

Proposizione 1.I. – *Condizione sufficiente affinchè lo spazio numerabilmente normato Φ (in cui la topologia è assegnata mediante la successione di norme: $\|x\|_1 \leqslant \leqslant \|x\|_2 \leqslant \ldots \leqslant \|x\|_p \leqslant \ldots$) sia perfetto, è che risulti:*

$$\forall p\,, \quad \{B \subset \Phi \text{ limitato in } \Phi_{p+1} \Rightarrow B \text{ è compatto in } \Phi_p\}\,. \tag{1.5}$$

Per esempio, se Φ è lo spazio vettoriale $C^\infty_\#$ delle funzioni $u(x, y) \in C^\infty$ periodiche di periodo 1 in x, y (di questo spazio dovremo occuparci nel seguito) e se le norme $\|u\|_p$ sono date da:

$$\|u\|_p = \sum_{h+k \leqslant p} \max_T |D^h_y D^k_x u(x, y)|\,, \qquad T = [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]^2\,,$$

$p = 0, 1, 2, \ldots$, allora la (1.5) è certo soddisfatta, per cui Φ risulta uno spazio perfetto.

Anche per gli spazi numerabilmente normati ha senso la seguente definizione:

Definizione 1.III. – *Siano Φ e Ψ due spazi numerabilmente normati, e sia $\mathcal{F}: \Phi \to \Psi$ un'applicazione continua. Si dice che $\mathcal{F}$ è «propria» se risulta compatta in Φ l'immagine reciproca $\mathcal{F}^{-1}(B)$ di ogni compatto $B \subset \Psi$. Si dice che $\mathcal{F}$ è «aperta» se il codominio $\mathcal{F}(\Phi)$ è un aperto di Ψ.*

Ebbene il fondamentale Teorema di Caccioppoli sull'invertibilità globale delle trasformazioni proprie tra spazi di Banach, si trasporta (almeno per quanto riguarda la suriettività) agli spazi numerabilmente normati:

Teorema 1.I. – *Se Φ e Ψ sono due spazi numerabilmente normati ed $\mathcal{F}: \Phi \to \Psi$ è un'applicazione continua, aperta e propria, allora $\mathcal{F}$ è suriettiva.*

Dimostrazione identica a quella per gli spazi di Banach:

Sia $f \in \Psi$ un punto di accumulazione per $\mathcal{F}(\Phi)$, e sia $(f_n) \subset \mathcal{F}(\Phi)$ una successione tale che $f_n \underset{\Psi}{\to} f$.

Gli f_n formano un compatto di Ψ. Se, allora, $u_n \in \Phi$ è tale che $\mathcal{F}(u_n) = f_n$, l'insieme degli u_n sarà un compatto di Φ, visto che $\mathcal{F}$ è propria.

Possiamo, quindi, determinare una sottosuccessione $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ ed un elemento $u \in \Phi$ tali che $u_{n_k} \underset{\Phi}{\to} u$.

Poichè $\mathcal{F}$ è continua, si avrà anche $\mathcal{F}(u_{n_k}) \equiv f_{n_k} \underset{\Psi}{\to} \mathcal{F}(u)$.

Ma $f_{n_k} \underset{\Psi}{\to} f$; dunque $f = \mathcal{F}(u)$ e, quindi, $f \in \mathcal{F}(\Phi)$.

Così il codominio $\mathcal{F}(\Phi)$ è chiuso in Ψ; ma è anche aperto (per ipotesi). Quindi $\mathcal{F}(\Phi) = \Psi$. c.v.d.

Particolare interesse presenta il caso in cui Φ è uno spazio perfetto (Def. 1.II).

Perchè allora, affinchè $\mathcal{F}: \Phi \to \Psi$ sia propria, basterà supporre che:

$$\forall B \text{ limitato in } \Psi, \quad \mathcal{F}^{-1}(B) \text{ è limitato in } \Phi . \tag{1.6}$$

Ed è esattamente della condizione (1.6) che ci varremo nel seguito (vedi Teorema 3.III).

2. - Un lemma fondamentale.

Se G è un dominio limitato di $\boldsymbol{R}^2$ useremo — di norma — le seguenti notazioni:

$$\|u\|_{k,p,G} = \|u\|_{W^{k,p}(G)} = \left[\int_G \sum_{i+j\leqslant k} |D_x^i D_y^j u(x,y)|^p \, dx\, dy\right]^{1/p}$$

$$(u)_{k,G} = \|u\|_{C^k(G)} \equiv \sum_{i+j\leqslant k} \max_G |D_y^i D_x^j u(x,y)| \equiv \sum_{h=0}^{k} U_h(G)$$

$$(u)_{k,\mu,G} = \|u\|_{C^{k,\mu}(G)} = \|u\|_{C^k(G)} + \sum_{i+j=k} \sup_{P',P''\in G} \frac{|D_x^i D_y^j u(P') - D_x^i D_y^j u(P'')|}{|P'-P''|^\mu} \equiv$$

$$\equiv \|u\|_{C^k(G)} + \sum_{i+j=k} [D_x^i D_y^j u]_\mu^G \equiv (u)_{k,G} + U_{k,\mu}(G) \equiv \sum_{h=0}^{k} U_h(G) + U_{k,\mu}(G)$$

(cfr. C. MIRANDA [17], pag. 2) dove $\mu \in]0,1]$, e $|P'-P''|$ è la distanza euclidea tra $P' \equiv (x', y')$ e $P'' \equiv (x'', y'')$.

A volte, per brevità, quando G sia fissato e sia $p = 2$, scriveremo $\|u\|_k$ in luogo di $\|u\|_{k,2,G}$.

È bene osservare che, se G verifica la condizione A) di [17], p. 148, allora dalle (33.8) e (33.9) di [17], p. 150 segue facilmente (una volta fissato il dominio G e il suo diametro R):

$$(u)_{k,\mu,G} \leqslant c\{(u)_{n,\mu,G}^{(k+\mu)/(n+\mu)} (u)_{0,G}^{(n-k)/(n+\mu)} + (u)_{0,G}\} \tag{2.1}$$

per: $k < n$, e per ogni $u \in C^{n,\mu}(G)$, essendo c una costante che dipende solo da G.

D'ora in avanti indicheremo rispettivamente con T, Q, Ω i domini:

$$T = [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]^2, \qquad Q = [-\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}]^2, \qquad \Omega = \{(x,y) \,|\, (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant \tfrac{3}{2}\},$$

per i quali la condizione A) di [17], p. 148 è certo verificata.

Poniamo, conformemente alle notazioni di AGMON [2]:

$$\mathcal{C}_\#^\infty = \{u \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{R}^2) \,|\, u(x,y) \text{ è periodica di periodo 1 in } x \text{ e } y\};$$

per la generica funzione $u(x,y)$ definita solo in T, indicheremo $u_\#(x,y)$ (ovvero con

$\mathcal{U}(x, y)$) il prolungamento *periodico* di $u(x, y)$ a tutto $\boldsymbol{R}^2$. Evidentemente:

$$\{u \in \mathrm{C}^\infty(T);\ D_x^h D_y^k u(x, -\tfrac{1}{2}) = D_x^h D_y^k u(x, \tfrac{1}{2}),\ D_x^h D_y^k u(-\tfrac{1}{2}, y) = D_x^h D_y^k u(\tfrac{1}{2}, y),\ \forall (h, k)\}$$
$$\Rightarrow \{\mathcal{U} \equiv u_\# \in \mathrm{C}_\#^\infty\}\,.$$

È evidente che:

$$\|D_x^h D_y^k u\|_{0,p,Q} = 9^{1/p} \|D_x^h D_y^k u\|_{0,p,T}\,, \qquad \forall (h, k),\ \forall u \in \mathrm{C}_\#^\infty; \tag{2.2}$$

è anche facile verificare che:

$$(u)_{0,\mu,Q} \leqslant 5 (u)_{0,\mu,T}\,, \qquad \forall u \in \mathrm{C}_\#^\infty\,. \tag{2.3}$$

Fissiamo anche — qui e per il seguito —, una funzione $\omega(x, y) \in C_0^\infty(\mathring{\Omega})$ con le seguenti proprietà:

$$\begin{cases} 0 \leqslant \omega(x, y) \leqslant 1\,, & \forall (x, y); \quad \omega(x, y) \equiv 1 \quad \text{in} \quad T \\ |D_x \omega|,\ |D_y \omega|,\ |D_x^2 \omega|,\ |D_y^2 \omega| \leqslant K\,, & \forall (x, y) \end{cases} \tag{2.4}$$

dove K è una costante assoluta.

Siano ν ed M due numeri reali positivi, ed $a(x, y)$, $b(x, y)$ due funzioni reali limitate e misurabili, *periodiche di periodo* 1, tali che:

$$0 < \nu \leqslant -a(x, y) \leqslant M\,, \qquad 0 < \nu \leqslant -b(x, y) \leqslant M\,, \qquad \forall (x, y)\,. \tag{2.5}$$

Indicato con E l'operatore ellittico:

$$Ev = [a(x, y) D_x^2 + b(x, y) D_y^2] v(x, y)\,, \qquad v \in W^{2,p}(\Omega) \cap \mathring{W}^{1,p}(\Omega)\,,$$

dai risultati di S. CAMPANATO (cfr. [8], Teor. 1.II) si deduce che esistono due numeri p_0 e p_1, con $1 < p_0 < 2 < p_1$, tali che, per ogni $p \in]p_0, p_1[$, E risulti bigettivo tra $W^{2,p}(\Omega) \cap \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ ed $L^p(\Omega)$, e si abbia:

$$\|v\|_{2,p,\Omega} \leqslant c(p) \|Ev\|_{0,p,\Omega}\,, \qquad \forall v \in W^{2,p}(\Omega) \cap \mathring{W}^{1,p}(\Omega) \tag{2.6}$$

dove $c(p)$ (e così, nel seguito, $c_1(p)$, $c_2(p)$, ...) è una costante che dipende solo da ν, M e $p \in]p_0, p_1[$.

Se, poi, u è un arbitrario elemento di $\mathrm{C}_\#^\infty$, la funzione $f = Eu$ risulta limitata, misurabile e periodica di periodo 1, e si ha:

$$\|f\|_{0,p,Q} = 9^{1/p} \|f\|_{0,p,T}\,. \tag{2.2$'$}$$

È, peraltro, evidente che, posto $\Theta(x, y) = \omega(x, y)\, u(x, y)$, risulta: $\Theta|_T = u$, $\Theta \in W^{2,p}(\Omega) \cap \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$, nonchè

$$E\Theta = aD_x^2\Theta + bD_y^2\Theta = a(\omega D_x^2 u + 2D_x\omega D_x u + uD_x^2\omega) + \\ + b(\omega D_y^2 u + 2D_y\omega D_y u + uD_y^2\omega) = \\ = \varphi \equiv \omega f + 2(aD_x\omega D_x u + bD_y\omega D_y u) + u(aD_x^2\omega + bD_y^2\omega) \tag{2.7}$$

dove, ricordiamo, $f = Eu$. Dopo ciò, da (2.6) segue facilmente, per $p \in]p_0, p_1[$:

$$\|\Theta\|_{2,p,\Omega} \leqslant c(p)\|\varphi\|_{0,p,\Omega} \leqslant c(p)\{\|f\|_{0,p,\Omega} + 2MK[\|D_x u\|_{0,p,\Omega} + \|D_y u\|_{0,p,\Omega} + \|u\|_{0,p,\Omega}]\}$$

avendo tenuto conto anche di (2.4) e (2.5). Di qui, grazie a (2.2), (2.2)' e alla disuguaglianza di Eherling, si trae:

$$\begin{aligned} \|\Theta\|_{2,p,\Omega} &\leqslant c(p)\left\{\|f\|_{0,p,\Omega} + 2MK\left[\left(\int_Q |D_x u|^p\right)^{1/p} + \left(\int_Q |D_y u|^p\right)^{1/p} + \|u\|_{0,p,\Omega}\right]\right\} \\ &= c(p)\left\{\|f\|_{0,p,\Omega} + 2MK9^{1/p}\left[\left(\int_T |D_x u|^p\right)^{1/p} + \left(\int_T |D_y u|^p\right)^{1/p}\right] + 2MK\|u\|_{0,p,\Omega}\right\} \\ &\leqslant c(p)\left\{\|f\|_{0,p,\Omega} + 2MK9^{1/p}\left[\left(\int_\Omega |D_x \Theta|^p\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |D_y \Theta|^p\right)^{1/p}\right] + 2MK\|u\|_{0,p,\Omega}\right\} \\ &\leqslant c(p)\|f\|_{0,p,\Omega} + 4MK9^{1/p}c(p)\left[\varepsilon\|\Theta\|_{2,p,\Omega} + \frac{K_0}{\varepsilon}\|\Theta\|_{0,p,\Omega}\right] + 2MKc(p)\|u\|_{0,p,\Omega} \end{aligned} \tag{2.8}$$

con K_0 costante assoluta.

Posto $\varepsilon = [8MK\,9^{1/p}c(p)]^{-1}$, da (2.8) segue infine:

$$\|\Theta\|_{2,p,\Omega} \equiv \|\omega u\|_{2,p,\Omega} \leqslant c_1(p)\{\|Eu\|_{0,p,\Omega} + \|u\|_{0,p,\Omega}\}\,, \quad \forall u \in \mathrm{C}_\#^\infty,\ p \in]p_0, p_1[\,. \tag{2.9}$$

La cosa importante è che $c_1(p)$ dipende solo da p, ν, M.

Sia ora $F(\xi, \eta)$ una funzione reale di classe $\mathrm{C}^\infty(\boldsymbol{R}^2)$, e siano $\nu, N_0, N_1, \ldots, N_k, \ldots$ delle costanti positive tali che risulti: $N_0 = N_1 = M$, nonchè:

$$\left\{\begin{array}{l} |F(0,0)| \leqslant N_0 \equiv M; \quad \forall(\xi,\eta)\,, \quad |D_\xi^k D_\eta^h F(\xi,\eta)| \leqslant N_{h+k}\,, \quad h+k \geqslant 1 \\ \text{e, in particolare:} \\ -M \equiv -N_1 \leqslant F_1(\xi,\eta) \equiv D_\xi F(\xi,\eta) \leqslant -\nu < 0\,, \quad \forall(\xi,\eta)\,, \\ -M \equiv -N_1 \leqslant F_2(\xi,\eta) \equiv D_\eta F(\xi,\eta) \leqslant -\nu < 0\,, \quad \forall(\xi,\eta)\,. \end{array}\right. \tag{2.10}$$

Detto λ un numero reale positivo, è evidente che:

$$\forall v \in \mathrm{C}_\#^\infty\,, \quad \lambda v + F(D_x^2 v, D_y^2 v) \in \mathrm{C}_\#^\infty\,,$$

onde è lecito considerare l'applicazione:

$$\mathcal{F}: v \in C^\infty_\# \to \mathcal{F}(v) \equiv \lambda v + F(D^2_x v, D^2_y v) \in C^\infty_\# .$$

Giova osservare subito che:

$$(2.11) \qquad \mathcal{F}(v) = f\,, \quad v \in C^\infty_\# \Rightarrow \max_T |v| \leqslant \frac{1}{\lambda}(\max_T |f| + |F(0,0)|)\,.$$

La (2.11) si stabilisce con un procedimento standard.

Invero, se $v \in C^\infty_\#$ è positiva in qualche punto, allora nel punto di massimo $\overline{\overline{P}} \in T$ si ha:

$$(2.11)' \qquad v(\overline{\overline{P}}) > 0\,, \quad D^2_x v(\overline{\overline{P}}) \leqslant 0\,, \quad D^2_y v(\overline{\overline{P}}) \leqslant 0\,;$$

d'altro canto, per il teorema di Lagrange: $F(D^2_x v(\overline{\overline{P}}), D^2_y v(\overline{\overline{P}})) = F(0,0) + F_1(\xi, \eta) D^2_x v(\overline{\overline{P}}) + F_2(\xi, \eta) D^2_y v(\overline{\overline{P}})$, con $\xi \in [D^2_x v(\overline{\overline{P}}), 0]$ ed $\eta \in [D^2_y v(\overline{\overline{P}}), 0]$; quindi, in $\overline{\overline{P}}$, la equazione $\mathcal{F}(v) = f$ si scrive:

$$\lambda v(\overline{\overline{P}}) + F_1(\xi, \eta) D^2_x v(\overline{\overline{P}}) + F_2(\xi, \eta) D^2_y v(\overline{\overline{P}}) = f(\overline{\overline{P}}) - F(0,0)\,,$$

da cui, per le (2.10) e (2.11)$'$, segue subito

$$(2.11)_+ \qquad 0 < v(\overline{\overline{P}}) \equiv \max_T v(P) \leqslant \frac{1}{\lambda}(\max_T |f| + |F(0,0)|)\,.$$

Analogamente, se v è negativa in qualche punto, allora nel punto di minimo $\overline{P} \in T$ si ha:

$$(2.11)_- \qquad 0 > v(\overline{P}) \geqslant \frac{1}{\lambda}(f(\overline{P}) - F(0,0)) \geqslant -\frac{1}{\lambda}(\max_T |f| + |F(0,0)|)\,.$$

Da $(2.11)_+$ e $(2.11)_-$ segue senz'altro la (2.11).

Derivando, ora, l'equazione $\lambda v + F(D^2_x v, D^2_y v) = f$, $v \in C^\infty_\#$, rispetto ad x, si ottiene:

$$(2.12)' \qquad [\lambda + F_1(D^2_x v, D^2_y v) D^2_x + F_2(D^2_x v, D^2_y v) D^2_y] D_x v \equiv$$
$$\equiv [\lambda + a^v D^2_x + b^v D^2_y] D_x v \equiv [\lambda + E^v] D_x v = D_x f\,.$$

Analogamente, derivando rispetto ad y:

$$(2.12)'' \qquad [\lambda + a^v D^2_x + b^v D^2_y] D_y v \equiv [\lambda + E^v] D_y v = D_y f\,.$$

Osserviamo che, essendo $v \in C^\infty_\#$, i coefficienti

$$a^v = F_1(D^2_x v, D^2_y v) \quad \text{e} \quad b^v = F_2(D^2_x v, D^2_y v)$$

sono C^∞ e *periodici di periodo* 1. Inoltre, per le (2.10), si può dire che a^v e b^v verificano la (2.5), per cui si può applicare la (2.9) all'operatore ellittico $E^v = a^v D_x^2 + b^v D_y^2$.

Scrivendo la (2.12)′ nella forma:

$$E^v D_x v \equiv [a^v D_x^2 + b^v D_y^2] D_x v = D_x f - \lambda D_x v \qquad (D_x v \in C_\#^\infty)\,,$$

e, applicando — appunto — la (2.9), si ha:

$$\|\omega D_x v\|_{2,p,\Omega} \leqslant c_2(p)\{\|D_x f\|_{0,p,\Omega} + \|D_x v\|_{0,p,\Omega}\} \tag{2.13}$$

dove, ricordiamo, $c_2(p)$ dipende *solo* da v, M e $p \in]p_0, p_1[$ (λ è fissato).

D'altro canto, così come si è fatto per stabilire la (2.11), si prova che:

$$\max_\Omega |D_x v| \leqslant \frac{1}{\lambda} \max_\Omega |D_x f|\,.$$

Di qui e da (2.13), per essere $\omega|_T = 1$, segue banalmente

$$\|D_x v\|_{2,p,T} \leqslant c_3(p) \max_\Omega |D_x f| \tag{2.14}$$

(con la solita dipendenza di $c_3(p)$, $p \in]p_0, p_1[$).

Analogamente, partendo da (2.12)″ anzicchè da (2.12)′, si perviene alla

$$\|D_y v\|_{2,p,T} \leqslant c_3(p) \max_\Omega |D_y f|\,, \qquad p \in]p_0, p_1[\,. \tag{2.15}$$

A questo punto, dopo aver posto (per il generico dominio G):

$$A^v_{0,\mu,G} = (a^v)_{0,\mu,G} + (b^v)_{0,\mu,G} \equiv (a^v)_{0,G} + [a^v]^G_\mu + (b^v)_{0,G} + [b^v]^G_\mu\,, \qquad v \in C_\#^\infty\,,$$

si prova facilmente il seguente

LEMMA 2.I. – *Esistono un numero* $\mu \in]0, 1[$ *ed una costante assoluta* γ_0, *tali che risulti*:

$$A^v_{0,\mu,\Omega} \leqslant \gamma_0[(f)_{1,\Omega} + M]\,, \qquad \text{dove } f = \mathcal{F}(v) \tag{2.16}$$

qualunque sia $v \in C_\#^\infty$.

DIM. – *Fissiamo* anzitutto un $\bar p \in]2, p_1[$ (si ricordi che $2 \in]p_0, p_1[$); indi da (2.10), (2.11), (2.14) e (2.15) deduciamo:

$$\|v\|_{3,\bar p,T} \leqslant c_4(\bar p)[(f)_{1,\Omega} + M]\,, \qquad v \in C_\#^\infty \tag{2.17}$$

dove $c_4 = c_4(\overline{p})$ è, ormai, una costante assoluta (così nel seguito: $c_5, c_6, \ldots$). Essendo $v \in C^\infty_\#$, da (2.17) e (2.2) segue subito:

$$\|v\|_{3,\overline{p},\Omega} \leqslant \|v\|_{3,\overline{p}\,Q} \leqslant c_5[(f)_{1,\Omega} + M]\,, \qquad v \in C^\infty_\#\,. \tag{2.18}$$

Essendo $\overline{p} > 2$, grazie al teorema di Sobolev esiste un numero $\mu = \mu(\overline{p}) \in \,]0, 1 - 2/\overline{p}]$ tale che:

$$(v)_{2,\mu,\Omega} \leqslant c_6 \|v\|_{3,\overline{p},\Omega} \leqslant c_7[(f)_{1,\Omega} + M]\,, \qquad v \in C^\infty_\#\,, \tag{2.19}$$

avendo tenuto conto della (2.18). Dopo ciò, siccome il coefficiente di Hölder di $a^v \equiv F_1(D_x^2 v, D_y^2 v)$ e di $b^v \equiv F_2(D_x^2 v, D_y^2 v)$ si maggiora — grazie a (2.10) — con $2N_2(v)_{2,\mu,\Omega}$, da (2.19) segue senz'altro (2.16). c.v.d.

3. – Sul carattere proprio dell'operatore $\mathcal{F}$.

Torniamo ora a considerare l'equazione:

$$[\lambda + E^v] D_x v \equiv [\lambda + F_1(D_x^2 v, D_y^2 v) D_x^2 + F_2(D_x^2 v, D_y^2 v) D_y^2] D_x v = D_x f \tag{2.12$'$}$$

ottenuta derivando rispetto ad x la: $\mathcal{F}(v) = f$, $v \in C^\infty_\#$, e poniamo: $D_x v = z$, $\omega z = u$. Si ha ovviamente:

$$[\lambda + E^v] u = g \equiv \omega D_x f + 2(a D_x \omega D_x z + b D_y \omega D_y z) + z(a D_x^2 \omega + b D_y^2 \omega) \tag{3.1}$$

dove, ricordiamo, $a \equiv a^v = F_1(D_x^2 v, D_y^2 v)$ e $b \equiv b^v = F_2(D_x^2 v, D_y^2 v)$ verificano la (2.16).

Applicando la (35.7) di C. MIRANDA [17] (scritta per $n = 2$) al problema:

$$\mathfrak{M} u \equiv [\lambda + E^v] u = g \quad \text{in} \quad \Omega\,, \qquad u = \varphi \equiv 0 \quad \text{su} \quad \partial\Omega\,,$$

e tenendo conto che è: $B_0 = 0$, $C_0 = \lambda$, $\Theta_{n,\mu}[\varphi;\, \partial\Omega] = 0$, si ha:

$$\begin{aligned} U_{2,\mu} \equiv \sum_{i+j=2} \sup_{P',P''\in\Omega} \frac{|D_x^i D_y^j u(P') - D_x^i D_y^j u(P'')|}{|P' - P''|^\mu} \leqslant \\ \leqslant \gamma_1 \left[(A^v_{0,\mu,\Omega} + 1)(g)_{0,\Omega} + (g)_{0,\mu,\Omega} + \{(A^v_{0,\mu,\Omega} + 1)\,\lambda + (A^v_{0,\mu,\Omega})^{(2+\mu)/\mu} + \lambda^{(2+\mu)/2} + 1\}\, U_0\right] \end{aligned} \tag{3.2}$$

con γ_1 (e così nel seguito $\gamma_2, \gamma_3, \ldots$) costante assoluta.

Ora, dalla (33.8) di [17] (cfr. anche notazioni dal § 2), segue:

$$U_2 \leqslant \gamma_2 [U_{2,\mu}^{2/(2+\mu)}\, U_0^{\mu/(2+\mu)} + U_0] \leqslant \gamma_2 [(u)_{2,\mu,\Omega}^{2/(2+\mu)}\, U_0^{\mu/(2+\mu)} + U_0]\,;$$

di qui e dalla nota implicazione:

$$x \leq c_0 + \sum c_i x^{\alpha_i}, \quad \alpha_i \in]0, 1[\qquad (3.3)$$
$$\Rightarrow x \leq c\left(c_0 + \sum c_i^{1/(1-\alpha_i)}\right),$$

discende:

$$(u)_{2,\mu,\Omega} \leq \gamma_3[U_0 + U_2 + U_{2,\mu}] \leq \gamma_3(U_0 + U_{2,\mu}) + \gamma_2\gamma_3 U_0 + \gamma_2\gamma_3 U_0^{\mu/(2+\mu)}(u)_{2,\mu,\Omega}^{2/(2+\mu)},$$

e successivamente:

$$(u)_{2,\mu,\Omega} \leq \gamma_4(U_0 + U_{2,\mu}).$$

Dopo ciò da (3.2) consegue:

$$(3.2)' \quad (u)_{2,\mu,\Omega} \leq \gamma_5\{(A^v_{0,\mu,\Omega} + 1)(g)_{0,\Omega} + (g)_{0,\mu,\Omega} + \\ + [(A^v_{0,\mu,\Omega} + 1)\lambda + (A^v_{0,\mu,\Omega})^{(2+\mu)/\mu} + \lambda^{(2+\mu)/2} + 1](u)_{0,\Omega}\}.$$

D'altro canto, tenendo conto dell'espressione di g (vedi (3.1)) si ha facilmente (vedi anche (2.4) e (2.10)):

$$\begin{cases} (g)_{0,\mu,\Omega} \leq \gamma_6(D_x f)_{0,\mu,\Omega} + \gamma_6[(D_x z)_{0,\mu,\Omega} + (D_y z)_{0,\mu,\Omega} + (z)_{0,\mu,\Omega}] + \\ \qquad + \gamma_7 A^v_{0,\mu,\Omega}[(D_x z)_{0,\Omega} + (D_y z)_{0,\Omega} + (z)_{0,\Omega}], \\ (g)_{0,\Omega} \leq (D_x f)_{0,\Omega} + 2MK[(D_x z)_{0,\Omega} + (D_y z)_{0,\Omega} + (z)_{0,\Omega}]. \end{cases}$$

Ma allora da (3.2)′ discende, grazie a (2.16):

$$(3.4) \quad (u)_{2,\mu,\Omega} \leq \gamma_8[(f)_{1,\Omega} + M]^{(2+\mu)/\mu}\{(D_x f)_{0,\mu,\Omega} + (D_x z)_{0,\mu,\Omega} + (D_y z)_{0,\mu,\Omega} + (z)_{0,\mu,\Omega}\}.$$

Di qui, ricordando che $u|_T = z \equiv D_x v$, e tenendo conto della periodicità di v e della (2.3) si deduce:

$$(3.5)' \quad (D_x v)_{2,\mu,T} \leq \\ \leq \gamma_9[(f)_{1,\Omega} + M]^{(2+\mu)/\mu}\{(D_x f)_{0,\mu,\Omega} + (D_x^2 v)_{0,\mu,T} + (D_y D_x v)_{0,\mu,T} + (D_x v)_{0,\mu,T}\}.$$

Analogamente, partendo da (2.12)″ in luogo di (2.12)′ si prova che

$$(3.5)'' \quad (D_y v)_{2,\mu,T} \leq \\ \leq \gamma_9[(f)_{1,\Omega} + M]^{(2+\mu)/\mu}\{(D_y f)_{0,\mu,\Omega} + (D_x D_y v)_{0,\mu,T} + (D_y^2 v)_{0,\mu,T} + (D_y v)_{0,\mu,T}\}.$$

Si ha così il seguente:

TEOREMA 3.I. – *Se $F(\xi,\eta)$ verifica le* (2.10), *allora esiste una costante assoluta* γ_{10} *tale che risulti*:

$$(v)_{3,\mu,T}\leqslant\gamma_{10}[(\mathcal{F}(v))_{1,\mu,T}+M]^{(6+6\mu+\mu^2)/\mu}, \qquad \forall v\in C^\infty_\# . \tag{3.6}$$

DIM. – Infatti da (2.10), (2.11), (3.5)' e (3.5)'' consegue:

$$(v)_{3,\mu,T}\leqslant\gamma_{11}[(f)_{1,\Omega}+M]^{(2+\mu)/\mu}\{(f)_{1,\mu,\Omega}+(v)_{2,\mu,T}\} . \tag{3.7}$$

Di qui, grazie alla (2.1) si ricava:

$$\begin{aligned}(v)_{3,\mu,T}\leqslant\gamma_{12}[(f)_{1,\mu,\Omega}+M]^{(2+2\mu)/\mu}&+\\ &+\gamma_{12}[(f)_{1,\mu,\Omega}+M]^{(2+\mu)/\mu}\{(v)^{(2+\mu)/(3+\mu)}_{3,\mu,T}(v)^{1/(3+\mu)}_{0,T}+(v)_{0,T}\} ,\end{aligned} \tag{3.8}$$

donde, in forza della (3.3):

$$(v)_{3,\mu,T}\leqslant\gamma_{14}\{[(f)_{1,\mu,\Omega}+M]^{(2+2\mu)/\mu}+[(f)_{1,\mu,\Omega}+M]^{(2+\mu)(3+\mu)/\mu}(v)_{0,T}\} . \tag{3.9}$$

Da (3.9) e (2.11), ove si rammenti che, per le (2.10), è $|F(0,0)|\leqslant M$, segue subito:

$$(v)_{3,\mu,T}\leqslant\gamma_{15}[(f)_{1,\mu,\Omega}+M]^{(2+\mu)(3+\mu)/\mu+1}, \qquad v\in C^\infty_\#,\ f=\mathcal{F}(v) . \tag{3.10}$$

Da (3.10), dopo aver ricordato che $f\equiv\mathcal{F}(v)\in C^\infty_\#$, grazie alla (2.3), segue subito la (3.6). c.v.d.

Derivando ora la (2.12)' rispetto ad x, si ottiene:

$$\begin{aligned}[\lambda+F_1(D_x^2v, D_y^2v)D_x^2+F_2(D_x^2v, D_y^2v)D_x^2]D_x^2v=f_2\equiv&\\ \equiv D_x^2f-\{F_{11}(..)(D_x^3v)^2+2F_{12}(..)D_x^3D_y^2D_xv+F_{22}(..)(D_y^2D_x v)^2\}&\end{aligned} \tag{3.11}$$

dove si è posto: $F_{11}(..)=(D_\xi^2F)(D_x^2v, D_y^2v)$, $F_{12}(..)=(D_\xi D_\eta F)(D_x^2v, D_y^2v)$, $F_{22}(..)=$ $=(D_\eta^2F)(D_x^2v, D_y^2v)$. Ponendo $u=\omega z=\omega D_x^2v$, analogamente alla (3.1) si ha:

$$[\lambda+E^v]u=g_2\equiv\omega f_2+2(aD_x\omega D_xz+bD_y\omega D_yz)+z(aD_x^2\omega+bD_y^2\omega) . \tag{3.11$'$}$$

Con gli stessi ragionamenti che portano alle (3.2), (3.2)', (3.4)', (3.5)', essendo ora $u|_T=z\equiv D_x^2v$ (ed essendoci f_2 in luogo di D_xf), si può provare che:

$$\begin{aligned}(D_x^2v)_{2,\mu,T}&\leqslant\\ &\leqslant\gamma_9[(f)_{1,\Omega}+M]^{(2+\mu)/\mu}\{(f_2)_{0,\mu,\Omega}+(D_x^3v)_{0,\mu,T}+(D_yD_x^2v)_{0,\mu,T}+(D_x^2v)_{0,\mu,T}\} .\end{aligned} \tag{3.12}$$

Analogamente, derivando la (2.12)″ rispetto ad y, si ha:

$$(3.13)\qquad [\lambda + F_1(D_x^2 v, D_y^2 v) D_x^2 + F_2(D_x^2 v, D_y^2 v) D_y^2] D_y^2 v = f_2' \equiv$$
$$\equiv D_y^2 f - \{F_{11}(..)(D_x^2 D_y v)^2 + 2F_{12}(..) D_y^3 v D_x^2 D_y v + F_{22}(..)(D_y^3 v)^2\} .$$

Ponendo, questa volta $u = \omega z \equiv \omega D_y^2 v$, si viene a scrivere la (3.11)′ con f_2' in luogo di f_2: E di qui, essendo: $u|_T = z \equiv D_y^2 v$, si ricava, in luogo di (3.12):

$$(3.14)\qquad (D_y^2 v)_{2,\mu,T} \leqslant$$
$$\leqslant \gamma_9[(f)_{1,\Omega} + M]^{(2+\mu)/\mu}\{(f_2')_{0,\mu,\Omega} + (D_x D_y^2 v)_{0,\mu,T} + (D_y^3 v)_{0,\mu,T} + (D_y^2 v)_{0,\mu,T}\} .$$

Da (2.10), (2.11), (3.12) e (3.14), tenendo conto dell'espressione di f_2 e di f_2' (vedi (3.11) e (3.13)), si ottiene, grazie alla periodicità di v e di $f = \mathcal{F}(v)$:

$$(3.15)\qquad (v)_{4,\mu,T} \leqslant \gamma_{16}[(f)_{1,\Omega} + M]^{(2+\mu)/\mu}\{(v)_{3,\mu,T} +$$
$$+ (D_x^2 f - [F_{11}(D_x^3 v)^2 + 2F_{12}(D_x^3 v D_y^2 D_x v) + F_{22}(D_y^2 D_x v)^2])_{0,\mu,T} +$$
$$+ (D_y^2 f - [F_{11}(D_x^2 D_y v)^2 + 2F_{12}(D_y^3 v D_x^2 D_y v) + F_{22}(D_y^3 v)^2])_{0,\mu,T}\}$$
$$\leqslant \gamma_{17}[(f)_{1,\Omega} + M]^{(2+\mu)/\mu}\{[(f)_{1,\mu,T} + M]^{(6+6\mu+\mu^2)/\mu} + (f)_{2,\mu,T} + [(f)_{1,\mu,T} + M]^{3((6+6\mu+\mu^2)/\mu)}\}$$

avendo tenuto conto delle (3.6), (2.10) e (2.19).

Da (3.15) segue, infine, facilmente:

$$(3.16)\qquad (v)_{4,\mu,T} \leqslant \gamma_{18}[(\mathcal{F}(v))_{2,\mu,T} + M]^{4((6+6\mu+\mu^2)/\mu)} \qquad \forall v \in C_{\#}^{\infty} .$$

Procedendo, allora, per ricorrenza, si prova il seguente teorema generale:

TEOREMA 3.II. – *Se* $F(\xi, \eta)$ *verifica le* (2.10), *esistono due successioni di numeri positivi* $(\mu_k)_k$ *e* $(\varrho_k)_k$ *dipendenti solo da* ν *e dalle* N_k (*delle* (2.10)) *tali che*:

$$(3.17)\qquad (v)_{2+k,\mu,T} \leqslant \varrho_k[(\mathcal{F}(v))_{k,\mu,T} + M]^{\mu_k} , \qquad \forall v \in C_{\#}^{\infty},\ \forall k .$$

Introduciamo ora su $C_{\#}^{\infty}$ la successione di norme (concordanti)

$$\|v\|_{C^0(T)} = \max_T |v(x, y)|, \ldots, \qquad \|v\|_{C^k(T)} = \sum_{i+j\leqslant k} \max |D_x^i D_y^j v(x, y)|, \ldots$$

e indichiamo con Φ lo spazio numerabilmente normato perfetto che in tal modo si ottiene.

Ricordando (vedi § 1) che un sottoinsieme $B \subset \Phi$ è limitato in Φ se avviene che:

$$(1.4)\qquad \exists (M_k) \subset \boldsymbol{R}_+ : \forall k,\ \forall v \in B , \quad \|v\|_{C^k(T)} \leqslant M_k ,$$

si prova subito il seguente:

TEOREMA 3.III. – *Se vale la* (2.10) *allora l'operatore*

$$\mathcal{F}: v \in \Phi \to \mathcal{F}(v) \equiv \lambda v + F(D_x^2 v, D_y^2 v) \in \Phi$$

è un'applicazione propria.

DIM. – Si tratta di provare che, per ogni compatto $B \subset \Phi$, risulta compatta anche l'immagine reciproca $\mathcal{F}^{-1}(B) \subset \Phi$. Infatti, ricordando (3.17) e (1.4), visto che B è limitato (perchè compatto) si ha:

$$\forall k,\ \forall v \in \mathcal{F}^{-1}(B)\,, \qquad \|v\|_{C^{2+k}(T)} \leqslant (v)_{2+k,\mu,T} \leqslant$$
$$\leqslant \varrho_k[(\mathcal{F}(v))_{k,\mu,T} + M]^{\mu_k} \leqslant \varrho_k[\|\mathcal{F}(v)\|_{C^{k+1}(T)} + M]^{\mu_k} \leqslant \varrho_k[M_{k+1} + M]^{\mu_k}\,.$$

Ciò prova che $\mathcal{F}^{-1}(B)$ è limitato in Φ. In sostanza vale (1.6). Ma Φ è perfetto; dunque $\mathcal{F}^{-1}(B)$ è compatto. c.v.d.

4. – Alcuni risultati ausiliari.

Conformemente alle notazioni di AGMON [2] (Def. 3.1) indicheremo con $W_{\#}^{k,2}$ il completamento di $C_{\#}^{\infty}$ rispetto alla norma $\| \ \|_{k,2,T}$.

Se $a(x, y)$ e $b(x, y)$ sono due funzioni $\in C_{\#}^{\infty}$, tali che:

$$-M \leqslant a(x, y) \leqslant -\nu < 0\,, \quad -M \leqslant b(x, y) \leqslant -\nu < 0\,, \quad \forall (x, y)\,, \tag{4.1}$$

ci proponiamo di studiare il problema:

$$\begin{cases} (E + \lambda)\, u \equiv [a(x, y)\, D_x^2 + b(x, y)\, D_y^2 + \lambda]\, u = f(x, y)\,, \qquad (\lambda > 0) \\ u \in W_{\#}^{2,2},\ f \in L^2(T)\,. \end{cases} \tag{4.2}$$

Dopo avere scritto la (4.2) nella forma: $Eu = f - \lambda u$, dalla (2.9) scritta per $p = 2$ facilmente si trae:

$$\|\omega u\|_{2,2,\Omega} \leqslant c_1(2)\{\|Eu\|_{0,2,\Omega} + \|u\|_{0,2,\Omega}\} \leqslant$$
$$\leqslant c_1(2)\{\|(E + \lambda)\, u\|_{0,2,\Omega} + (1 + |\lambda|)\|u\|_{0,2,\Omega}\}\,, \qquad \forall u \in C_{\#}^{\infty}\,,$$

e successivamente, tenendo conto di (2.2) e (2.4), e passando da $C_{\#}^{\infty}$ al completamento $W_{\#}^{2,2}$:

$$\|u\|_{2,2,T} \leqslant c_\lambda\{\|(E + \lambda)\, u\|_{0,2,T} + \|u\|_{0,2,T}\}\,, \qquad \forall u \in W_{\#}^{2,2}\,, \tag{4.3}$$

dove c_λ dipende solo da λ, ν ed M.

Se, ora, $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$, $\gamma(x, y)$ sono tre funzioni $\in C^\infty_\#$ tali che:

$$|\gamma(x, y)| < \lambda/2\,, \qquad \forall (x, y)\,, \tag{4.1$'$}$$

si vede facilmente che vale l'implicazione:

$$u \in W^{2,2}_\#\,, \quad [E + \alpha(x, y) D_x + \beta(x, y) D_y + (\lambda + \gamma(x, y))]\, u = 0 \quad \text{in } T \quad \Rightarrow u \equiv 0\,. \tag{4.4}$$

Intanto (cfr. § 2), indicando con $\mathcal{U} \equiv u_\#$ il prolungamento periodico di u, si riconosce facilmente che $\mathcal{U} \in W^{2,2}(Q)$ e che (essendo $a, b, \alpha, \beta, \gamma \in C^\infty_\#$) verifica l'equazione:

$$[E + \alpha D_x + \beta D_y + (\lambda + \gamma)]\, \mathcal{U}(x, y) = 0 \quad \text{in } Q\,, \quad \mathcal{U} \in W^{2,2}(Q)\,. \tag{4.4$'$}$$

Ma allora, per noti teoremi (e per la regolarità dei coefficienti), si ha in realtà: $\mathcal{U} \in C^\infty_\#$.

Se, quindi: $\max\limits_T u \hat{=} \max\limits_Q \mathcal{U} = u(\overline{\overline{P}})$, si ha anche:

$$D_x u(\overline{\overline{P}}) = D_y u(\overline{\overline{P}}) = 0\,, \quad D^2_x u(\overline{\overline{P}}) \leqslant 0\,, \quad D^2_y u(P) \leqslant 0\,,$$

e quindi (per (4.1), (4.1)$'$):

$$(\lambda + \gamma)\, u(\overline{\overline{P}}) \leqslant [a D^2_x + b D^2_y + \alpha D_x + \beta D_y + (\lambda + \gamma)]\, u(\overline{\overline{P}}) = 0 \Rightarrow u(\overline{\overline{P}}) \equiv \max_T u \leqslant 0\,. \tag{4.5$'$}$$

Analogamente:

$$u(\overline{P}) \equiv \min_T u \geqslant 0\,. \tag{4.5$''$}$$

Da (4.5)$'$ e (4.5)$''$ discende, appunto la (4.4).

In particolare, se è $\alpha = \beta = \gamma = 0$, si ha:

$$\{u \in W^{2,2}_\#;\ [E + \lambda]\, u = 0;\ \lambda > 0\} \Rightarrow u \equiv 0\,. \tag{4.5}$$

Orbene, la (4.5) prova che è iniettivo l'operatore:

$$\mathcal{A}\colon u \in W^{2,2}_\# \to \mathcal{A}u \equiv [E + \lambda]\, u \in L^2(T);$$

la (4.3), invece, prova che $\mathcal{A}$ è un operatore (lineare e continuo) a codominio chiuso tra gli spazi di Banach $W^{2,2}_\#$ ed $L^2(T)$. Per far vedere che $\mathcal{A}$ è anche suriettivo, basterà quindi mostrare che:

$$\{v \in L^2 \equiv (L^2)', \ \mathcal{A}^* v = 0\} \Rightarrow \{v \equiv 0\} \tag{4.6}$$

dove l'operatore aggiunto $\mathcal{A}^*$: $L^2 \equiv (L^2)' \to (W_{\#}^{2,2})'$ è definito da:

$$\langle \mathcal{A}^* v, u\rangle = \langle v, \mathcal{A}u\rangle , \quad \forall u \in W_{\#}^{2,2}, \ \forall v \in L^2 . \tag{4.7}$$

Ora la premessa dell'implicazione (4.6), alla luce di (4.7), significa che:

$$v \in L^2 , \quad \langle v, \mathcal{A}u\rangle \equiv \int_T v[E + \lambda] u \, dx \, dy = 0 , \quad \forall u \in W_{\#}^{2,2} , \tag{4.8}$$

avendo ricordato che la dualità tra L^2 ed $(L^2)'$ si esprime con un integrale; in particolare da (4.8) discende:

$$v \in L^2(T) , \quad \int_T v[aD_x^2 + bD_y^2 + \lambda] u \, dx \, dy = 0 , \quad \forall u \in \mathrm{C}_{\#}^{\infty} . \tag{4.9}$$

Ebbene (essendo $a, b \in \mathrm{C}_{\#}^{\infty}$), per il prolungamento periodico $\mathcal{V} = v_{\#}$ di $v \in L^2(T)$ da (4.9) discende:

$$\mathcal{V} \in L^2(Q) , \quad \int_Q \mathcal{V}[aD_x^2 + bD_y^2 + \lambda] u \, dx \, dy = 0 , \quad \forall u \in \mathrm{C}_{\#}^{\infty} . \tag{4.10}$$

Ora, se $\overline{P} \equiv (\bar{x}, \bar{y}) \in T$ e $C_{\overline{P}} = \{P | \overline{P\overline{P}} < \frac{1}{3}\}$, poniamo, per h, k interi qualunque:

$$\overline{P}_{h,k} = (\bar{x} + h, \bar{y} + k) , \qquad C_{h,k} = \{P | \overline{P\overline{P}}_{h,k} < \tfrac{1}{3}\}$$

(ovviamente $\overline{P}_{0,0} = \overline{P}$, $C_{0,0} = C_{\overline{P}}$). Se $w(x, y) \in C_0^{\infty}(C_{\overline{P}})$ $(\overline{P} \in T)$, la funzione:

$$\mathcal{W}(x, y) = \begin{cases} w(x - h, y - k) , & \text{in } C_{h,k} \\ 0 , & \text{in } \boldsymbol{R}^2 - \bigcup_{h,k} C_{h,k} \end{cases}$$

è ben una funzione $\in \mathrm{C}_{\#}^{\infty}$, onde la (4.10) vale anche con $u = \mathcal{W}$.

E dalla (4.10) scritta con $u = \mathcal{W}$, ove si tenga conto della periodicità di $\mathcal{V}, \mathcal{W}$, a, b, si deduce:

$$\mathcal{V} \in L^2(Q) , \quad \int_{C_{\overline{P}}} \mathcal{V}[aD_x^2 + bD_y^2 + \lambda] w \, dx \, dy = 0 , \quad \forall w \in C_0^{\infty}(C_P) \tag{4.11}$$

dove $\overline{P}$ è un (arbitrario) punto di T.

Da (4.11), per noti teoremi (vedi anche AGMON [3], Teor. 6.1, p. 428), e per essere $a, b \in \mathcal{C}^\infty$, discende:

$$\mho \in W^{2,2}(C'_{\overline{P}}) , \quad \text{dove } C'_{\overline{P}} = \{P | \overline{P\overline{P}} < \tfrac{1}{4}\}$$

[anzi addirittura: $\mho \in C^\infty(C_{\overline{P}})$]. Dopo ciò, ricoprendo T con un numero finito di sfere $C'_{\overline{P}}$ $(\overline{P} \in T)$, e tenendo conto della periodicità di $\mho$, si può asserire che (⁴)

$$\{v \in L^2,\ \mathcal{A}^* v = 0\} \Rightarrow \{v \in W^{2,2}_{\#},\ \int_T v[E + \lambda] u \, dx \, dy = 0,\ \forall u \in \mathcal{C}^\infty_{\#}\} . \tag{4.12}$$

Ma allora si può integrare per parti, e tenendo conto della periodicità di u, v, a, b si ha:

$$\{v \in L^2,\ \mathcal{A}^* v = 0\} \Rightarrow \left\{v \in W^{2,2}_{\#},\ \int_T u[E^* + \lambda] v \, dx \, dy = 0,\ \forall u \in \mathcal{C}^\infty_{\#}\right\} , \tag{4.13}$$

e infine, esplicitando l'aggiunto formale E^*:

$$\{v \in L^2,\ \mathcal{A}^* v = 0\} \Rightarrow \{v \in W^{2,2}_{\#},\ [E^* + \lambda] v \equiv D^2_x(av) + D^2_y(bv) + \lambda v = 0\} . \tag{4.14}$$

A questo punto possiamo enunciare il

TEOREMA 4.I. – *Se $a, b \in \mathcal{C}^\infty_{\#}$ verificano la* (4.1), *ed è*:

$$\lambda > 2(\max |D^2_x a| + \max |D^2_y b|) , \tag{4.15}$$

allora il problema (4.2) *è univocamente risolubile, per ogni $f \in L^2(T)$.*

DIM. – L'unicità essendo già acquisita per la (4.5), resta da far vedere chè $\mathcal{A}$ è suriettivo, e cioè che vale l'implicazione (4.6). Ma evidentemente si ha:

$$\begin{aligned}(E^* + \lambda) v \equiv D^2_x(av) + D^2_y(bv) + \lambda v = \\ &= a D^2_x v + b D^2_y v + 2 D_x a D_x v + 2 D_y b D_y v + (\lambda + D^2_x a + D^2_y b) v \equiv \\ &\equiv Ev + \alpha D_x v + \beta D_y v + (\lambda + \gamma) v ,\end{aligned}$$

dove: $\alpha = 2 D_x a$, $\beta = 2 D_y b$, e $\gamma = D^2_x a + D^2_y b$ certamente verifica la (4.1)′ per via della (4.15). Dopo ciò, da (4.14) e (4.4) segue infine la (4.6). c.v.d.

(⁴) Anzi, per essere $v \in \mathcal{C}^\infty$ in un aperto $A = \cup c_{\overline{P}} \supset T$, e periodica, si ha:

$$\{v \in L^2,\ \mathcal{A}^* v = 0\} \Rightarrow \left\{v \in \mathcal{C}^\infty_{\#},\ \int_T v[E + \lambda] u \, dx \, dy = 0 , \quad \forall u \in \mathcal{C}^\infty_{\#}\right\} . \tag{4.12)'}$$

Dal teorema 4.I, sulla base di noti teoremi di regolarizzazione, e sfruttando opportunamente la periodicità, segue facilmente il

TEOREMA 4.II. – *Se* $a, b \in C^{\infty}_{\#}$ *e* $\lambda > 0$ *verificano le condizioni* (4.1) e (4.15), *allora, qualunque sia* $s > 0$, *si ha che* [5]:

$$\forall f \in W^{s,2}_{\#},\ \exists | u \in W^{s+2,2}_{\#} \colon [E + \lambda] u = f \tag{4.16}$$

(*cioè* $E + \lambda$ *è un isomorfismo tra* $W^{s+2,2}_{\#}$ *e* $W^{s,2}_{\#}$).

Dal teorema 4.II segue infine il

TEOREMA 4.III. – *Se* $a, b \in C^{\infty}_{\#}$ *verificano la* (4.1), *e se è* $\lambda > 0$, *allora, qualunque sia* $s > 0$, *l'operatore*

$$E + \lambda \colon W^{s+2,2}_{\#} \to W^{s,2}_{\#}$$

è un isomorfismo.

DIM. – Infatti, grazie al teorema precedente, posto:

$$\lambda' = \lambda + 2(\max |D^2_x a| + \max |D^2_y b|) \equiv \lambda + \lambda_0 ,$$

è chiaro che $E + \lambda' = E + \lambda + \lambda_0$ è un isomorfismo tra $W^{s+2,2}_{\#}$ e $W^{s,2}_{\#}$.

D'altro canto l'operatore

$$A \colon u \in W^{s+2,2}_{\#} \to \lambda_0 u \in W^{s,2}_{\#}$$

è evidentemente compatto; dopo ciò, per il teorema di Gohberg-Krein, l'indice di $E + \lambda$ è dato da:

$$i(E + \lambda) = i(E + \lambda' - \lambda_0) = i(E + \lambda') = 0 .$$

E siccome, in forza di (4.5), $E + \lambda$ è pur sempre iniettivo, l'asserto è provato.

c.v.d.

5. – Locale invertibilità di $\mathcal{F}$ in $W^{4,2}_{\#}$.

In questo paragrafo considereremo l'operatore $\mathcal{F}(v) = \lambda v + F(D^2_x v, D^2_y v)$ come applicazione:

$$\mathcal{F} \colon W^{4,2}_{\#} \to W^{2,2}_{\#} .$$

---

[5] Il simbolo: $\exists|$ significa: « esiste uno e uno solo ».

Inoltre, *fissata* arbitrariamente una $u \in \Phi \subset W^{4,2}_{\#}$, considereremo l'operatore lineare ellittico:

$$\mathcal{F}'(u)v = [\lambda + F_1(D^2_x u, D^2_y u)D^2_x + F_2(D^2_x u, D^2_y u)D^2_y]v \equiv \equiv [\lambda + a^u D^2_x + b^u D^2_y]v \equiv [\lambda + E^u]v, \quad v \in W^{4,2}_{\#}. \tag{5.1}$$

Visto che (cfr. le (2.10)), per $u \in \Phi$, risulta: $a^u, b^u \in C^{\infty}_{\#}$, e valgono le (4.1), possiamo applicare all'operatore (5.1) il teorema 4.III; così, per $s = 2$, si ha:

$$\forall f \in W^{2,2}_{\#}, \ \exists | v \in W^{4,2}_{\#}: \mathcal{F}'(u)v = f. \tag{5.2}$$

Osserviamo che $\mathcal{F}'(u): v \in W^{4,2}_{\#} \to [\lambda + E^u]v \in W^{2,2}_{\#}$, è, nel fissato punto $u \in \Phi \subset \subset W^{4,2}_{\#}$, il differenziale dell'operatore non lineare $\mathcal{F}: W^{4,2}_{\#} \to W^{2,2}_{\#}$.

Ed è chiaro che l'espressione del differenziale $\mathcal{F}'(u)$ è fornita dalla (5.1) anche per $u \in W^{4,2}_{\#} - \Phi$.

Si può far vedere che $\mathcal{F}: W^{4,2}_{\#} \to W^{2,2}_{\#}$ è di classe C^1; e cioè che è continua, in ogni $w \in W^{4,2}_{\#}$, l'applicazione

$$\mathcal{F}': w \in W^{4,2}_{\#} \to \mathcal{F}'(w) \in \mathfrak{L} \equiv \mathfrak{L}(W^{4,2}_{\#}, W^{2,2}_{\#}).$$

Si tratta di provare che, per ogni $u \in W^{4,2}_{\#}$:

$$\{u_n \xrightarrow[W^{4,2}_{\#}]{} u\} \Rightarrow \{\|\mathcal{F}'(u_n) - \mathcal{F}'(u)\|_{\mathfrak{L}} \equiv \sup_v \|v\|^{-1}_{W^{4,2}} \|\mathcal{F}'(u_n)v - \mathcal{F}'(u)v\|_{W^{2,2}} \to 0\}. \tag{5.3}$$

All'uopo si esservi che, grazie al teorema di Sobolev (vedi ad esempio [1], pag. 97), si ha:

$$\forall w \in W^{4,2}_{\#}, \quad w \in C^{2,\lambda}(T) \cap W^{3,q}(T), \quad \forall q \geqslant 2, \ \forall \lambda \in]0, 1[, \tag{5.4}$$

con immersione continua. In particolare, si può dire che esiste una costante assoluta γ_0 tale che:

$$\begin{cases} \sum_{h+k \leqslant 2} \max_T |D^h_x D^k_y w| \leqslant \gamma_0 \|w\|_{W^{4,2}}, & \forall w \in W^{4,2}_{\#}, \\ \sum_{h+k \leqslant 3} \|D^h_x D^k_y w\|_{L^4(T)} \leqslant \gamma_0 \|w\|_{W^{4,2}}, & \forall w \in W^{4,2}_{\#}. \end{cases} \tag{5.5}$$

Da (5.5) segue, ovviamente:

$$u_n \xrightarrow[W^{4,2}_{\#}]{} u \Rightarrow \begin{cases} u_n \xrightarrow[C^2(T)]{} u, \\ u_n \xrightarrow[W^{3,4}(T)]{} u. \end{cases} \tag{5.6}$$

Ciò premesso, assumendo come norma su $W_{\#}^{2,2}$:

$$\|\varphi\|_{W_{\#}^{2,2}} = \|\varphi\|_0 + \|D_x^2\varphi\|_0 + \|D_y^2\varphi\|_0\,, \qquad [\|g\|_0 \equiv \|g\|_{L^2(T)}]$$

(ciò che è lecito in quanto $\|\cdot\|_{W_{\#}^{2,2}}$ è equivalente a $\|\cdot\|_{2,2,T}$), si ha:

$$(5.7) \qquad \|\mathcal{F}'(u_n)v - \mathcal{F}'(u)v\|_{W_{\#}^{2,2}} = \|(\mathcal{F}'(u_n) - \mathcal{F}'(u))v\|_0 +$$
$$+ \|D_x^2[(\mathcal{F}'(u_n) - \mathcal{F}'(u))v]\|_0 + \|D_y^2[(\mathcal{F}'(u_n) - \mathcal{F}'(u))v]\|_0 \equiv I_1 + I_2 + I_3\,.$$

Utilizzando opportunamente la (5.6), da facili calcoli discende:

$$\|\mathcal{F}'(u_n)v - \mathcal{F}'(u)v\|_{W_{\#}^{2,2}} \leqslant \gamma_1 \|v\|_{W^{4,2}}\varepsilon\,, \qquad \forall n \geqslant \nu_\varepsilon$$

con γ_1 costante assoluta.

Tanto basta a provare la (5.3).

In modo analogo si prova che $\mathcal{F}\colon W_{\#}^{4,2} \to W_{\#}^{2,2}$ è un'applicazione continua.

Dopo ciò, in forza di (5.2) e (5.3) (e della continuità di $\mathcal{F}$), grazie al Teorema di invertibilità *locale* negli spazi di Banach (cfr., ad es., [18] e [20]), si può enunciare il seguente:

TEOREMA 5.I. – *Se $F(\xi,\eta)$ verifica le* (2.10), *allora in ogni punto $u \in \Phi \subset W_{\#}^{4,2}$ l'operatore $\mathcal{F}$ è localmente invertibile come operatore da $W_{\#}^{4,2}$ in $W_{\#}^{2,2}$.*

Il teorema 5.I ci assicura che:

$$(5.13) \qquad \forall u \in \Phi \subset W_{\#}^{4,2},\ \exists \delta, \varepsilon > 0:$$
$$\mathcal{F}\colon I_\delta^{4,2}(u) \to I_\varepsilon^{2,2}(f) \equiv I_\varepsilon^{2,2}(\mathcal{F}(u)) \qquad \text{è bigettiva}\,,$$

dove si sono denotati con $I_\delta^{4,2}$ e $I_\varepsilon^{2,2}$ gli intorni:

$$I_\delta^{4,2}(u) = \{v \in W_{\#}^{4,2}\colon \|v - u\|_{W^{4,2}(T)} < \delta\}\,,$$
$$I_\varepsilon^{2,2}(f) = \{g \in W_{\#}^{2,2}\colon \|g - f\|_{W^{2,2}(T)} < \varepsilon\}\,, \qquad (f = \mathcal{F}(u))\,.$$

6. – Sul carattere aperto dell'operatore $\mathcal{F}$.

Torniamo ora a considerare $\mathcal{F}$ come operatore da Φ in Φ. Vogliamo provare che:

LEMMA 6.I. – *Se $F(\xi,\eta)$ verifica le* (2.10), *allora il codominio $\mathcal{F}(\Phi)$ di $\mathcal{F}\colon \Phi \to \Phi$ è aperto in Φ.*

DIM. – Sia, invero, f il generico elemento di $\mathcal{F}(\Phi)$ e sia $u \in \Phi$ un elemento tale che $\mathcal{F}(u) = f$.

Per tale u possiamo scrivere la (5.13); nulla vieta, infatti, di riguardare simultaneamente $\mathcal{F}$ come operatore da $W_{\#}^{4,2}$ in $W_{\#}^{2,2}$.

Ebbene consideriamo l'insieme:

$$J_\varepsilon(f) = \Phi \cap I_\varepsilon^{2,2}(f) \equiv \{g \in C_{\#}^{\infty} \colon \|g - f\|_{W^{2,2}(T)} < \varepsilon\} ;$$

questo insieme è certamente un intorno di f secondo la topologia di Φ (vedi § 1), perchè contiene, ad esempio, l'intorno « fondamentale » ([6]):

$$\{g \in C_{\#}^{\infty} \colon \|g - f\|_{C^2(T)} < \varepsilon\} \equiv f + J_{2,\varepsilon}(0) .$$

Consideriamo il generico $g \in J_\varepsilon(f) \subset I_\varepsilon^{2,2}(f)$, e denotiamo con v il « corrispondente » elemento di $I_\delta^{4,2}(u)$ (esistente grazie alla (5.13)) tale che $\mathcal{F}(v) = g$.

Indicando con $\mathcal{V} = v_{\#}$ (cfr. § 2) il prolungamento periodico di v $(\in W_{\#}^{4,2})$, si riconosce facilmente che $\mathcal{V} \in W^{4,2}(Q)$ e che (essendo $g \in C_{\#}^{\infty}$) verifica l'equazione:

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathcal{F}(v_{\#}) \equiv \lambda \mathcal{V} + F(D_x^2 \mathcal{V}, D_y^2 \mathcal{V}) = g(x, y) , & \forall (x, y) \in Q \\ \mathcal{V} \in W^{4,2}(Q) \subset C^{2,\mu}(Q) , \quad g \in C^{\infty}(Q) & \end{array}\right. \tag{6.2}$$

avendo anche ricordato il Teorema di Sobolev. Da (6.2), grazie ai fondamentali risultati di regolarizzazione di DOUGLIS-NIRENBERG [9] (vedi anche A. FRIEDMAN [11]), segue che $\mathcal{V}$ è di classe C^∞ in ogni dominio $D \subset \mathring{Q}$.

In particolare, quindi, $\mathcal{V}$ è C^∞ in un intorno di ∂T, per cui:

$$v \equiv \mathcal{V} \in C_{\#}^{\infty} \tag{6.3}$$

(identificando v con $v_{\#}$), ove si tenga conto della periodicità. Ma questo implica:

$$g = \mathcal{F}(v) \in \mathcal{F}(\Phi) , \tag{6.3$'$}$$

e infine, per l'arbitrarietà di $g \in J_\varepsilon(f)$:

$$J_\varepsilon(f) \subset \mathcal{F}(\Phi) . \tag{6.4}$$

Dunque, data l'arbitrarietà di $f \in \mathcal{F}(\Phi)$, resta provato che $\mathcal{F}(\Phi)$ è aperto in Φ.

c.v.d.

([6]) Infatti:

$$g \in f + J_{2,\varepsilon}(0) \Rightarrow \sum_{h+k \leqslant 2} \max_T |D_y^h D_x^k (g - f)| < \varepsilon \Rightarrow \Big(\sum_{h+k \leqslant 2} \int_T |D_x^h D_y^k (g - f)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{h,k} \max_T |D_x^h D_y^k (g - f)|^2} \leqslant \sum_{h+k \leqslant 2} \max_T |D_x^h D_y^k (g - f)| < \varepsilon \Rightarrow g \in J_\varepsilon(f) \equiv \Phi \cap I_\varepsilon^{2,2}(f) .$$

Dal lemma 6.I, dal teorema 3.III e dal teorema 1.I discende:

TEOREMA 6.I. – *Se* $F(\xi, \eta)$ *verifica le* (2.10), *allora*:

$$\forall f \in \Phi,\ \exists u \in \Phi:\ \mathcal{F}(u) \equiv \lambda u + F(D_x^2 u, D_y^2 u) = f . \tag{6.5}$$

7. – Un'estensione del teorema di Campanato.

In questo numero diamo un'estensione del teorema di S. Campanato, per una particolare classe di operatori lineari ellittici del quarto ordine.

Indichiamo, al solito, con $\mathcal{C}_{\#}^{\infty}$ l'insieme delle funzioni reali $u(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{C}^{\infty}$, periodiche di periodo 1 in tutte le x_k. Nello spazio $W_{\#}^{k,p}$, completamento di $\mathcal{C}_{\#}^{\infty}$ rispetto alla norma:

$$\|u\|_{k,p,T} = \left[\sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_T |D^\alpha u(x)|^p \, dx\right]^{1/p}, \qquad (T = [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]^n),$$

introduciamo anche la norma (equivalente):

$$|u|_{k,p,T} = \left\{\int_T [(D_{x_1}^k u)^2 + \dots + (D_{x_n}^k u)^2 + u^2]^{p/2} \, dx\right\}^{1/p}.$$

In generale, se $A \in \mathcal{L}(W_{\#}^{k,p}, L^p)$ (pensando $W_{\#}^{k,p}$ munito della norma $|\cdot|_{k,p,T}$), indicheremo con $\|A\|_p$ la sua norma:

$$\sup_w \left(|w|_{k,p,T}\right)^{-1} \|Aw\|_{L^p(T)} .$$

Se, poi, A è invertibile tra $W_{\#}^{k,p}$ ed $L^p(T)$, indicheremo con $\|A^{-1}(p)\|$ la norma dell'operatore inverso.

Indicheremo, infine, con la notazione usuale

$$|D^r u|_{p,T} = \sum_{|\alpha| = r} \left(\int_T |D^\alpha u|^p \, dx\right)^{1/p}$$

le semi-norme di Nirenberg.

D'ora in poi sarà $k = 4$, e porremo: $E_0 = (D_{x_1}^4 + \dots + D_{x_n}^4 + 1)$.

Evidentemente, per ogni $u \in \mathcal{C}_{\#}^{\infty}$, risulta:

$$\begin{aligned}\int_T (E_0 u)^2 \, dx &= \int_T \left(\sum_1^n (D_{x_i}^4 u)^2 + u^2\right) dx + 2 \int_T \sum_{i,j=1}^n D_{x_i}^4 u D_{x_j}^4 u \, dx + \\ &\quad + 2 \int_T \sum_1^n u D_{x_i}^4 u \, dx = |u|_{4,2,T}^2 + 2 \int_T \sum_{i,j=1}^n (D_{x_i}^2 D_{x_j}^2 u)^2 \, dx + \\ &\quad + 2 \int_T \sum_1^n (D_{x_i}^2 u)^2 \, dx \geqslant |u|_{4,2,T}^2 .\end{aligned} \tag{7.1}$$

Conseguentemente si ha:

$$\forall u \in W_{\#}^{4,2}, \qquad |u|_{4,2,T} \leqslant \|E_0 u\|_{L^2(T)}. \tag{7.2}$$

La (7.2) prova che E_0: $W_{\#}^{4,2} \to L^2(T)$ (lineare continuo) è iniettivo e a codominio chiuso.

E non sarebbe difficile mostrare che:

$$v \in L^2(T), \qquad E_0^* v = 0 \Rightarrow v = 0;$$

per cui resta provata la:

PROPOSIZIONE 7.I. – *L'operatore* E_0: $W_{\#}^{4,2} \to L^2(T)$ *è un isomorfismo algebrico e topologico, per il cui isomorfismo inverso risulta*:

$$\|E_0^{-1}(2)\| \leqslant 1. \tag{7.3}$$

La (7.3) è ovvia conseguenza di (7.2).

Ma si può anche provare la:

PROPOSIZIONE 7.II. – *L'operatore* E_0 *è un isomorfismo algebrico e topologico tra* $W_{\#}^{4,p}$ *ed* $L^p(T)$. *Inoltre, fissato* $r > 2$, *risulta*:

$$\|E_0^{-1}(p)\| \leqslant \|E_0^{-1}(r)\|^{r(p-2)/p(r-2)} \equiv c(p), \qquad \forall p \in [2, r]. \tag{7.4}$$

La (7.4) si stabilisce per interpolazione.

Siano ora λ un numero, ed $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ delle funzioni tali che:

$$\begin{cases} \lambda > 0;\ 0 < \nu \leqslant a_i(x) \leqslant M, \qquad i = 1, \ldots, n, \\ \forall i,\ a_i(x) \text{ misurabile e periodica di periodo } 1, \\ \inf\limits_T \dfrac{\left(\lambda + \sum\limits_{i=1}^n a_i(x)\right)^2}{\lambda^2 + \sum\limits_{i=1}^n a_i^2(x)} > n. \end{cases} \tag{7.5}$$

Dall'ultima delle (7.5) discende:

$$\mathfrak{R}^2 \equiv \sup_T \left\{ n + 1 - \frac{\left(\lambda + \sum\limits_1^n a_i(x)\right)^2}{\lambda^2 + \sum\limits_1^n a_i^2(x)} \right\} < 1. \tag{7.6}$$

Poniamo:

$$\alpha(x) = \frac{\lambda + \sum\limits_1^n a_i(x)}{\lambda^2 + \sum\limits_1^n a_i^2(x)}; \qquad A \equiv E + \lambda = \lambda + \sum_{i=1}^n a_i(x) D_{x_i}^4. \tag{7.7}$$

TEOREMA 7.I. – *Per ogni* $p \geqslant 2$ *risulta*:

$$\|E_0 - \alpha(E + \lambda)\|_p \leqslant \Re < 1 . \tag{7.8}$$

DIM. – Ricordando (7.6) e (7.7), per la generica $u \in W_{\#}^{4,p}$, si ha:

$$\begin{aligned}
|(E_0 - \alpha A)u|^2 &= \left\{\sum_1^n (1-\alpha a_i) D_{x_i}^4 u + (1-\alpha\lambda)u\right\}^2 \leqslant \\
&\leqslant \left[(n+1) - 2\alpha\left(\sum_1^n a_i + \lambda\right) + \alpha^2\left(\sum_1^n a_i^2 + \lambda^2\right)\right]\left[\sum_1^n (D_{x_i}^4 u)^2 + u^2\right] = \\
&= \left\{(n+1) - \frac{\left(\lambda + \sum_1^n a_i\right)^2}{\lambda^2 + \sum_1^n a_i^2}\right\}\left[\sum_1^n (D_{x_i}^4 u)^2 + u^2\right] \leqslant \\
&\leqslant \Re^2\left[\sum_1^n (D_{x_i}^4 u)^2 + u^2\right]. \qquad \text{c.v.d.}
\end{aligned}$$

TEOREMA 7.II. – *Se valgono le* (7.5), *esiste un numero* $p_1 > 2$ *tale che, per ogni* $p \in [2, p_1[$, *l'operatore*:

$$E + \lambda \colon W_{\#}^{4,p} \to L^p(T)$$

risulti un isomorfismo (*algebrico e topologico*).

DIM. – La funzione $c(p) = \|E_0^{-1}(r)\|^{r(p-2)/p(r-2)}$ di (7.4) è *continua e vale* 1 *per* $p = 2$. Dopo ciò, sempre per (7.4) si può dire che:

$$\exists p_1 > 2 \colon \ \forall p \in [2, p_1[, \qquad \|E_0^{-1}(p)\| < \frac{1}{\Re} . \tag{7.10}$$

Fissata, allora, $f \in L^p(T)$ ($p \in [2, p_1[$), consideriamo la mappa

$$\varphi \colon u \in W_{\#}^{4,p} \to E_0^{-1}(p)(\alpha f) + E_0^{-1}(p)\big(E_0 - \alpha(E+\lambda)\big)u \in W_{\#}^{4,p};$$

si ha facilmente, per la (7.8),

$$\begin{aligned}
|\varphi(u_1) - \varphi(u_2)|_{4,p,T} &= |E_0^{-1}(p)\big(E_0 - \alpha(E+\lambda)\big)(u_1 - u_2)|_{4,p,T} \\
&\leqslant \|E_0^{-1}(p)\| \|E_0 - \alpha(E+\lambda)\|_p |u_1 - u_2|_{4,p,T} \leqslant \|E_0^{-1}(p)\| \Re |u_1 - u_2|_{4,p,T} ,
\end{aligned}$$

il che prova, grazie a (7.10), che $\varphi \colon W_{\#}^{4,p} \to W_{\#}^{4,p}$ è una contrazione. Dunque φ ammette un unico punto unito, per il quale risulta:

$$u = \varphi(u) = E_0^{-1}(p)(\alpha f) + E_0^{-1}(p)\big(E_0 - \alpha(E+\lambda)\big)u$$

e quindi

$$E_0 u = \alpha f + E_0 u - \alpha(E + \lambda)u \Leftrightarrow (E + \lambda)u = f .$$

c.v.d.

N.B. – D'ora in poi supporremo $n = 2$.

8. – Un'equazione del quarto ordine.

Il teorema 7.II assicura che, se valgono le (7.5) (che d'ora in poi intenderemo scritte per $n = 2$), allora:

$$\text{(8.1)} \qquad \forall u \in W_{\#}^{4,p}, \quad |u|_{4,p,T} \leqslant c_1(p)\|(E + \lambda)u\|_{L^p(T)} \qquad (p \in [2, p_1[)$$

dove $c_1(p)$ (da non confondere con la $c(p)$ di (7.4)) è la norma $\|A^{-1}(p)\|$ di $A^{-1} \equiv \equiv (E + \lambda)^{-1}: L^p(T) \to W_{\#}^{4,p}$, e dipende *solo da* p, M, ν. Infatti (cfr. Teor. 7.II) dire che $(E + \lambda)u = f$ vuol dire che: $u = \varphi(u) \equiv E_0^{-1}(p)(\alpha f + (E_0 - \alpha A)u)$; ed allora, tenendo presenti le (7.5), (7.7), (7.8) e (7.10), si ha:

$$|u|_{4,p,T} \leqslant \|E_0^{-1}(p)\|\left(\|\alpha f\|_{L^p(T)} + \|E_0 - \alpha A\|_p |u|_{4,p,T}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \|E_0^{-1}(p)\|\Re|u|_{4,p,T} + \|E_0^{-1}(p)\|\frac{\lambda + nM}{\lambda^2 + n\nu^2}\|f\|_{L^p(T)},$$

e quindi:

$$c_1(p) \equiv \|A^{-1}(p)\| \equiv \sup_{f \in L^p} \frac{|u|_{4,p,T}}{\|f\|_{L^p}} \leqslant \frac{\|E_0^{-1}(p)\|\,(\lambda + nM)/(\lambda^2 + n\nu^2)}{1 - \Re\|E_0^{-1}(p)\|} .$$

Stante il significato di $c_1(p)$, si ha, poi, per interpolazione:

$$\text{(8.1)}' \qquad c_1(p) \leqslant c_1(\overline{p})^{\overline{p}(p-2)/p(\overline{p}-2)}\, c_1(2)^{1-\overline{p}(p-2)/p(\overline{p}-2)} \equiv \tilde{\gamma}(p) \leqslant \tilde{\gamma} \equiv \max_p \tilde{\gamma}(p)$$

per: $2 \leqslant p \leqslant \overline{p} < p_1$, dove — una volta fissato $\overline{p}$ — $\tilde{\gamma}$ diventa una costante assoluta $(\equiv \max\{c_1(2), c_1(\overline{p})\})$.

Sia $F(\xi) \equiv F(\xi_1, \xi_2)$ una funzione reale di classe $C^\infty(\boldsymbol{R}^2)$, e siano $\lambda, \nu, M \equiv \equiv N_0 \equiv N_1, N_2, \ldots, N_k, \ldots$ delle costanti *positive* tali che:

$$\text{(8.2)} \qquad \begin{cases} |D_\xi^\alpha F(\xi)| \leqslant N_{|\alpha|}, \quad \forall \xi \text{ e per } |\alpha| \geqslant 1;\ |F(0,0)| \leqslant M; \\ 0 < \nu < F_i(\xi) \equiv D_{\xi_i} F(\xi_1, \xi_2) \leqslant M, \quad \forall \xi \text{ e per } i = 1, 2; \\ \inf\limits_{\boldsymbol{R}^2} \dfrac{(F_1(\xi) + F_2(\xi) + \lambda)^2}{F_1^2(\xi) + F_2^2(\xi) + \lambda^2} > 2 . \end{cases}$$

Avendosi: $\lambda v + F(D_{x_1}^4 v, D_{x_2}^4 v) \in C_{\#}^\infty$, $\forall v \in C_{\#}^\infty$, è lecito considerare l'applicazione:

$$\mathcal{F}: v \in C_{\#}^\infty \to \mathcal{F}(v) \equiv \lambda v + F(D_{x_1}^4 v, D_{x_2}^4 v) \in C_{\#}^\infty .$$

Posto $\mathcal{F}(v) = f$, derivando rispetto ad x_j $(j = 1, 2)$, si ha

$$(8.3)\qquad [\lambda + F_1(D^4_{x_1}v, D^4_{x_2}v)D^4_{x_1} + F_2(D^4_{x_1}v, D^4_{x_2}v)D^4_{x_2}]D_{x_j}v \equiv$$
$$\equiv [\lambda + a^v D^4_{x_1} + b^v D^4_{x_2}]D_{x_j}v \equiv [\lambda + E^v]D_{x_j}v = D_{x_j}f\,.$$

È chiaro, per le (8.2), che i coefficienti $a^v \equiv a_1^v \equiv F_1(D^4_{x_1}v, D^4_{x_2}v)$ e $b^v \equiv a_2^v \equiv \equiv F_2(D^4_{x_1}v, D^4_{x_2}v)$ di E^v verificano le (7.5), per cui è lecito applicare la (8.1) ad $E^v + \lambda$; e si ha:

$$(8.4)\qquad |D_{x_j}v|_{4,p,T} \leqslant c_1(p)\|D_{x_j}f\|_{L^p(T)}\,, \qquad p \in [2, p_1[, \qquad j = 1, 2\,.$$

Inoltre l'equazione $\lambda v + F(D^4_{x_1}v, D^4_{x_2}v) = f$ si può scrivere:

$$(8.5)\qquad \lambda v = f - F(0, 0) - F_1(\xi)D^4_{x_1}v - F_2(\xi)D^4_{x_2}v$$

dove $\xi = (\xi_1, \xi_2) \equiv (\xi_1(x_1, x_2), \xi_2(x_1, x_2))$ è un conveniente punto del segmento di estremi $(0, 0)$ e $(D^4_{x_1}v(x), D^4_{x_2}v(x))$.

Da (8.2), (8.4) e (8.5) segue subito:

$$(8.6)\qquad \|v\|_{L^p(T)} \leqslant c_2(p)\{\|f\|_{1,p,T} + M\} \qquad (p \in [2, p_1[)$$

dove $c_2(p)$ (e così, poi, $c_3(p), \ldots$) dipende solo da ν, M e p.

Dopo ciò, per l'equivalenza tra le norme $|\cdot|_{k,p,T}$ e $\|\cdot\|_{k,p,T}$, grazie al Teorema di Sobolev $(n = 2)$, da (8.4) e (8.6) si trae:

$$(8.7)\qquad \max_{T} |v(x)| \leqslant \gamma_1'\|v\|_{5,\bar{p},T} \leqslant \gamma_1\{\|\mathcal{F}(v)\|_{1,\bar{p},T} + M\}\,, \qquad \forall v \in \mathcal{C}^\infty_\#\,,$$

dove — avendo *fissato* una volta per tutte $\bar{p} \in]2, p_1[$ — γ_1' e $\gamma_1 \equiv c_3(\bar{p})$ sono, ormai delle costanti assolute.

A questo punto, derivando (8.3) rispetto ad x_k, si ha:

$$(8.8)\qquad [\lambda + \sum_{i=1}^{2} F_i(D^4_{x_1}v, D^4_{x_2}v)D^4_{x_i}]D_{x_j}D_{x_k}v \equiv [\lambda + E^v]D_{x_j}D_{x_k}v =$$
$$= D_{x_j}D_{x_k}f - \sum_{i,l=1}^{2} F_{il}(D^4_{x_1}v, D^4_{x_2}v)D^4_{x_l}D_{x_k}vD^4_{x_i}D_{x_j}v$$

dove si è posto $F_{il} = D_{\xi_i}D_{\xi_l}F(\xi_1, \xi_2)$, $i, l = 1, 2$.

Applicando la (8.1), (con $2 < p < \bar{p}$) alla (8.8), ricordando la (8.1)$'$, e indicando con $\gamma_2, \gamma_3, \ldots$ delle costanti assolute, si ottiene:

$$(8.9)\qquad |D_{x_j}D_{x_k}v|_{4,p,T} \leqslant \gamma_2 \|D_{x_j}D_{x_k}f\|_{L^p(T)} + \\ + \gamma_2 N_2 \sum_{|\alpha|=|\beta|=5}\left[\int_T |D^\alpha v D^\beta v|^p\, dx\right]^{1/p} \leqslant \gamma\, \|D_{x_j}D_{x_k}f\|_{L^p(T)} + \\ + \gamma_2 N_2 \sum_{|\alpha|=|\beta|=5}\left[\left(\int_T |D^\alpha v|^{\bar p}\, dx\right)^{p/\bar p}\left(\int_T |D^\beta v|^{p\bar p/(\bar p - p)}\, dx\right)^{(\bar p - p)/\bar p}\right]^{1/p} \leqslant \\ \leqslant \gamma_3 \|D_{x_j}D_{x_k}f\|_{L^p(T)} + \gamma_4 \|v\|_{5,\bar p,T} \sum_{|\beta|=5}\left[\int_T |D^\beta v|^{p\bar p/(\bar p - p)}\, dx\right]^{(\bar p - p)/p\bar p},$$

da cui:

$$(8.10)\qquad |D^6 v|_{p,T} \leqslant \gamma_3' \sum_{j,k=1}^{2} \|D_{x_j}D_{x_k}f\|_{L^p(T)} + \gamma_4' \|v\|_{5,\bar p,T} |D^5 v|_{p\bar p/(\bar p - p)}, \qquad (2 < p < \bar p).$$

TEOREMA 8.I. – *Se* $F(\xi)$ *verifica le* (8.2), *esistono una costante assoluta* γ_{10} *ed un numero reale* $a \in]5/6, 1[$ *tali che*:

$$(8.11)\qquad \|v\|_{6,\bar p,T} \leqslant \gamma_{10}\{\|\mathcal{F}(v)\|_{2,\bar p,T} + M\}^{(4-2a)/(1-a)}, \qquad \forall v \in C_\#^\infty .$$

DIM. – Da una nota disuguaglianza ([7]) (cfr. ad es. [19], Teor. 58.X) scritta *per* $n = 2$, $p = p_0 \in]2, \bar p[$, $k = 5$, $r = 6$ [essendo $p > 2$, è certo verificata la condizione: $r - n/p = 6 - 2/p \notin \{0, 1, 2, \ldots\}$], discende:

$$(8.12)\qquad |D^5 v|_{s_5,T} \leqslant \gamma_5\{|D^6 v|_{p,T}^a |v|_{p,T}^{1-a} + |v|_{p,T}\}$$

con γ_5 costante assoluta, e con:

$$(8.12)'\qquad \frac{1}{s_5} = \frac{5}{2} + a\left(\frac{1}{p} - \frac{6}{2}\right) + \frac{1-a}{p} \equiv \chi(a), \qquad a \in \left[\frac{5}{6}, 1\right].$$

Ci chiediamo se sia possibile, nella (8.12)' scegliere a in maniera che risulti:

$$(8.13)\qquad \frac{1}{s_5} \equiv \chi(a) = \frac{\bar p - p}{\bar p p}, \qquad \frac{5}{6} < a < 1 .$$

([7]) Se r è intero positivo, $p \geqslant 1$, $p_0 \geqslant \alpha_0 > 1$, $r - n/p \notin \{0, 1, 2, \ldots\} \equiv N$, posto $\delta = \operatorname{dist}(r - n/p, N)$, esiste una costante K dipendente solo da $\Omega, r, \alpha_0, \delta$, tale che, per:

$$\frac{k}{r} \leqslant a \leqslant 1, \qquad \frac{1}{s_k} = \frac{k}{n} + a\left(\frac{1}{p} - \frac{r}{n}\right) + \frac{1-a}{p_0},$$

si abbia:

$$|D^k u|_{s_k,\Omega} \leqslant K\{|D^r u|_{p,\Omega}^a |u|_{p_0,\Omega}^{1-a} + |u|_{p_0,\Omega}\}, \qquad \forall u \in C^r .$$

Dato che $\chi(a)$ è continua e decrescente in $[5/6, 1]$, si potrà certo soddisfare (e in un sol modo) alla (8.13), se risulta:

$$\chi(1) \equiv \frac{1}{p} - \frac{1}{2} < \frac{\overline{p} - p}{\overline{p}p} < \chi\left(\frac{5}{6}\right) \equiv \frac{1}{p},$$

e cioè se: $1/p - \frac{1}{2} < 1/p - 1/\overline{p} < 1/p$. Ma questa condizione è certo verificata, dato che $\overline{p} > 2$.

Fissiamo, allora $a \in]5/6, 1[$ secondo la (8.13); dopo ciò la (8.12) diventa:

$$|D^5 v|_{\overline{p}p/(\overline{p}-p),T} \leqslant \gamma_5 \{ |D^6 v|^a_{p,T} |v|^{1-a}_{p,T} + |v|_{p,T} \}, \qquad (a < 1). \tag{8.14}$$

Da (8.10), (8.14), (8.6) e (8.7) discende:

$$\begin{aligned} |D^6 v|_{p,T} \leqslant \gamma_6 \| \mathcal{F}(v) \|_{2,p,T} + \gamma_6 (\| \mathcal{F}(v) \|_{1,\overline{p},T} + M)^2 + \\ + \gamma_6 (\| \mathcal{F}(v) \|_{1,\overline{p},T} + M)^{2-a} |D^6 v|^a_{p,T} \end{aligned} \tag{8.15}$$

$(a < 1,\ 2 < p < \overline{p})$. Da (8.15) e (8.7), grazie alle diseguaglianze di Sobolev [ed alla implicazione: $x \leqslant c_0 + \sum c_i x^{\alpha_i}$, $0 < \alpha_i < 1 \Rightarrow x \leqslant \gamma(c_0 + \sum c_i^{1/(1-\alpha_i)})$] segue infine (essendo $p > 2$):

$$\sum_{|\alpha| \leqslant 5} \max_T |D^\alpha v| \leqslant \gamma_7 \|v\|_{6,p,T} \leqslant \gamma_8 \{ \| \mathcal{F}(v) \|_{2,\overline{p},T} + M \}^{(2-a)/(1-a)}, \qquad \forall v \in C^\infty_\# . \tag{8.16}$$

Ma allora si può tornare alla (8.8) e applicarvi la (8.1) con $p = \overline{p}$ (mentre in (8.16) è $p \in]2, \overline{p}[$), per avere:

$$|D_{x_j} D_{x_k} v|_{4,\overline{p},T} \leqslant \gamma_9 \{ \| \mathcal{F}(v) \|_{2,\overline{p},T} + M \}^{2((2-a)/(1-a))}, \qquad \forall v \in C^\infty_\# . \tag{8.17}$$

Da (8.17) e (8.7) segue, ovviamente, (8.11). c.v.d.

A questo punto, derivando la (8.8) rispetto ad x_h, si ha:

$$\begin{aligned} [\lambda + E^v] D_{x_j} D_{x_k} D_{x_h} v = D_{x_j} D_{x_k} D_{x_h} f - \\ - \sum_{i,l=1}^{2} F_{il}(D^4_{x_1} v, D^4_{x_2} v)[D^4_{x_l} D_{x_k} D_{x_h} v D^4_{x_i} D_{x_j} v + D^4_{x_l} D_{x_k} v D^4_{x_i} D_{x_j} D_{x_h} v] - \\ - \sum_{i,l=1}^{2} D^4_{x_l} D_{x_k} v D^4_{x^i} D_{x_j} v [F_{il1}(\dots) D^4_{x_1} D_{x_h} v + F_{il2}(\dots) D^4_{x_2} D_{x_h} v] - \\ - \sum_{i=1}^{2} D_{x_j} D_{x_k} D^4_{x_i} v [F_{i1}(\dots) D^4_{x_1} D_{x_h} v + F_{i2}(\dots) D^4_{x_2} D_{x_h} v], \qquad \forall v \in C^\infty_\# . \end{aligned} \tag{8.18}$$

Si noti che *in ciascuno* dei prodotti a secondo membro della (8.18), *al più un fattore* è costituito da una derivata *sesta* della v, mentre le derivate quinte figurano fino a tre volte in ogni prodotto.

Ebbene, le derivate quinte si maggiorano (in modulo) con la (8.16), e le derivate seste con la (8.11). Si ha così, applicando la (8.1) all'equazione (8.18):

$$\|v\|_{7,\bar{p},T} \leq \gamma_{11}\{\|\mathcal{F}(v)\|_{3,\bar{p},T} + M\}^{\mu_3}, \quad \forall v \in C^\infty_\# \tag{8.19}$$

(con γ_{11} e μ_3 costanti assolute) avendo anche ricordato (8.7).

Da (8.19), per il Teorema di Sobolev ($\bar{p} > 2$) discende:

$$\sum_{|\alpha| \leq 6} \max_T |D^\alpha v| \leq \gamma_{12}\{\|\mathcal{F}(v)\|_{3,\bar{p},T} + M\}^{\mu_3}, \quad \forall v \in C^\infty_\# . \tag{8.19$'$}$$

A questo punto sarebbe facile provare, per ricorrenza, che, derivando k volte l'equazione $\mathcal{F}(v) = f$, per $k \geq 3$, ogni volta a secondo membro le derivate di v di ordine $4 + k - 1$ figurano *al più* una volta in ogni prodotto (il primo membro è sempre $[\lambda + E^v]D^k v$).

Si perviene, così (per ricorrenza), al seguente

Teorema 8.II. – *Se $F(\xi)$ verifica le (8.2), allora si possono determinare due successioni $\{\varrho_k\}$, $\{\mu_k\}$ di costanti (assolute) tali che, per ogni k si abbia:*

$$\|v\|_{4+k,\bar{p},T} \leq \varrho_k\{\|\mathcal{F}(v)\|_{k,\bar{p},T} + M\}^{\mu_k}, \quad \forall v \in C^\infty_\# . \tag{8.20}$$

Introduciamo su $C^\infty_\#$ la successione di norme:

$$\|v\|_{0,\bar{p},T}, \dots \dots, \quad \|v\|_{k,\bar{p},T}, \dots \dots$$

e indichiamo con Φ lo spazio perfetto che così si ottiene. Dal Teorema 8.II segue immediatamente il

Teorema 8.III. – *Se $F(\xi)$ verifica le (8.2), allora l'operatore*

$$\mathcal{F}: v \in \Phi \to \mathcal{F}(v) \equiv \lambda v + F(D^4_{x_1} v, D^4_{x_2} v) \in \Phi$$

è un operatore proprio.

Per giungere al teorema di esistenza, occorre prima provare il

Teorema 8.IV. – *Se $F(\xi)$ verifica le (8.2), allora l'operatore $\mathcal{F}: \Phi \to \Phi$ ha codominio aperto.*

Per provare il teorema 8.IV, si comincia con lo stabilire che:

$$\forall u \in C^\infty_\# \subset W^{5,\bar{p}}_\#, \quad \mathcal{F}'(u)v \equiv \lambda v + \sum_{i=1}^{2} F_i(D^4_{x_1} u, D^4_{x_2} u) D^4_{x_i} v \tag{8.21}$$

è bigettivo tra $W^{5,\bar{p}}_\#$ e $W^{1,\bar{p}}_\#$,

$$u_n, u \in W^{5,\bar{p}}_\#, \quad u_n \xrightarrow[W^{5,\bar{p}}_\#]{} u \Rightarrow \tag{8.22}$$

$$\Rightarrow \|\mathcal{F}'(u_n) - \mathcal{F}'(u)\|_{\mathfrak{L}} \equiv \sup_v \|v\|^{-1}_{W^{5,\bar{p}}} \|\mathcal{F}'(u_n)v - \mathcal{F}'(u)v\|_{W^{1,\bar{p}}} \to 0 .$$

La (8.22) si prova con ragionamenti simili a quelli del § 5 (per provare la (5.3)). La (8.21) segue facilmente dal teorema 7.II [grazie alle (8.2), $\mathcal{F}'(u)$ verifica le (7.5)]: si fissa f in $W_{\#}^{1,\bar{p}}(\subset L^{\bar{p}})$; si determina $v \in W_{\#}^{4,\bar{p}}$ tale che $\mathcal{F}'(u)v = f$; poi si periodizza v: $v_{\#} \equiv \mathcal{V} \in W^{4,\bar{p}}(Q)$ risolve l'equazione $\mathcal{F}'(u)\mathcal{V} = f_{\#} \in W^{1,\bar{p}}(Q)$; indi si applicano i teoremi di regolarizzazione, e si trova che $v_{\#} \equiv \mathcal{V} \in W_{\mathrm{loc}}^{5,\bar{p}}(\mathring{Q})$. Questo si può fare perchè, essendo $u \in C_{\#}^{\infty}$, i coefficienti di $\mathcal{F}'(u)$ sono addirittura C^{∞}; mentre se fosse $u \in W_{\#}^{5,\bar{p}}$, i coefficienti di $\mathcal{F}'(u)$ sarebbero solo di classe $W^{1,\bar{p}}$, il che è troppo poco per la regolerizzazione (cfr., ad es., A. FRIEDMAN [12], Teor. 15.1, pag. 53 (vedi condizione B_{m+k}), e — per il secondo ordine — i Teor. 37.I e 38.VII di [17]).

Infine, sfruttando opportunamente la periodicità, si conclude che $\mathcal{V}|_T \equiv v \in W_{\#}^{5,\bar{p}}$, donde la (8.21).

Stabilite le (8.21) e (8.22), si prova — come nel teorema 5.I — che $\mathcal{F}: W_{\#}^{5,\bar{p}} \to W_{\#}^{1,\bar{p}}$ è localmente invertibile *in ogni punto* $u \in C_{\#}^{\infty} \subset W_{\#}^{5,\bar{p}}$.

Di qui, ragionando come nel § 6, segue il Teor. 8.IV.

Infine dai Teor. 8.III e 8.IV, segue il

TEOREMA 8.V. - *Se $F(\xi)$ verifica le* (8.2), *allora*

$$\forall f \in \Phi,\ \exists v \in \Phi:\ \mathcal{F}(v) \equiv \lambda v + F(D_{x_1}^4 v, D_{x_2}^4 v) = f\,.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] R. ADAMS, *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975.

[2] S. AGMON, *Lectures on elliptic boundary value problems*, D. Van Nostrand Company, Inc., 1965.

[3] S. AGMON, *The L^p approach to the Dirichlet problem*, Ann. Sc. N. Sup. Pisa, **13** (1959), pp. 405-448.

[4] S. AGMON - A. DOUGLIS - L. NIRENBERG, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions* (I), Comm. Pure Appl. Math., **12** (1959), pp. 623-727.

[5] S. BERNSTEIN, *Sur la généralisation du problème de Dirichlet*, Math. Ann., **62** (1906), pp. 253-271; **69** (1910), pp. 82-136.

[6] L. BERS - L. NIRENBERG, *On linear and nonlinear elliptic boundary value problems in the plane*, Convegno Int. Eq. Lin. Der. Parz., Trieste (1954), pp. 141-167.

[7] R. CACCIOPPOLI, *Un principio di inversione per le corrispondenze funzionali e sue applicazioni alle equazioni a derivate parziali*, Rend. Acc. Lincei, **16** (1932), pp. 390-395, 484-489.

[8] S. CAMPANATO, *Un risultato relativo ad equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo non variazionale*, Ann. Sc. N. Sup. Pisa, **21** (1967), pp. 701-707.

[9] A. DOUGLIS - L. NIRENBERG, *Interior Estimates for Elliptic Systems of Partial Differential Equations*, Comm. Pure Appl. Math., **8** (1955), pp. 503-538.

[10] A. FRIEDMAN, *Generalized Functions and Partial Differential Equations*, Prentice-Hall, Inc., 1963.

[11] A. FRIEDMAN, *On the Regularity of the Solution of Non-Linear Elliptic and Parabolic Systems of Partial Differential Equations*, J. Math. Mech., **7** (1958), pp. 43-59.

[12] A. FRIEDMAN, *Partial Differential Equations*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1969.
[13] E. GIUSTI, *Equazioni ellittiche del secondo ordine*, Quaderni dell'UMI, Pitagora Editrice, 1978.
[14] I. M. GUELFAND - G. E. CHILOV, *Les Distributions* (tome 2), Dunod, 1964.
[15] J. LERAY, *Majoration des dérivées secondes des solutions d'un problème de Dirichlet*, Journ. de Math., **17**, Fasc. I (1938), pp. 89-104.
[16] J. LERAY, *Discussion d'un problème de Dirichlet*, Journ. de Math., **18**, Fasc. III (1939), pp. 249-284.
[17] C. MIRANDA, *Partial Differential Equations of Elliptic Type*, Springer Verlag, 1970.
[18] C. MIRANDA, *Problemi di esistenza in analisi funzionale*, Scuola Normale Superiore di Pisa, 1975.
[19] C. MIRANDA, *Istituzioni di analisi funzionale lineare*, Unione Matematica Italiana, 1978.
[20] G. PRODI - A. AMBROSETTI, *Analisi non lineare*, Scuola Normale Superiore di Pisa, 1973.