Semicontinuità inferiore di un funzionale integrale dipendente da funzioni di classe L^p a valori in uno spazio di Banach (*) (**).

GIANFRANCO BOTTARO - PIRRO OPPEZZI (Genova)

Summary. — We study the sequential lower semicontinuity of an integral functional $I: L^s(\mu, X) \times L^q(\mu, Y) \rightarrow [-\infty, \infty]$ where X and Y are separable B -spaces and μ is a finite positive regular complete measure. A necessary and sufficient condition is given on the integrand for the sequential lower semicontinuity of the integral with respect to the strong by weak topology on $L^s(\mu, X) \times L^q(\mu, Y)$.

Introduzione.

Sia G uno spazio topologico localmente compatto, σ -compatto e T_2 , e sia $\mathcal{B}(G)$ la classe dei borelliani di G .

Sia $\mu: \mathcal{L} \rightarrow [0, \infty)$ una misura completa e regolare, ove $\mathcal{L}$ denota una σ -algebra contenente $\mathcal{B}(G)$. Siano inoltre X e Y B -spazi separabili, Y riflessivo e Y^* strettamente convesso,

$$f: G \times X \times Y \rightarrow [-\infty, \infty]$$

una funzione misurabile in un senso un po' più generale della $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(X \times Y)$ misurabilità che sarà precisato nel § 0 tale che $f(t, \cdot, \cdot): X \times Y \rightarrow [-\infty, \infty]$ sia sequenzialmente semicontinua inferiormente (***) rispetto alla topologia prodotto della forte di X per la debole di Y per q.o. $t \in G$, e $f(t, x, \cdot): Y \rightarrow [-\infty, \infty]$ convessa per q.o. $t \in G$ e per ogni $x \in X$.

Dati $s \in [1, \infty)$, $q \in (1, \infty)$ sia infine $I: L^s(\mu, X) \times L^q(\mu, Y) \rightarrow [-\infty, \infty]$ tale che

$$I(x, y) = \begin{cases} \int_G f(t, x(t), y(t)) d\mu & \text{se } f(\cdot, x, y) \vee 0 \in L^1(\mu) \\ +\infty & \text{se } f(\cdot, x, y) \vee 0 \notin L^1(\mu) \end{cases}$$

Scopo del lavoro è quello di fornire una condizione necessaria e sufficiente per la

(*) Entrata in Redazione il 25 luglio 1979.

(**) Lavoro svolto nell'ambito del « Laboratorio per la matematica applicata » del C.N.R. presso l'Università di Genova.

(***) In tutto il seguito abbrevieremo con s.s.c.i.

sequenziale semicontinuità inferiore di I rispetto alla topologia prodotto della forte di $L^s(\mu, X)$ per la debole di $L^s(\mu, Y)$ più esplicita di quella trovata in [2] sfruttando le particolari proprietà del dominio di I e della sua topologia.

Il problema è già stato affrontato da IOFFE nel caso che le dimensioni di X e di Y siano finite [5].

Nel § 0 daremo alcune definizioni ed esporremo alcuni risultati preliminari.

Nel § 1 esporremo il risultato principale.

Desideriamo ringraziare il prof. J. P. CECCONI con cui abbiamo discusso la presente nota.

0. - Definizioni e preliminari.

0.0 DEFINIZIONE. - Siano $G, \mathfrak{L}, \mu$ come nell'introduzione e Z un B -spazio, indicheremo con $\mathcal{QB}(G \times Z) = \{E \subset G \times Z: \text{esiste } E' \in \mathcal{B}(G \times Z) \text{ per cui } p_\sigma(E \Delta E') \in \mathfrak{L} \text{ e } \mu(p_\sigma(E \Delta E')) = 0\}$ ove $p_\sigma: G \times Z \rightarrow G$ è tale che $p_\sigma(t, z) = t$, e $E \Delta E' = (E \setminus E') \cup (E' \setminus E)$. Come subito si verifica $\mathcal{QB}(G \times Z)$ risulta una σ -algebra e i suoi elementi sono detti quasi borelliani.

0.1 TEOREMA. - Siano $G, \mathfrak{L}, \mu$ come nell'introduzione, Z un B -spazio, allora è $\mathfrak{L} \otimes \mathcal{B}(Z) \subset \mathcal{QB}(G \times Z)$.

Basta provare che per ogni $A \in \mathfrak{L}$ e $B \in \mathcal{B}(Z)$ si ha $A \times B \in \mathcal{QB}(G \times Z)$, ed infatti dalla regolarità di μ e dalla σ -compattezza di G segue l'esistenza di A' di tipo F_σ , $A' \subset A$ tale che $\mu(A \setminus A') = 0$. allora $A' \times B \in \mathcal{B}(G \times Z)$ e $\mu(p_\sigma((A \times B) \Delta (A' \times B))) = \mu(p_\sigma((A \setminus A') \times B)) = \mu(A \setminus A') = 0$.

0.2 TEOREMA. - Siano $G, \mathfrak{L}, \mu$ come nell'introduzione, Z un B -spazio. Allora $E \in \mathcal{QB}(G \times Z)$ se e solo se esistono $E_1, E_2 \in \mathcal{B}(G \times Z)$ tali che $E_1 \subset E \subset E_2$, $p_\sigma(E \setminus E_1), p_\sigma(E_2 \setminus E) \in \mathfrak{L}$ e $\mu(p_\sigma(E \setminus E_1)) = \mu(p_\sigma(E_2 \setminus E)) = 0$.

Se $E \in \mathcal{QB}(G \times Z)$ sia $E' \in \mathcal{B}(G \times Z)$ tale che $\mu(p_\sigma(E \Delta E')) = 0$, per la regolarità di μ e la σ -compattezza di G , esiste $N \in \mathcal{B}(G)$ tale che $N \supset p_\sigma(E' \setminus E)$, $\mu(N) = 0$; poniamo allora $E_1 = E' \setminus (N \times Z)$.

Ovviamente $E_1 \subset E$ poichè, se $\eta \in E_1 \setminus E$, allora $\eta \in E' \setminus E$, e quindi $p_\sigma(\eta) \in p_\sigma(E' \setminus E) \subset N$, da cui $\eta \in N \times Z$ che è assurdo. Inoltre

$$\begin{aligned} E \setminus E_1 &= E \cap ((G \times Z) \setminus (E' \cap ((G \times Z) \setminus (N \times Z)))) = \\ &= E \cap (((G \times Z) \setminus E') \cup (N \times Z)) = (E \setminus E') \cup (E \cap (N \times Z)) \end{aligned}$$

da cui $p_\sigma(E \setminus E_1) \subset p_\sigma(E \setminus E') \cup p_\sigma(E \cap (N \times Z)) \subset p_\sigma(E \setminus E') \cup N$, onde $p_\sigma(E \setminus E') \in \mathfrak{L}$ e $\mu(p_\sigma(E \setminus E_1)) = 0$ poichè $\mu(p_\sigma(E \setminus E')) = \mu(N) = 0$. Poichè inoltre $(G \times Z) \setminus E \in \mathcal{QB}(G \times Z)$ esiste per il ragionamento precedente $E_3 \in \mathcal{B}(G \times Z)$ tale che $E_3 \subset (G \times Z) \setminus E$, $\mu(p_\sigma(((G \times Z) \setminus E) \setminus E_3)) = 0$; poniamo $E_2 = (G \times Z) \setminus E_3$. Allora $E_2 \supset E$, e poichè $E_2 \setminus E = (((G \times Z) \setminus E_3) \setminus E) = (G \times Z) \setminus (E_3 \cup E) = ((G \times Z) \setminus E) \setminus E_3$ si ha $\mu(p_\sigma(E_2 \setminus E)) = 0$. Il viceversa è ovvio.

0.3 TEOREMA. - Siano $G, \mathcal{L}, \mu$ come nell'introduzione, Z un B -spazio, allora $f: G \times Z \rightarrow [-\infty, \infty]$ è $\mathcal{Q}\mathcal{B}(G \times Z)$ -misurabile se e solo se esiste $G' \in \mathcal{B}(G)$, $G' \subset G$ tale che $\mu(G \setminus G') = 0$ e $h: G \times Z \rightarrow [-\infty, \infty]$ funzione $\mathcal{B}(G \times Z)$ -misurabile tale che $h|_{G' \times Z} = f|_{G' \times Z}$.

Se f è $\mathcal{Q}\mathcal{B}(G \times Z)$ -misurabile esistono $f_n: G \times Z \rightarrow [-\infty, \infty]$, $f_n \rightarrow f$ uniformemente su $(G \times Z) \setminus E_0$, ove $E_0 = \{(t, z) \in G \times Z: f(t, z) = \infty\}$, $f_n = \sum_{k \in N} \alpha_{nk} \chi_{E_{nk}}$, $E_{nk} \in \mathcal{Q}\mathcal{B}(G \times Z)$, $\alpha_{nk} \in [-\infty, \infty]$, $n, k \in N$, ed inoltre $f_n = f$ su E_0 . Per il teorema del n. 0.2 esistono $E'_0, E'_{nk} \in \mathcal{B}(G \times Z)$ tali che $E'_0 \subset E_0$, $E'_{nk} \subset E_{nk}$ e $\mu(p_G(E_0 \setminus E'_0)) = \mu(p_G(E_{nk} \setminus E'_{nk})) = 0$. Siano $g_n = \sum_{k \in N} \alpha_{nk} \chi_{E'_{nk}}$, $N_n = \bigcup_{k \in N} (E_{nk} \setminus E'_{nk})$, ancora per il teorema del n. 0.2 esistono $N''_n \in \mathcal{B}(G \times Z)$ tali che $N''_n \supset N_n$ e $\mu(p_G(N''_n \setminus N_n)) = 0$ da cui

$$\mu(p_G(N''_n)) = \mu(p_G(N''_n \setminus N_n) \cup p_G(N''_n \cap N_n)) = 0.$$

Allora se $h_n = \chi_{(G \times Z) \setminus \bigcup_{n \in N} N''_n} g_n$, h_n sono $\mathcal{B}(G \times Z)$ -misurabili, $h_n = f_n$ su $(G \times Z) \setminus \bigcup_{n \in N} N''_n$ e quindi $h_n \rightarrow h$ su $(G \times Z) \setminus E'_0$, $h_n = h$ su E'_0 , ove $h: G \times Z \rightarrow [-\infty, \infty]$, $h = f \chi_{(G \times Z) \setminus \bigcup_{n \in N} N''_n}$ risulta perciò $\mathcal{B}(G \times Z)$ -misurabile. Poichè

$$p_G\left(\bigcup_{n \in N} N''_n\right) \in \mathcal{L} \quad \text{e} \quad \mu\left(p_G\left(\bigcup_{n \in N} N''_n\right)\right) = 0$$

per la regolarità di μ e la σ -compattezza di G esiste $G_1 \in \mathcal{B}(G)$ tale che $G_1 \supset p_G\left(\bigcup_{n \in N} N''_n\right)$ e $\mu(G_1) = 0$. Poniamo allora $G' = G \setminus G_1$. Viceversa sia $a \in \mathbf{R}$, allora $f^{-1}((a, \infty]) = f|_{(G \setminus G') \times Z}^{-1}((a, \infty]) \cup f|_{G' \times Z}^{-1}((a, \infty]) = f|_{(G \setminus G') \times Z}^{-1}((a, \infty]) \cup h|_{G' \times Z}^{-1}((a, \infty])$ ove

$$h|_{G' \times Z}^{-1}((a, \infty]) \in \mathcal{B}(G \times Z) \quad \text{e} \quad f^{-1}((a, \infty]) \setminus h|_{G' \times Z}^{-1}((a, \infty]) = f|_{(G \setminus G') \times Z}^{-1}((a, \infty])$$

ove $p_G(f|_{(G \setminus G') \times Z}^{-1}((a, \infty])) \subset G \setminus G'$ e $\mu(G \setminus G') = 0$ da cui per la completezza di μ si ha $p_G(f|_{(G \setminus G') \times Z}^{-1}((a, \infty])) \in \mathcal{L}$ ed ha misura nulla.

0.4 TEOREMA. - Sia S un insieme, K uno spazio topologico sequenzialmente compatto e, per ogni $n \in N$, $A_n \subset S \times K$, $A_n \supset A_{n+1}$, allora se per ogni $s \in S$ l'insieme $A_n^s = \{y \in K: (s, y) \in A_n\}$ è chiuso risulta

$$p_S\left(\bigcap_{n \in N} A_n\right) = \bigcap_{n \in N} p_S(A_n).$$

È vera in generale l'inclusione del primo membro nel secondo; viceversa se $s \in \bigcap_{n \in N} p_S(A_n)$ per ogni $n \in N$ esistono $y_n \in A_n^s$, per cui vi è una estratta $(y_{n_k})_{k \in N}$ ed $y \in K$ tali che $y_{n_k} \rightarrow y$ per $k \rightarrow \infty$. Allora per la monotonia degli A_n segue che $y \in A_n^s$ per ogni $n \in N$ e quindi $(s, y) \in \bigcap_{n \in N} A_n$ ovvero $s \in p_S\left(\bigcap_{n \in N} A_n\right)$.

0.5 TEOREMA. — Sia S un insieme, K uno spazio topologico sequenzialmente compatto, e $A_n \subset S \times K$, $A_n \supset A_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora se $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\bar{A}_n^s \setminus A_n^s) = \emptyset$ per ogni $s \in S$, ove $A_n^s = \{y \in K: (s, y) \in A_n\}$, risulta

$$p_s\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} p_s(A_n).$$

Dal teorema del n. 0.4 si ha $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} p_s(A_n) = p_s\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{A}_n\right)$ ove $\tilde{A}_n = \{(s, y) \in S \times K, y \in \bar{A}_n^s\}$, ma $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{A}_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ in quanto $\tilde{A}_n = A_n \cup (\tilde{A}_n \setminus A_n)$ e $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\tilde{A}_n \setminus A_n) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{(s, y) \in S \times K: y \in \bar{A}_n^s \setminus A_n^s\} = \emptyset$.

0.6 COROLLARIO. — Siano $G, \mathcal{L}, \mu$ come nell'introduzione, Z un B -spazio, $f: G \times Z \rightarrow [-\infty, \infty]$ sia $\mathcal{Q}\mathcal{B}(G \times Z)$ -misurabile, $z: G \rightarrow Z$ sia $\mathcal{L}$ -misurabile allora $f(\cdot, z)$ risulta $\mathcal{L}$ -misurabile.

Segue dai teoremi dei nn. 0.1, 0.3, dal teorema del n. 0.5 di [2] e dalla completezza di μ .

0.7 TEOREMA. — Sia S uno spazio su cui è definita una σ -algebra Σ , Y un B -spazio separabile e $\Gamma: S \rightarrow 2^Y$ sia una applicazione. Allora:

I) se Γ è a valori chiusi e non vuoti sono equivalenti:

a) $\Gamma^{-1}(U) \in \Sigma$ per ogni insieme aperto U di Y .

b) Γ ammette selezioni misurabili $\sigma_n: S \rightarrow Y$ ($n \in \mathbb{N}$) tali che

$$\Gamma(t) = \overline{\{\sigma_n(t), n \in \mathbb{N}\}}.$$

II) se su Σ è definita una misura μ completa, $\text{gph } \Gamma \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(Y)$ e Γ è a valori non vuoti, esistono $\sigma_n: S \rightarrow Y$ $\sigma_n(t) \in \Gamma(t)$, Σ -misurabili ($n \in \mathbb{N}$) e tali che

$$\Gamma(t) \subset \overline{\{\sigma_n(t), n \in \mathbb{N}\}}.$$

V. [4], teorema 3.9 e teorema 3.22.

0.8 TEOREMA. — Sia Y B -spazio, A, B convessi non vuoti tali che $\overset{\circ}{B} \neq \emptyset$ e $A \cap \overset{\circ}{B} = \emptyset$. Allora esiste un iperpiano chiuso reale separante A e B .

V. [8], teorema 2.9.1.

0.9 TEOREMA. — Siano $G, \mathcal{L}, \mu$ come nell'introduzione, X e Y B -spazi separabili, $f: G \times X \times Y \rightarrow [-\infty, \infty]$ sia $\mathcal{Q}\mathcal{B}(G \times X \times Y)$ misurabile, e sia $f(t, \cdot, \cdot)$ s.s.e.i. rispetto alla topologia prodotto della forte di X per la debole di Y per q.o. $t \in G$. Allora

$$(t, x, p) \in G \times X \times Y^* \mapsto f(t, x, \cdot)^*(p) \in [-\infty, \infty]$$

risulta $\mathcal{QB}(G \times X \times Y^*)$ -misurabile (ove $f(t, x, \cdot)^*(p) = \sup \{ \langle p, y \rangle - f(t, x, y), y \in Y \}$ per ogni $(t, x, p) \in G \times X \times Y^*$ e $\langle, \rangle$ è la dualità fra Y e Y^*).

Applicando il teorema del n. 0.5 di [2] con G' del teorema del n. 0.3 al posto di G , si ottiene l'esistenza di K_n ($n \in \mathbf{N}$) compatti di G tali che $\mu(G \setminus K_n) < 1/n$ ed $f|_{K_n \times X \times Y}$ risulta s.s.c.i. rispetto alla topologia prodotto della indotta di K_n per la forte di X per la debole di Y . Sia $\Gamma: \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n \right) \times X \rightarrow 2^{Y \times \mathbf{R}}$, $\Gamma(t, x) = \text{epi } f(t, x, \cdot)$. Allora $\text{gph } \Gamma$ è un F_σ perchè si ha $\text{gph } \Gamma = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \{ (t, x, y, \alpha) \in K_n \times X \times Y \times \mathbf{R} : \alpha \geq f(t, x, y) \}$.

Se $A \subset Y \times \mathbf{R}$ è aperto, risulta che $\Gamma^-(A) = \left\{ (t, x) \in \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n \right) \times X : \Gamma(t, x) \cap A \neq \emptyset \right\}$ è un F_σ . Siano infatti $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ denso in $\mathbf{R}$, $\{y_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ denso in Y ed $S_j = \{ (y, \alpha) \in Y \times \mathbf{R} : d((y, \alpha), (y_j, \alpha_j)) \leq r_j \}$ se $d((y_j, \alpha_j), (Y \times \mathbf{R}) \setminus A) > 0$, altrimenti $S_j = \emptyset$, ove $r_j \in \mathbf{Q}$,

$$\frac{1}{2} d((y_j, \alpha_j), (Y \times \mathbf{R}) \setminus A) < r_j < d((y_j, \alpha_j), (Y \times \mathbf{R}) \setminus A),$$

essendo d la distanza in $Y \times \mathbf{R}$. Allora $\Gamma^-(A) = \bigcup_{(n,j) \in \mathbf{N}^2} \{ (t, x) \in K_n \times X : \Gamma(t, x) \cap S_j \neq \emptyset \}$ poichè $A = \bigcup_{j \in \mathbf{N}} S_j$; inoltre per ogni $(n, j) \in \mathbf{N}^2$ si ha che l'insieme $\{ (t, x) \in K_n \times X : \Gamma(t, x) \cap S_j \neq \emptyset \}$ è chiuso, infatti se $(t_k, x_k) \in K_n \times X$, $\Gamma(t_k, x_k) \cap S_j \neq \emptyset$ ($k \in \mathbf{N}$), $(t_k, x_k) \rightarrow (t, x)$, allora $(t, x) \in K_n \times X$, inoltre esistono $(y_k, \alpha_k) \in \Gamma(t_k, x_k) \cap S_j$, esiste dunque una estratta $(y_{k_r}, \alpha_{k_r}) \rightarrow (y, \alpha) \in S_j$ poichè S_j è convesso. Essendo $f|_{K_n \times X \times Y}$ s.s.c.i. si ha pure $\alpha \geq f(t, x, y)$, per cui $(y, \alpha) \in \Gamma(t, x)$.

Essendo Γ a valori chiusi, dal teorema del n. 0.7 applicato allo spazio misurabile $(S, \mathcal{B}(S))$, $S = \{ (t, x) \in \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n \right) \times X : \Gamma(t, x) \neq \emptyset \}$ ed al B -spazio separabile Y , esiste per ogni $n \in \mathbf{N}$ una selezione $\mathcal{B}(S)$ -misurabile $(\tau_n, \sigma_n): S \rightarrow Y \times \mathbf{R}$ tale che

$$\overline{\{ (\tau_n(t, x), \sigma_n(t, x)), n \in \mathbf{N} \}} = \Gamma(t, x)$$

per ogni $(t, x) \in S$, e $\sigma_n(t, x) \geq f(t, x, \tau_n(t, x))$. Se $(t, x) \in S$ si ha

$$f(t, x, \cdot)^*(p) = \sup \{ \langle p, \tau_n(t, x) \rangle - \sigma_n(t, x), n \in \mathbf{N} \}$$

infatti $\langle p, \tau_n(t, x) \rangle - \sigma_n(t, x) \leq \langle p, \tau_n(t, x) \rangle - f(t, x, \tau_n(t, x)) \leq f(t, x, \cdot)^*(p)$.

Inoltre se $\varepsilon > 0$ esiste $y_\varepsilon \in Y$ tale che $1/\varepsilon \wedge f(t, x, \cdot)^*(p) - \varepsilon < \langle p, y_\varepsilon \rangle - f(t, x, y_\varepsilon)$; per ogni $\eta > 0$ si ha $(y_\varepsilon, f(t, x, y_\varepsilon) \vee (-\eta)) \in \Gamma(t, x)$ per cui per ogni $n \in \mathbf{N}$ esiste (τ_n, σ_n) tale che $\tau_n(t, x) \rightarrow y_\varepsilon$ e $\sigma_n(t, x) \rightarrow f(t, x, y_\varepsilon) \vee (-\eta)$; allora esiste $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tale che $1/\varepsilon \wedge f(t, x, \cdot)^*(p) - \varepsilon < \langle p, \tau_n(t, x) \rangle - \sigma_n(t, x)$ se $n > n_\varepsilon$, da cui quanto affermato. Se $(t, x) \in \left(\left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n \right) \times X \right) \setminus S$ risulta $f(t, x, \cdot)^*(p) = -\infty$. Osservando che S è un F_σ poichè $S = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \{ (t, x) \in K_n \times X : \text{esiste } y \in Y, |y| \leq n, \text{ tale che } f(t, x, y) \leq n \}$ e $f(t, x, \cdot)$ è s.s.c.i. si conclude per il teorema del n. 0.3 in quanto

$$(t, x, p) \in S \times Y^* \mapsto f(t, x, \cdot)^*(p) \in [-\infty, \infty] \text{ è } \mathcal{B}(G \times X \times Y^*)\text{-misurabile}$$

e

$$(t, x, p) \in \left[\left(\bigcup_{n \in N} K_n \times X \right) \setminus \mathcal{S} \right] \times Y^* \mapsto f(t, x, \cdot)^*(p) \in [-\infty, \infty]$$

è $\mathcal{B}(G \times X \times Y^*)$ -misurabile.

0.10 DEFINIZIONE. - Sia Y un B -spazio riflessivo, le applicazioni $j_Y: Y \rightarrow 2^{Y^*}$ tale che $j_Y(y) = \{p \in Y^*: \langle y, p \rangle = |y|^2 = |p|^2\}$ e $j_{Y^*}: Y^* \rightarrow 2^Y$ tale che $j_{Y^*}(p) = \{y \in Y: \langle y, p \rangle = |y|^2 = |p|^2\}$ si chiamano mappe di dualità.

0.11 TEOREMA. - Sia Y B -spazio riflessivo, allora per ogni $p_0 \in Y$, $p_0 \neq 0$, ed $r \in [1, \infty)$ si ha:

$$j_{Y^*}(|p_0|^{r-2} p_0) = \partial \left(\frac{|\cdot|^r}{r} \right) (p_0)$$

ove j_{Y^*} è definita nel n. 0.10.

Se $r \in (1, \infty)$ esiste $q \in (1, \infty)$ tale che $r = q'$, allora se $y \in j_{Y^*}(|p_0|^{q'-2} p_0)$ allora $\langle y, p_0 \rangle = |p_0|^{q'}$ e $|y| = |p_0|^{q'-1}$ da cui per ogni $p \in Y^*$ si ha

$$\langle y, p - p_0 \rangle \leq |y|^q/q + |p|^{q'}/q' - |p_0|^{q'} = \frac{|p_0|^{(q'-1)q}}{q} + \frac{|p|^{q'}}{q'} - |p_0|^{q'} = \frac{|p|^{q'}}{q'} - \frac{|p_0|^{q'}}{q'}$$

da cui $y \in \partial(|\cdot|^{q'}/q')(p_0)$.

Viceversa se $y \in \partial(|\cdot|^{q'}/q')(p_0)$ si ha $\langle y, p - p_0 \rangle \leq |p|^{q'}/q' - |p_0|^{q'}/q'$ per ogni $p \in Y^*$; per $p = \lambda p_0$, $\lambda \in \mathbf{R}_+$, allora $(\lambda - 1) \langle y, p_0 \rangle \leq (\lambda^{q'} - 1)(|p_0|^{q'}/q')$ da cui

$$\langle y, p_0 \rangle \leq (|p_0|^{q'}/q') \lim_{\lambda \rightarrow 1^+} (\lambda^{q'} - 1)/(\lambda - 1) = |p_0|^{q'},$$

$$\langle y, p_0 \rangle \geq (|p_0|^{q'}/q') \lim_{\lambda \rightarrow 1^-} (\lambda^{q'} - 1)/(\lambda - 1) = |p_0|^{q'}$$

onde $\langle y, p_0 \rangle = |p_0|^{q'}$, per cui $|y| \geq |p_0|^{q'-1}$. Inoltre se $p \in j_Y(|y|^{q-2} y)$ si ha

$$\langle y, p \rangle - \frac{|p|^{q'}}{q'} = |y|^q - \frac{|y|^{(q-1)q'}}{q'} = \frac{|y|^q}{q}.$$

Allora

$$\frac{|y|^q}{q} \leq \langle y, p_0 \rangle - \frac{|p_0|^{q'}}{q'} = \frac{|p_0|^{q'}}{q}$$

da cui $|y| \leq |p_0|^{q'/q} = |p_0|^{q'-1}$; quindi $|y| = |p_0|^{q'-1}$ e $\langle y, p_0 \rangle = |p_0|^{q'}$, da cui $y \in j_{Y^*}(|p_0|^{q'-2} p_0)$.

Se $y \in j_{Y^*}(|p_0|^{q'-2} p_0)$ allora $\langle y, p_0 \rangle = |p_0|^{q'}$, $|y| = |p_0|^{q'-1}$, da cui $|p| - |p_0| \geq \langle y, p \rangle - |p_0| = \langle y, p - p_0 \rangle$ cioè $y \in \partial(|\cdot|)(p_0)$.

Viceversa se $y \in \partial(|\cdot|)(p_0)$, allora $|p| - |p_0| \geq \langle y, p - p_0 \rangle$ per ogni $p \in Y^*$. Pren-

dendo $p = \lambda p_0$, $\lambda \in \mathbf{R}_+$, si ha $(\lambda - 1)|p_0| \geq (\lambda - 1)\langle y, p_0 \rangle$, da cui dividendo per $\lambda - 1$ con $\lambda > 1$ e $\lambda < 1$ si ottiene $|p_0| = \langle y, p_0 \rangle$; inoltre $|p_0| \leq |y||p_0|$ da cui $|y| \geq 1$, allora $|p| - |p_0| \geq \langle y, p \rangle - |p_0|$ per ogni $p \in Y^*$, per cui $|p| \geq \langle y, p \rangle$ per ogni $p \in Y^*$. Ne segue $|y| \leq 1$ e quindi $|y| = 1$, allora $y \in j_{Y^*}(p_0/|p_0|)$.

0.12 TEOREMA. - Sia Y un B -spazio, $g: Y \rightarrow (-\infty, \infty]$ funzione propria e convessa, sia $h: Y \rightarrow (-\infty, \infty]$ convessa, $y_0 \in Y$ tale che $g(y_0) \leq g(y)$ per ogni $y \in Y$ per cui $h(y) \leq 0$. Allora esiste $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ tale che $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$, $\lambda\mu \neq 0$ e $\lambda g(y_0) \leq \lambda g(y) + \mu h(y)$ per ogni $y \in \text{dom } g \cap \text{dom } h$; inoltre $\mu h(y_0) = 0$.

La dimostrazione è del tutto analoga a quella in [1] cap. 3 teor. 1.1.

0.13 TEOREMA. - Siano Y B -spazio riflessivo, $g, h: Y \rightarrow (-\infty, \infty]$ s.s.e.i. proprie e convesse e $\text{dom } g \cap (\text{dom } h)^0 \neq \emptyset$. Allora si ha:

- i) $\partial(g + h) = \partial g + \partial h$;
- ii) $y \in \partial g^*(y^*)$ se e solo se $g(y) + g^*(y^*) = \langle y, y^* \rangle$ se e solo se $y^* \in \partial g(y)$;
- iii) $\sup \left\{ \frac{g(y_0 + \lambda y) - g(y_0)}{\lambda} : \lambda \in \mathbf{R}_+ \right\} = \sup \{ \langle y, p \rangle : p \in \text{dom } g^* \}$
per ogni $y_0 \in \text{dom } g$.

V. [1] cap. 2 coroll. 2.5 e prop. 2.1, e [7] coroll. 3c.

0.14 TEOREMA. - Siano $G, \mathcal{L}, \mu$ come nell'introduzione, X, Y B -spazi separabili, $s, q \in [1, \infty)$, $h: G \rightarrow Y$ sia $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}(X)$ -misurabile e tale che $h(\cdot, x) \in L^q(\mu, Y)$ per ogni $x \in L^s(\mu, X)$, allora esistono $c \in \mathbf{R}_+$, $b \in L^1(\mu)$ tali che

$$|h(t, x)|^q \leq c|x|^p + b(t) \quad \text{per ogni } (t, x) \in G \times X.$$

V. [6], teorema 3.1.

1. - Caratterizzazione della sequenziale semicontinuità inferiore del funzionale.

1.0 DEFINIZIONE. - Sia Y B -spazio, $g: Y \rightarrow (-\infty, \infty]$ convessa e $q \in (1, \infty)$ tale che $g(y) \geq -|y|^q/q$ per ogni $y \in Y$. Definiamo $\Pi(g) = \{p \in Y^* : \text{esiste } \beta_p \in \mathbf{R} \text{ per cui } g(y) \geq \langle y, p \rangle + \beta_p \geq -|y|^q/q \text{ per ogni } y \in Y\}$.

1.1 TEOREMA. - Siano $Y, g, \Pi(g)$ come nella definizione del n. 1.0, allora $\Pi(g) \neq \emptyset$ e $p \in \Pi(g)$ se e solo se $|p|^{q'}/q' + g^*(p) \leq 0$.

Consideriamo $A = \{(y, \alpha) \in Y \times \mathbf{R} : \alpha \geq g(y)\}$, $B = \{(y, \alpha) \in Y \times \mathbf{R} : \alpha \leq -|y|^q/q\}$. Allora A e B risultano convessi e non vuoti, e B ha interno non vuoto che non interseca A . Esistono allora, per il teorema del n. 0.8, $v \in Y^*$, $\gamma, \delta \in \mathbf{R}$ con $\gamma \cdot v \neq 0$ tali che $\langle y, v \rangle + g(y)\gamma \geq \delta \geq \langle y, v \rangle - (|y|^q/q)\gamma$ per ogni $y \in Y$, allora è $\gamma \geq (q/|y|^q)\langle y, v \rangle - q\delta/|y|^q$ per ogni $y \neq 0$. Da ciò segue, per $|y| \rightarrow \infty$ che $\gamma \geq 0$; d'altra parte, non po-

tendo essere $\gamma = 0$ perchè altrimenti si avrebbe $\delta \geq \langle y, v \rangle$ per ogni $y \in Y$ che è impossibile in quanto $v \neq 0$, risulta che $-v/g \in \Pi(g)$ con $\beta_{-v/g} = \delta/\gamma$. Supponendo che $|p|^{q'}/q' + g^*(p) \leq 0$ segue che $|p|^{q'}/q' + \langle y, p \rangle - g(y) \leq 0$ per ogni $y \in Y$, da cui $p \in \Pi(g)$ con $\beta_p = |p|^{q'}/q'$ in quanto per la disuguaglianza di Young si ha $|p|^{q'}/q' + |y|^q/q \geq |p||y| \geq \langle y, p \rangle$ per ogni $p \in Y^*$, $y \in Y$. Viceversa se $p \in \Pi(g)$ si ha $\beta_p \geq -\langle y, p \rangle - |y|^q/q$ da cui $\beta_p \geq |p|^{q'}/q'$; allora è $-|p|^{q'}/q' \geq \langle y, p \rangle - g(y)$ per ogni $y \in Y$, onde $-|p|^{q'}/q' \geq g^*(p)$.

1.2 TEOREMA. - Siano Y , g e $\Pi(g)$ come nella definizione del n. 1.0, allora $\Pi(g)$ risulta chiuso e convesso e se $g \neq \infty$ anche limitato.

Dal teorema del n. 1.1 $\Pi(g)$ risulta chiuso e convesso. Se $\Pi(g)$ è non limitato inoltre esistono $p_n \in \Pi(g)$ tali che $|p_n| \rightarrow \infty$, allora dal teorema del n. 1.1 si ha $|p_n|^{q'}/q' + \langle y, p_n \rangle \leq g(y)$ per ogni $y \in Y$ ed ogni $n \in \mathbb{N}$, e quindi $g(y) \geq |p_n|(|p_n|^{q'-1}/q' - |y|)$ per ogni $y \in Y$ ed $n \in \mathbb{N}$, da cui $g = \infty$ su Y .

1.3 DEFINIZIONE. - Siano Y , g e $\Pi(g)$ come nella definizione del n. 1.0, inoltre supponiamo Y strettamente convesso, allora denoteremo con $\pi(g)$ l'unico vettore di Y^* tale che $|\pi(g)| = \min \{|p|, p \in \Pi(g)\}$.

1.4 TEOREMA. - Siano Y , g e $\pi(g)$ come nella definizione del n. 1.3, inoltre g sia s.s.c.i., allora se $\pi(g) \neq 0$ esiste $y_0 \in Y$ tale che

$$g(y_0) \leq \frac{1 - \sqrt{q'}}{q'} |\pi(g)| |y_0|, \quad |y_0|^q \geq |\pi(g)|^{q'}.$$

Basta dimostrare che esiste $y_0 \in Y$ tale che

$$|y_0| \geq |\pi(g)|^{q'-1}, \quad g(y_0) \leq -(q')^{-\frac{1}{q'}} |\pi(g)| |y_0| + \frac{|\pi(g)|^{q'}}{q'}.$$

Dal teorema del n. 0.12 segue l'esistenza di $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$, $\lambda\mu \neq 0$ tale che $\lambda|\pi(g)| \leq \lambda|p| + \mu(|p|^{q'}/q' + g^*(p))$ per ogni $p \in \text{dom } g^*$, $\mu(|\pi(g)|^{q'}/q' + g^*(\pi(g))) = 0$. Se $\mu > 0$ allora $0 \in \partial(\lambda|\cdot| + \mu(|\cdot|^{q'}/q' + g^*))(\pi(g))$, $|\pi(g)|^{q'}/q' + g^*(\pi(g)) = 0$ e non è restrittivo supporre $\mu = 1$. Poichè $\pi(g) \neq 0$ allora $g \neq \infty$ e quindi essendo $|\cdot|$ e $|\cdot|^{q'}/q'$ continue, per il teorema del n. 0.13 esiste $y_0 \in -\partial(|\cdot|^{q'}/q' + \lambda|\cdot|)(\pi(g))$, $y_0 \in \partial g^*(\pi(g))$.

Nelle notazioni della definizione del n. 0.10 per i teoremi dei nn. 0.11, 0.13 si ha

$$\begin{aligned} y_0 \in j_{Y^*} \left(-\frac{\lambda\pi(g)}{|\pi(g)|} \right) + j_{Y^*}(-|\pi(g)|^{q'-2}\pi(g)) &= -\left(\frac{\lambda}{|\pi(g)|} + |\pi(g)|^{q'-2} \right) j_{Y^*}(\pi(g)) = \\ &= j_{Y^*} \left(-\frac{\lambda\pi(g)}{|\pi(g)|} - |\pi(g)|^{q'-2}\pi(g) \right), \end{aligned}$$

allora

$$-\langle y_0, \pi(g) \rangle = |y_0|^2 (|\pi(g)|^{q'-2} + \lambda/|\pi(g)|)^{-1} = (|\pi(g)|^{q'-2} + \lambda/|\pi(g)|) |\pi(g)|^2 = |y_0| |\pi(g)|.$$

Dal teorema del n. 0.13 si ha $g(y_0) + g^*(\pi(g)) = \langle y_0, \pi(g) \rangle = -|y_0||\pi(g)|$ da cui

$$g(y_0) = -|y_0||\pi(g)| + \frac{|\pi(g)|^{q'}}{q'} \leq - (q')^{-\frac{1}{q'}} |y_0||\pi(g)| + \frac{|\pi(g)|^{q'}}{q'},$$

inoltre $|y_0| = \lambda + |\pi(g)|^{q'-1} \geq |\pi(g)|^{q'-1}$.

Se $\mu = 0$ allora $|\pi(g)| \leq |p|$ per ogni $p \in \text{dom } g^*$ e quindi per ogni $p \in \overline{\text{dom } g^*}$, ovvero $0 \in \partial(|\cdot| + I_{\overline{\text{dom } g^*}})$ (ove I_C è la funzione indicatrice del convesso C). Ancora per i teoremi dei nn. 0.11, 0.13 esiste $y_1 \in j_{\pi^*}(\pi(g)/|\pi(g)|)$ tale che $\langle y_1, p - \pi(g) \rangle \geq 0$ per ogni $p \in \overline{\text{dom } g^*}$. Poichè $\pi(g) \neq 0$, g non è identicamente infinita, per cui dal teorema del n. 0.13 per ogni $y \in \text{dom } g$ si ha

$$\sup \left\{ \frac{g(y - \lambda y_1) - g(y)}{\lambda}, \lambda \in \mathbf{R}_+ \right\} = \sup \{ -\langle y_1, p \rangle, p \in \text{dom } g^* \}$$

e quindi per ogni $\lambda > 0$ e per ogni $y \in \text{dom } g$ risulta

$$g(y - \lambda y_1) \leq g(y) + \sup \{ -\langle \lambda y_1, p \rangle, p \in \text{dom } g^* \} \leq g(y) - \lambda \langle y_1, \pi(g) \rangle = g(y) - \lambda |\pi(g)|$$

essendo $\langle y_1, \pi(g) \rangle = |\pi(g)|$; d'altronde essendo $q' > 1$ si ha, per λ sufficientemente grande,

$$g(y) - \lambda |\pi(g)| \leq - (q')^{-\frac{1}{q'}} |\pi(g)| (|y| + \lambda) + \frac{|\pi(g)|^{q'}}{q'} \leq - (q')^{-\frac{1}{q'}} |\pi(g)| |y - \lambda y_1| + \frac{|\pi(g)|^{q'}}{q'}$$

essendo $|y_1| = 1$. Infine, sempre per λ opportunamente grande, si ha $|y - \lambda y_1| \geq |\pi(g)|^{q'-1}$, da cui la tesi per $y_0 = y - \lambda y_1$.

1.5 TEOREMA. - Siano $G, \mathcal{E}, \mu, X, Y$ come nell'introduzione, π come nella definizione del n. 1.3, $q \in (1, \infty)$, $g: G \times X \times Y \rightarrow (-\infty, \infty]$ $\mathcal{Q}\mathcal{B}(G \times X \times Y)$ -misurabile, $g(t, \cdot, \cdot)$ s.s.c.i. rispetto alla topologia prodotto della forte di X per la debole di Y per q.o. $t \in G$, $g(t, x, \cdot)$ convessa per q.o. $t \in G$ ed ogni $x \in X$, inoltre $g(t, x, y) \geq -|y|^q/q$ per q.o. $t \in G$ ed ogni $(x, y) \in X \times Y$. Posto $p(t, x) = \pi(g(t, x, \cdot))$ allora $p: G \times X \rightarrow Y$ risulta $\mathcal{Q}\mathcal{B}(G \times X)$ -misurabile.

Siano K_n come nel teorema del n. 0.5 di [2], che è applicabile e g grazie ai teoremi dei nn. 0.3, 0.1, per cui $\mu(G \setminus K_n) < 1/n$ e $g|_{K_n \times X \times Y}$ risulta s.s.c.i. rispetto alla topologia prodotto della indotta di K_n per la forte di X per la debole di Y , per cui non è restrittivo supporre che i K_n costituiscano una successione crescente e se $t \in \bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n$ allora $g(t, x, \cdot)$ sia convessa per ogni $x \in X$.

Sia $V = \left\{ (t, x, p) \in \bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n \times X \times Y^*: g(t, x, \cdot)^*(p) + |p|^q/q' \leq 0 \right\}$, dalla dimostrazione del n. 0.9 risulta $V \in \mathcal{B}(G \times X \times Y^*)$.

Sia inoltre S un insieme debolmente sequenzialmente compatto in Y^* e

$$V_{nS} = \left\{ (t, x, p) \in K_n \times X \times S: g(t, x, \cdot)^*(p) + \frac{|p|^{q'}}{q'} \leq 0 \right\}.$$

Ora $V_{nS} = \bigcap_{(k,N) \in N^2} V_{nkNS}$ ove $V_{nkNS} = \{(t, x, p) \in K_n \times X \times S : g(t, x, y) + 1/k > \langle p, y \rangle + |p|^{q'}/q' \text{ per } |y| \leq N\}$. Dal teorema del n. 0.5 poichè, con le stesse notazioni, se $(t, x) \in K_n \times X$ si ha $\overline{V_{nkNS}^{(t,x)}} \setminus V_{nkNS}^{(t,x)} \subset \{p \in S : \text{esiste } y_{kN} \in Y, |y_{kN}| \leq N, g(t, x, y_{kN}) + 1/k = \langle y_{kN}, p \rangle + |p|^{q'}/q', g(t, x, y) + 1/k \geq \langle y, p \rangle + |p|^{q'}/q' \text{ per } |y| \leq N\}$ e per $N \in N$ $\bigcup_{r \in N} \bigcap_{k \geq r} (\overline{V_{nkNS}^{(t,x)}} \setminus V_{nkNS}^{(t,x)}) = \emptyset$ perchè se $p \in \overline{V_{nkNS}^{(t,x)}} \setminus V_{nkNS}^{(t,x)}$ esiste $y_{kN} \in Y$ tale che $|y_{kN}| \leq N$ e $g(t, x, y_{kN}) + 1/k = \langle y_{kN}, p \rangle + |p|^{q'}/q'$, mentre se $p \in \overline{V_{n,k+1,NS}^{(t,x)}} \setminus V_{n,k+1,NS}^{(t,x)}$ è $g(t, x, y) + 1/(k+1) \geq \langle y, p \rangle + |p|^{q'}/q'$ per $|y| \leq N+1$. Dal teorema del n. 0.5 si ha dunque che $p_{G \times X}(V_{nS}) = \bigcap_{(k,N) \in N^2} p_{G \times X}(V_{nkNS})$, inoltre $p_{G \times X}(V_{nkNS})$ è aperto in $K_n \times X$, infatti se $(t_j, x_j) \in (K_n \times X) \setminus p_{G \times X}(V_{nkNS})$, $(t_j, x_j) \rightarrow (t, x) \in K_n \times X$, per ogni $p \in S$ esiste $y_{pj} \in Y$, $|y_{pj}| \leq N$ tale che $g(t_j, x_j, y_{pj}) + 1/k \leq \langle y_{pj}, p \rangle + |p|^{q'}/q'$, esiste allora un'estratta $y_{pj_r} \rightarrow y_p$, $|y_p| \leq N$ tale che $g(t, x, y_p) + 1/k \leq \langle y_p, p \rangle + |p|^{q'}/q'$ grazie alla suddetta semicontinuità di $g|_{K_n \times X \times Y}$, e da ciò si ha che $(t, x) \notin p_{G \times X}(V_{nkNS})$.

Dunque $p_{G \times X}(V_{nS}) \in \mathcal{B}(G \times Y)$. Consideriamo ora

$$P: \left(\bigcup_{n \in N} K_n \right) \times X \rightarrow 2^{Y^*}, \quad P(t, x) = \Pi(g(t, x, \cdot)) = \left\{ p \in Y^* : g(t, x, \cdot)^*(p) + \frac{|p|^{q'}}{q'} \leq 0 \right\}$$

ed A aperto di Y^* . Allora

$$P^-(A) = \left\{ (t, x) \in \left(\bigcup_{n \in N} K_n \right) \times X : P(t, x) \cap A \neq \emptyset \right\} = \bigcup_{(n,i) \in N^2} \{(t, x) \in K_n \times X : P(t, x) \cap S_i \neq \emptyset\}$$

ove S_i sono sfere chiuse contenute in A tali che $\bigcup_{i \in N} S_i = A$. D'altronde risulta

$$\{(t, x) \in K_n \times X : P(t, x) \cap S_i \neq \emptyset\} = p_{G \times X} \left(\left\{ (t, x, p) \in K_n \times X \times S_i : g(t, x, \cdot)^*(p) + \frac{|p|^{q'}}{q'} \leq 0 \right\} \right) = p_{G \times X}(V_{nS_i}) \in \mathcal{B}(G \times X)$$

e quindi anche $P^-(A) \in \mathcal{B}(G \times X)$. Allora dal teorema del n. 0.7, essendo P a valori chiusi per la inferiore semicontinuità di $g(t, x, \cdot)$, esistono $p_r: \left(\bigcup_{n \in N} K_n \right) \times X \rightarrow Y^*$

$\mathcal{B}(G \times X)$ misurabili tali che $\overline{\{p_r(t, x), r \in N\}} = P(t, x)$ per ogni $(t, x) \in \left(\bigcup_{n \in N} K_n \right) \times X$

Allora se $\gamma: \left(\bigcup_{n \in N} K_n \right) \times X \times Y^* \rightarrow [0, \infty]$, $\gamma(t, x, p) = I_{P(t, x)}(p) + \frac{1}{2}|p|^2$, si ha

$$\gamma(t, x, \cdot)^*(y) = \sup \{ \langle y, p \rangle - \frac{1}{2}|p|^2, p \in P(t, x) \} = \sup \{ \langle y, p_r(t, x) \rangle - \frac{1}{2}|p_r(t, x)|^2, r \in N \}.$$

Quindi γ^* è $\mathcal{B}\left(\left(\bigcup_{n \in N} K_n\right) \times X \times Y\right)$ misurabile, e proviamo che per ogni $(t, x, y) \in \left(\bigcup_{n \in N} K_n\right) \times X \times Y$ si ha $\langle y, p(t, x) \rangle = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda^{-1}(\gamma(t, x, \cdot)^*(\lambda y) - \gamma(t, x, \cdot)^*(0))$.

Intanto per definizione $0 \in \partial \gamma(t, x, \cdot)^*(p(t, x))$ e, per il teorema del n. 0.13, si ha $p(t, x) \in \partial \gamma(t, x, \cdot)^*(0)$ da cui

$$\langle y, p(t, x) \rangle \leq \liminf_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda^{-1}(\gamma(t, x, \cdot)^*(\lambda y) - \gamma(t, x, \cdot)^*(0)).$$

Inoltre per ogni $y \in Y$ e $\lambda > 0$ esiste $p_\lambda \in P(t, x)$ tale che $\gamma(t, x, \cdot)^*(\lambda y) = \langle \lambda y, p_\lambda \rangle - \frac{1}{2}|p_\lambda|^2$ e quindi

$$\begin{aligned} \liminf_{\lambda \rightarrow 0^+} (\langle y, p(t, x) \rangle - \lambda^{-1}(\gamma(t, x, \cdot)^*(\lambda y) - \gamma(t, x, \cdot)^*(0))) &= \\ &= \liminf_{\lambda \rightarrow 0^+} \left(\langle y, p(t, x) \rangle - \langle y, p_\lambda \rangle + \frac{1}{2\lambda} |p_\lambda|^2 - \frac{1}{2\lambda} |p(t, x)|^2 \right) = \\ &= \liminf_{\lambda \rightarrow 0^+} \left(\langle y, p(t, x) - p_\lambda \rangle + \frac{1}{2\lambda} (|p_\lambda|^2 - |p(t, x)|^2) \right) \geq \liminf_{\lambda \rightarrow 0^+} \langle y, p(t, x) - p_\lambda \rangle \end{aligned}$$

perchè $p_\lambda \in P(t, x)$; d'altra parte $p_\lambda \rightarrow p(t, x)$ perchè $\frac{1}{2}|p_\lambda|^2 - \lambda \langle y, p_\lambda \rangle \leq \frac{1}{2}|p|^2 - \langle \lambda y, p \rangle$ per ogni $p \in P(t, x)$, da cui se $\lambda \in (0, 1]$ risulta $\frac{1}{2}|p_\lambda|^2 \leq |y||p_\lambda| + \frac{1}{2}|\bar{p}|^2 + |y||\bar{p}|$ essendo $\bar{p} \in P(t, x)$, da cui si deduce che $\{p_\lambda, \lambda \in (0, 1]\}$ è un insieme limitato, e quindi esiste $p_{\lambda_r} \rightarrow \tilde{p} \in P(t, x)$ per il teorema del n. 1.2. Allora $\frac{1}{2}|\tilde{p}|^2 \leq \frac{1}{2}|p|^2$ per ogni $p \in P(t, x)$, e quindi $\tilde{p} = p(t, x)$ perchè Y^* è strettamente convesso. Ne segue che $\langle y, p(t, x) \rangle \geq \limsup_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda^{-1}(\gamma(t, x, \cdot)^*(\lambda y) - \gamma(t, x, \cdot)^*(0))$. Allora $p|_{(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n) \times X}$ risulta debolmente $\mathcal{B}((\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n) \times X)$ -misurabile e essendo Y^* separabile anche $\mathcal{B}((\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n) \times X)$ -misurabile, e la conclusione segue dal teorema del n. 0.3.

1.6 TEOREMA. - Siano $G, \mathbb{L}, \mu, X, Y, s, q$ come nell'introduzione, $f: G \times X \times Y \rightarrow [-\infty, \infty] \mathcal{Q}\mathcal{B}(G \times X \times Y)$ -misurabile, $f(t, \cdot, \cdot)$ s.s.c.i. rispetto alla topologia prodotto della forte di X per la debole di Y per q.o. $t \in G$, $f(t, x, \cdot)$ convessa per q.o. $t \in G$ ed ogni $x \in X$; sia inoltre I come nell'introduzione, e supponiamo che esista $(x_0, y_0) \in L^s(\mu, X) \times L^q(\mu, Y)$ tale che $I(x_0, y_0) \in \mathbf{R}$. Allora I è s.s.c.i. rispetto alla topologia prodotto della forte di $L^s(\mu, X)$ per la debole di $L^q(\mu, Y)$ se e solo se esistono $\bar{p}: G \times X \rightarrow Y^*$ $\mathcal{Q}\mathcal{B}(G \times X)$ -misurabile, $c \in \mathbf{R}_+$ e $b \in L^1(\mu)$ tali che

- i) $f(t, x, y) \geq \langle y, \bar{p}(t, x) \rangle - c|x|^s + b(t)$ per ogni $(t, x, y) \in G \times X \times Y$;
- ii) per ogni $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergente in $L^s(\mu, X)$, per cui esiste $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ debolmente convergente in $L^q(\mu, Y)$ ed $a \in \mathbf{R}$ tale che $I(x_k, y_k) \leq a$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, risulta $\{|\bar{p}(\cdot, x_k)|^{q'}, k \in \mathbb{N}\}$ debolmente relativamente compatto in $L^1(\mu)$.

La sufficienza segue da [2] in quanto dalle i), ii) si ottiene la condizione di compattezza inferiore [2] per f .

Per la necessità ricordiamo che dal teorema del n. 1.7 di [3], utilizzabile grazie al teorema del n. 0.3 segue la esistenza di $c \in \mathbf{R}_+$ e $b \in L^1(\mu)$ tali che $f(t, x, y) \geq -c(|x|^s + |y|^q) + b(t)$ per ogni $(t, x, y) \in G \times X \times Y$. Posto

$$g(t, x, y) = \begin{cases} \frac{1}{qc} (f(t, x, y) - b(t)) + \frac{|x|^s}{q} & \text{se } f(t, x, y) > -\infty \text{ e } b(t) < \infty \\ \frac{|x|^s}{q} & \text{se } f(t, x, y) = -\infty \text{ oppure } b(t) = \infty \end{cases}$$

risulta che $g: G \times X \times Y \rightarrow (-\infty, \infty]$ è $\mathcal{Q}\mathcal{B}(G \times X \times Y)$ -misurabile e $g(t, x, y) \geq -|y|^q/q$ per ogni $(t, x, y) \in G \times X \times Y$, inoltre $g(t, \cdot, \cdot)$ è s.s.c.i. rispetto alla topologia prodotto della forte di X per la debole di Y per q.o. $t \in G$, e $g(t, x, \cdot)$ convessa per q.o. $t \in G$ ed ogni $x \in X$. Posto $J: L^s(\mu, X) \times L^q(\mu, Y) \rightarrow [-\infty, \infty]$,

$$J(x, y) = \begin{cases} \int_G g(t, x(t), y(t)) d\mu & \text{se } g(\cdot, x, y) \vee 0 \in L^1(\mu), \\ \infty & \text{se } g(\cdot, x, y) \vee 0 \notin L^1(\mu) \end{cases}$$

J risulta s.s.c.i. rispetto alla topologia prodotto della forte di $L^s(\mu, X)$ per la debole di $L^q(\mu, Y)$ perchè tale è I , e se $(x_k, y_k) \in L^s(\mu, X) \times L^q(\mu, Y)$ e $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è convergente in $L^s(\mu, X)$ allora $\{J(x_k, y_k), k \in \mathbb{N}\}$ è superiormente limitato se e solo se $\{I(x_k, y_k), k \in \mathbb{N}\}$ è superiormente limitato. Sia p associato a g come nel teorema del n. 1.5, allora dallo stesso teorema segue che p è $\mathcal{Q}\mathcal{B}(G \times X)$ -misurabile, mentre per la stessa definizione di p segue che

$$g(t, x, y) \geq \langle y, p(t, x) \rangle + \frac{|p(t, x)|^{q'}}{q'} \geq \langle y, p(t, x) \rangle.$$

Allora la condizione i) è verificata mediante la funzione $\bar{p}(t, x) = cqp(t, x)$. Per concludere basta allora provare la ii) con la funzione p e J al posto di I . Considerando allora $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergente in $L^s(\mu, X)$, $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ debolmente convergente in $L^q(\mu, Y)$, $a \in \mathbb{R}$ tale che $J(x_k, y_k) \leq a$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, tenendo conto del teorema del n. 0.3 di [2] basta provare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che per ogni $E \in \mathcal{L}$ con $\mu(E) < \delta_\varepsilon$, e per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $\int_E |p(t, x_k(t))|^{q'} d\mu < \varepsilon$. Supponendo il contrario vi sarebbe $\varepsilon_0 > 0$ e $T_k \in \mathcal{L}$, $k \in \mathbb{N}$, per cui $\mu(T_k) \rightarrow 0$ e $\int_{T_k} |p(t, x_k(t))|^{q'} d\mu \geq \varepsilon_0$; inoltre non è restrittivo supporre $p(t, x_k(t)) \neq 0$ per $t \in T_k$, $k \in \mathbb{N}$, e, in base al teorema del n. 0.3, $T_k \subset G'$ ove $G' \in \mathcal{B}(G)$, $\mu(G \setminus G') = 0$, $p|_{G' \times X}$ è $\mathcal{B}(G' \times X)$ -misurabile e $g|_{G' \times X \times Y}$ è $\mathcal{B}(G' \times X \times Y)$ -misurabile. Sia allora $B_k: T_k \rightarrow 2^Y$, $k \in \mathbb{N}$, tale che

$$B_k(t) = \left\{ y \in Y: g(t, x_k(t), y) \leq \frac{1 - \sqrt{q'}}{q'} |p(t, x_k(t))| |y|, |y|^q \geq |p(t, x_k(t))|^{q'} \right\}.$$

$B_k(t)$ è chiuso (fortemente) in Y , è non vuoto per il teorema del n. 1.4, inoltre poichè $\text{gph } B_k \in \mathcal{L}|_{T_k} \otimes \mathcal{B}(Y)$, per il teorema del n. 0.7 esistono $\sigma_k: T_k \rightarrow Y$ funzioni $\mathcal{L}|_{T_k}$ misurabili e tali che

$$g(t, x_k(t), \sigma_k(t)) \leq \frac{1 - \sqrt{q'}}{q'} |p(t, x_k(t))| |\sigma_k(t)|, \quad |\sigma_k(t)|^q \geq |p(t, x_k(t))|^{q'} \quad \text{per } t \in T_k.$$

Se $N \in \mathbb{N}$ poniamo ora

$$T_{kN} = \{t \in T_k: |\sigma_k(t)|^q \leq N |p(t, x_k(t))|^{q'}\},$$

$$F_{kN} = \int_{T_{kN}} |\sigma_k(t)|^q d\mu + N^{1/q} \int_{T_k \setminus T_{kN}} |p(t, x_k(t))|^{q'} d\mu.$$

Supponiamo dapprima che $\sup_{N \in \mathbf{N}} \liminf_k F_{kN} < \infty$, allora esiste $b \in \mathbf{R}$ tale che per ogni $N \in \mathbf{N}$ sia $\liminf_k F_{kN} \leq b$. Sia $N_0 \in \mathbf{N}$ tale che $b/N_0^{1/q} < \varepsilon_0/2$, allora esiste una estratta $(k_r)_{r \in \mathbf{N}}$ tale che $F_{k_r N_0} \leq b$ per ogni $r \in \mathbf{N}$. Allora si ha

$$\int_{T_{k_r N_0}} |\sigma_{k_r}(t)|^q d\mu \leq b, \\ \int_{T_{k_r N_0}} |p(t, x_{k_r}(t))|^{q'} d\mu = \int_{T_{k_r}} |p(t, x_{k_r}(t))|^{q'} d\mu - \int_{T_{k_r} \setminus T_{k_r N_0}} |p(t, x_{k_r}(t))|^{q'} d\mu \geq \varepsilon_0 - \varepsilon_0/2 = \varepsilon_0/2.$$

Se invece

$$\sup_N \limsup_k \int_{T_{kN}} |\sigma_k(t)|^q d\mu = \infty$$

allora esiste $N_1 \in \mathbf{N}$ tale che

$$\limsup_k \int_{T_{kN_1}} |\sigma_k(t)|^q d\mu > 1 \quad \text{e quindi} \quad \limsup_k \int_{T_{kN_1}} N_1 |p(t, x_k(t))|^{q'} d\mu > 1,$$

per cui esiste una successione $(k_r)_{r \in \mathbf{N}}$ tale che $N_1 \int_{T_{k_r N_1}} |p(t, x_{k_r}(t))|^{q'} d\mu > 1$ per ogni $r \in \mathbf{N}$.

Allora per il teorema del n. 0.8 di [3] esiste $E_r \in \mathcal{L}$, $E_r \subset T_{k_r N_1}$ tale che

$$N_1 \int_{E_r} |p(t, x_{k_r}(t))|^{q'} d\mu = 1,$$

da cui $\int_{E_r} |\sigma_{k_r}(t)|^q d\mu \leq 1$ per ogni $r \in \mathbf{N}$. In entrambi i casi è possibile dunque trovare $c, d \in \mathbf{R}_+$, una estratta $(k_r)_{r \in \mathbf{N}}$ ed un $H_r \in \mathcal{L}$, $H_r \subset T_{k_r}$ tali che

$$\int_{H_r} |\sigma_{k_r}(t)|^q d\mu \leq c, \quad \int_{H_r} |p(t, x_{k_r}(t))|^{q'} d\mu \geq d \quad \text{per ogni } r \in \mathbf{N}.$$

Su G definiamo ora $w_r = \chi_{H_r} x_{k_r} + (1 - \chi_{H_r}) x_0$, $u_r = \chi_{H_r} \sigma'_{k_r} + (1 - \chi_{H_r}) y_0$, ove

$$\sigma'_r(t) = \begin{cases} \sigma_{k_r}(t) & \text{se } t \in H_r \\ 0 & \text{se } t \in G \setminus H_r \end{cases} \quad (r \in \mathbf{N}).$$

Allora $w_r \in L^q(\mu, X)$, $u_r \in L^q(\mu, Y)$, $w_r \rightarrow x_0$ in $L^q(\mu, X)$, e $u_r \rightarrow y_0$ in $L^q(\mu, Y)$ come si verifica osservando che $|u_r|_{L^q(H_r)} \leq c$ e $\mu(H_r) \rightarrow 0$. Allora si ha

$$\begin{aligned} J(w_r, u_r) - J(x_0, y_0) &= \int_{H_r} [g(t, x_{k_r}(t), \sigma_{k_r}(t)) - g(t, x_0(t), y_0(t))] d\mu \leq \\ &\leq \frac{1 - \sqrt{q'}}{q'} \int_{H_r} |p(t, x_{k_r}(t))| |\sigma_{k_r}(t)| d\mu - \int_{H_r} g(t, x_0(t), y_0(t)) d\mu \leq \\ &\leq \frac{1 - \sqrt{q'}}{q'} \int_{H_r} |p(t, x_{k_r}(t))|^{q'} d\mu - \int_{H_r} g(t, x_0(t), y_0(t)) d\mu \leq \\ &\leq \frac{1 - \sqrt{q'}}{q'} d - \int_{H_r} g(t, x_0(t), y_0(t)) d\mu, \end{aligned}$$

e l'ultimo membro tende a $((1 - \sqrt{q'})/q')d$ per $r \rightarrow \infty$, in quanto $\mu(H_r) \rightarrow 0$ e $J(x_0, y_0) \in \mathbf{R}$ poichè $I(x_0, y_0) \in \mathbf{R}$. Allora

$$\limsup_r J(w_r, u_r) \leq J(x_0, y_0) - \frac{\sqrt{q'} - 1}{q'} d$$

in contraddizione con la sequenziale semicontinuità inferiore di J . Rimane da dimostrare che non è possibile che sia

$$\sup_N \limsup_k \left(N^{1/q} \int_{T_k \setminus T_{kN}} |p(t, x_k(t))|^{q'} d\mu \right) = \infty.$$

Notiamo intanto che essendo, per q.o. $t \in G$,

$$-\frac{|y_k(t)|^q}{q} \leq g(t, x_k(t), y_k(t)), \quad J(x_k, y_k) \leq a,$$

ed essendo $(y_k)_{k \in N}$ debolmente convergente e quindi limitata in $L^q(\mu, Y)$, esiste $M \in \mathbf{R}_+$ tale che $\int_G |g(t, x_k(t), y_k(t))| d\mu \leq M$ per $k \in N$. Supponendo allora che

$$\sup_N \limsup_k \left(N^{1/q} \int_{T_k \setminus T_{kN}} |p(t, x_k(t))|^{q'} d\mu \right) = \infty$$

esiste $\bar{N} \in N$ tale che

$$\limsup_k \left(\bar{N}^{1/q} \int_{T_k \setminus T_{k\bar{N}}} |p(t, x_k(t))|^{q'} d\mu \right) > \frac{q'(M+1)}{\sqrt{q'}-1}$$

e quindi per un'estratta $(k_r)_{r \in N}$ si avrà

$$\frac{q'(M+1)}{\sqrt{q'}-1} < \bar{N}^{1/q} \int_{T_{k_r} \setminus T_{k_r \bar{N}}} |p(t, x_{k_r}(t))|^{q'} d\mu \quad \text{per ogni } r \in N.$$

Allora dal teorema di Ljapounov (v. [3] n. 0.8) per ogni $r \in N$ esiste $E_r \in \mathcal{L}$, $E_r \subset T_{k_r} \setminus T_{k_r \bar{N}}$ tale che

$$\bar{N}^{1/q} \int_{E_r} |p(t, x_{k_r}(t))|^{q'} d\mu = \frac{q'(M+1)}{\sqrt{q'}-1}.$$

Essendo $p(t, x_k(t)) \neq 0$ in T_k dove è pure $|\sigma_k(t)|^q \geq |p(t, x_k(t))|^{q'}$ per ogni $k \in N$, è lecito definire $\alpha_r: E_r \rightarrow [0, 1]$ tale che $\alpha_r(t) = \bar{N}^{1/q} |p(t, x_{k_r}(t))|^{1/(q-1)} |\sigma_{k_r}(t)|^{-1}$ ove si rammenti che in $T_k \setminus T_{kN}$ si ha $|\sigma_k(t)|^q > N |p(t, x_k(t))|^{q'}$. Poniamo

$$w_r = \chi_{E_r} x_{k_r} + (1 - \chi_{E_r}) x_0, \quad u_r = \chi_{E_r} [\alpha_r' \sigma_r' + (1 - \alpha_r') y_{k_r}] + (1 - \chi_{E_r}) y_0$$

ove

$$\alpha_r'(t) = \begin{cases} \alpha_r(t) & \text{se } t \in E_r, \\ 0 & \text{se } t \in G \setminus E_r, \end{cases} \quad \sigma_r'(t) = \begin{cases} \sigma_{k_r}(t) & \text{se } t \in E_r, \\ 0 & \text{se } t \in G \setminus E_r. \end{cases}$$

Allora $w_r \in L^s(\mu, X)$, $w_r \rightarrow x_0$ in $L^s(\mu, X)$, ed $u_r \in L^q(\mu, Y)$ infatti si ha

$$\begin{aligned} \left(\int_G |u_r|^q d\mu \right)^{1/q} &\leq \left(\int_{E_r} |\alpha_r \sigma_{k_r}|^q d\mu \right)^{1/q} + \left(\int_{E_r} (1 - \alpha_r)^q |y_{k_r}|^q d\mu \right)^{1/q} + \left(\int_{G \setminus E_r} |y_0|^q d\mu \right)^{1/q} \leq \\ &\leq \bar{N}^{1/q} \left(\int_{E_r} |p(t, x_{k_r}(t))|^{q'} d\mu \right)^{1/q} + |y_{k_r}|_q + |y_0|_q \leq \bar{N}^{1/q} \left(\frac{q'(M+1)}{\sqrt{q'}-1} \right)^{1/q} + \\ &+ 2 \sup \{ |y_{k_r}|_q, r \in N \} < \infty. \end{aligned}$$

Essendo pure $\lim_r \mu(E_r) = 0$ in quanto $E_r \subset T_{k_r}$, ne segue che $u_r \rightarrow y_0$ in $L^q(\mu, Y)$. Dalla convessità di $g(t, x, \cdot)$ per q.o. $t \in G$ ed ogni $x \in X$ si ottiene allora quanto segue:

$$\begin{aligned} J(w_r, u_r) - J(x_0, y_0) &= \int_{E_r} [g(t, x_{k_r}(t), \alpha_r(t) \sigma_{k_r}(t) + (1 - \alpha_r(t)) y_{k_r}(t)) - g(t, x_0(t), y_0(t))] d\mu \leq \\ &\leq \int_{E_r} [\alpha_r(t) g(t, x_{k_r}(t), \sigma_{k_r}(t)) + (1 - \alpha_r(t)) g(t, x_{k_r}(t), y_{k_r}(t)) - g(t, x_0(t), y_0(t))] d\mu \leq \\ &\leq \frac{1 - \sqrt{q'}}{q'} \int_{E_r} \alpha_r(t) |p(t, x_{k_r}(t))| |\sigma_{k_r}(t)| d\mu + \int_G |g(t, x_{k_r}(t), y_{k_r}(t))| d\mu + \\ &- \int_{E_r} |g(t, x_0(t), y_0(t))| d\mu = \frac{1 - \sqrt{q'}}{q'} \bar{N}^{1/q} \int_{E_r} |p(t, x_{k_r}(t))|^{q'} d\mu + \\ &+ \int_G |g(t, x_{k_r}(t), y_{k_r}(t))| d\mu - \int_{E_r} |g(t, x_0(t), y_0(t))| d\mu = \\ &= -M - 1 + M - \int_{E_r} |g(t, x_0(t), y_0(t))| d\mu, \end{aligned}$$

e da ciò si avrebbe $\limsup J(w_r, u_r) - J(x_0, y_0) \leq -1$ in contraddizione con la sequenziale semicontinuità inferiore di J .

1.7 TEOREMA. - Siano $G, \mathcal{L}, \mu$ come nell'introduzione, X, Y B -spazi, con X ed Y^* separabili, $s, q \in [1, \infty)$, $p: G \times X \rightarrow Y^*$ funzione $\mathcal{Q}\mathcal{B}(G \times X)$ -misurabile tale che per ogni $x \in L^s(\mu, X)$ risulta $p(\cdot, x) \in L^q(\mu, Y)$. Allora esistono $c \in \mathbf{R}_+$, $b \in L^1(\mu)$ per cui

$$|p(t, x)|^q \leq c|x|^s + b(t) \quad \text{per ogni } (t, x) \in G \times X.$$

Basta applicare il teorema del n. 0.14 a G' del teorema del n. 0.3 e definire $b(t) = \infty$ se $t \in G \setminus G'$.

1.8 TEOREMA. — Siano $G, \mathcal{L}, X, Y, f, I, s, q$ come nel teorema del n. 1.6, ed inoltre supponiamo che esista A aperto di $L^s(\mu, X)$ tale che per ogni $x \in A$ esista $y_x \in L^q(\mu, Y)$ per cui $I(x, y_x) \in \mathbf{R}$.

Allora I è s.s.c.i. rispetto alla topologia prodotto della forte di $L^s(\mu, X)$ per la debole di $L^q(\mu, Y)$ se e solo se esiste $\bar{p}: G \times X \rightarrow Y^*$ funzione $\mathcal{QB}(G \times X)$ -misurabile, $c \in \mathbf{R}_+$ e $b \in L^1(\varphi)$ tali che per ogni $(t, x, y) \in G \times X \times Y$ si abbia

$$\text{i)} \quad f(t, x, y) \geq \langle y, \bar{p}(t, x) \rangle - c|x|^s + b(t),$$

$$\text{ii)} \quad |\bar{p}(t, x)|^{q'} \leq c|x|^s + b(t).$$

Per la necessità sia $\bar{p}$ come nel teorema del n. 1.6, per cui la i) è verificata. Grazie al teorema del n. 1.7 anche la ii) è provata se si verifica che $\bar{p}(\cdot, x) \in L^{q'}(\mu, Y)$ per ogni $x \in L^s(\mu, X)$.

Se $x \in A$ ciò segue direttamente dalla ii) del teorema del n. 1.6 ove si prenda $(x_k, y_k) = (x, y_x)$ per ogni $k \in \mathbf{N}$; sia $x \in L^s(\mu, X)$, e supponiamo che $\int_G |\bar{p}(t, x(t))|^{q'} \cdot d\mu = \infty$. Consideriamo $x_0 \in A$, e $\delta_0 > 0$ tale che se $T \in \mathcal{L}$, $\mu(T) < \delta_0$ si abbia che $w_T = \chi_T x + (1 - \chi_T)x_0 \in A$. Per quanto supposto esiste $\bar{T} \in \mathcal{L}$ con $\mu(\bar{T}) < \delta_0$ tale che $\int_{\bar{T}} |\bar{p}(t, x(t))|^{q'} d\mu = \infty$: essendo μ finita ciò segue applicando il teorema del n. 0.8 di [3] ed un ragionamento già fatto nella prova del teorema del n. 1.3 di [3]. Dovendo però essere $\bar{p}(\cdot, w_{\bar{T}}) \in L^{q'}(\mu, Y)$, si ha una contraddizione, in quanto è $w_{\bar{T}} \in A$, e quindi

$$\int_{\bar{T}} |\bar{p}(t, x(t))|^{q'} d\mu = \int_G |\bar{p}(t, w_{\bar{T}}(t))|^{q'} d\mu - \int_{G \setminus \bar{T}} |\bar{p}(t, x_0(t))|^{q'} d\mu < \infty.$$

Per la sufficienza basta provare che la condizione ii) enunciata implica la ii) del teorema del n. 1.6. Osserviamo infatti che se $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ è convergente in $L^s(\mu, X)$ allora $(|x_k|^s)_{k \in \mathbf{N}}$ è convergente in $L^1(\mu)$ e quindi è ivi debolmente relativamente compatta. Allora dal teorema del n. 0.3 di [2] si ha che le $|x_k|^s$ sono equiuniformemente sommabili per cui, per la ii), tali sono pure $|\bar{p}(\cdot, x_k)|^{q'}$, ed ancora dal teorema del n. 0.3 di [2] si ha la tesi.

BIBLIOGRAFIA

- [1] V. BARBU - TH. PRECUPANU, *Convexity and optimization in Banach spaces*, Editura Academiei Sijthoff and Noordhoff, Bucureşti, România (1978).
- [2] G. F. BOTTARO - P. OPPEZZI, *Semicontinuità inferiore di un funzionale integrale dipendente da funzioni a valori in uno spazio di Banach*, accettato per la pubblicazione su Boll. Un. Mat. Ital.

- [3] G. F. BOTTARO - P. OPPEZZI, *Condizioni necessarie per la semicontinuità inferiore di un funzionale integrale dipendente da funzioni a valori in uno spazio di Banach*, accettato per la pubblicazione su Boll. Un. Mat. Ital.
 - [4] G. CASTAING - M. VALADIER, *Convex analysis and measurable multifunctions*, Lecture Notes n. 580, Springer-Verlag (1977).
 - [5] A. D. IOFFE, *On lower semicontinuity of integral functionals II*, SIAM J. Control and Optimization, **15** (1977), pp. 991-1000.
 - [6] R. LUCCHETTI - F. PATRONE, *On Nemytskii operator and its application to the lower semicontinuity of integral functionals*, accettato per la pubblicazione su Indiana Math. J.
 - [7] R. T. ROCKAFELLAR, *Level sets and continuity of conjugate convex functions*, Trans. Amer. Math. Soc., **123** (1966), pp. 46-63.
 - [8] H. H. SCHAEFER, *Topological Vector Spaces*, The Macmillan Company, New York, 1966.
-