Decomposizioni di semifiltri e Γ-limiti sequenziali in reticoli completamente distributivi (*).

GABRIELE H. GRECO (Povo, Trento) (**)

Summary. – *Sequential forms of De Giorgi's Γ-limits are obtained via a decomposition of their carriers (carrier = sostegno) in the setting of completely distributive complete lattices. Moreover, the notion of carrier enables us to calculate easily the K-limits of epi- or hipo-graphs of arbitrary Γ-limits.*

Questo articolo riguarda la teoria della Γ-convergenza introdotta da E. DE GIORGI e T. FRANZONI [8], estesa da DE GIORGI in [6] e connessa con diverse branche della matematica [7].

Più precisamente usando nozioni introdotte dall'autore [14], [15] si danno espressioni sequenziali di Γ-limiti di funzioni a valori in un qualsiasi reticolo completamente distributivo (la retta estesa, l'insieme delle parti di un dato insieme ... sono reticoli di questo tipo). La ricerca di queste proprietà sequenziali è ricondotta alla ricerca di proprietà insiemistiche fra particolari famiglie di insiemi (dette semifiltri). Ciò significa che « decomporre » famiglie d'insiemi mediante filtri elementari ($\equiv$ successioni), equivarrà a determinare espressioni sequenziali dei Γ-limiti, indipendentemente dal reticolo completamente distributivo su cui agiscono.

Si ottengono così estensioni di proprietà note dei Γ-limiti di funzioni numeriche, e proprietà nuove anche nel caso che si tratti solo di funzioni numeriche.

Nel § 1 si espongono alcune nozioni e teoremi visti in [14] e in [15]. Nel § 2 e § 3 si estende la definizione di Γ-limite data da DE GIORGI in [6] e si decompongono i « sostegni » di alcuni di questi Γ-limiti mediante filtri elementari. Nel § 4 si confrontano i Γ-limiti di DE GIORGI con i Γ-limiti sequenziali (cfr. [3], [16]), osservando che quest'ultimi in generale non coincidono con i primi in spazi topologici verificanti il 1° assioma di numerabilità. Infine nel § 5 si calcolano i K-limiti degli epi o ipografici per un qualsiasi Γ-limite, usando il « sostegno » di questi.

(*) Dipartimento di Matematica, Università di Trento, 38050 Povo (Trento), Italia.
(**) Entrata in Redazione il 22 aprile 1983; versione riveduta il 28 luglio 1983.

1. – Preliminari.

Sia X un insieme non vuoto. Un *semifiltro su* X è una famiglia $\mathcal{A}$ non vuota di sottoinsiemi di X tale che

$$\emptyset \notin \mathcal{A} \tag{1.1}$$

$$X \supset B \supset A\,, \quad A \in \mathcal{A} \Rightarrow B \in \mathcal{A}\,. \tag{1.2}$$

Una famiglia non vuota di sottoinsiemi di X con la proprietà (1.1) sarà detta *base di semifiltro su* X. Ricordiamo che un *filtro* $\mathcal{F}$ *su* X è un semifiltro su X, verificante:

$$A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}\,. \tag{1.3}$$

L'insieme dei filtri, dei semifiltri e delle basi di semifiltro su X saranno indicati rispettivamente con i simboli $\mathbf{f}\,X$, $\mathbf{sf}\,X$ e $\mathbf{bsf}\,X$. Le applicazioni del tipo $I \to \mathbf{f}\,X$, $I \to \mathbf{sf}\,X$, $I \to \mathbf{bsf}\,X$ saranno dette rispettivamente *selettori* di filtri, di semifiltri e di basi di semifiltro su X. Importanti selettori di filtri sono i sistemi degli intorni di uno spazio topologico. In particolare se τ è una topologia su X, il suo sistema di intorni sarà indicato con il simbolo $\mathcal{N}_\tau$; nel seguito $\mathcal{N}_\iota$ denoterà sempre il sistema d'intorni della topologia discreta ι.

Se $\mathcal{M}\colon I \to \mathbf{sf}\,X$ è un selettore e $\mathcal{B} \in \mathbf{bsf}\,I$, si pone [14]

$$\mathcal{M}(\mathcal{B}) = \bigcup_{A \in \mathcal{B}} \bigcap_{i \in A} \mathcal{M}(i)\,. \tag{1.4}$$

$\mathcal{M}(\mathcal{B})$ è sempre un semifiltro; se $\mathcal{M}$ è un selettore di filtri e $\mathcal{B}$ è un filtro, allora $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ è un filtro. Se $\mathcal{M}\colon I \to \mathbf{sf}\,X$ e $\mathcal{N}\colon J \to \mathbf{bsf}\,I$, il selettore $\mathcal{M}\mathcal{N}$ di semifiltri su X è definito da $(\mathcal{M}\mathcal{N})(j) = \mathcal{M}(\mathcal{N}(j))$.

Ricordiamo che il sistema degli intorni $\mathcal{N}\colon X \to \mathbf{sf}\,X$ di una topologia su X è caratterizzato dalle seguenti tre proprietà [12]:

$$\mathcal{N} \text{ è un selettore di filtri} \tag{1.5}$$

$$\mathcal{N}^2 = \mathcal{N} \tag{1.6}$$

$$\mathcal{N} \subset \mathcal{N}_\iota\,. \tag{1.7}$$

Un insieme X dotato di un selettore $\mathcal{N}\colon X \to \mathbf{sf}\,X$ che verifica (1.5) e (1.7) è usualmente detto *spazio pretopologico*; mentre se $\mathcal{N}$ verifica (1.6) e (1.7), verrà detto *spazio topologico secondo Sierpiński*, perchè ottenibile a partire da un insieme X (detto spazio topologico da SIERPIŃSKI in [17]) dotato di una famiglia di insiemi (detti, di conseguenza, aperti) stabile rispetto ad unioni qualsiasi.

Sia L un reticolo completo. Indicati con 0_L e 1_L rispettivamente il minimo e il massimo elemento di L, si converrà in tutto il seguito che $0_L \neq 1_L$.

Siano f una funzione a valori in L definita su X e $\mathcal{A}$ una base di semifiltro su X, si definisce il *limite inferiore* e il *limite superiore* di f lungo $\mathcal{A}$ nel seguente modo [15]:

$$\liminf_{\mathcal{A}} f = \sup_{A\in\mathcal{A}} \inf_{x\in A} f(x) \tag{1.8}$$

$$\limsup_{\mathcal{A}} f = \inf_{A\in\mathcal{A}} \sup_{x\in A} f(x)\,. \tag{1.9}$$

Se L è completamente distributivo (cioè $\inf_{i\in I} \sup_{j\in J} a_{i,j} = \sup_{t\in J^I} \inf_{i\in I} a_{i,t(i)}$ per ogni $a_{i,j}\in L$ e per ogni coppia I, J di insiemi non vuoti) *allora* [15]:

$$\liminf_{\mathcal{A}} f = \limsup_{\mathcal{A}^\#} f\,, \tag{1.10}$$

dove la *griglia* $\mathcal{A}^\#$ di $\mathcal{A}$ è il semifiltro definito da $\mathcal{A}^\# = \{F \subset X\colon F\cap A \neq \emptyset$ per ogni $A \in \mathcal{A}\}$.

Poichè nel seguito considereremo solo reticoli completamente distributivi, ricordiamo che ogni catena completa è un reticolo completamente distributivo (per esempio la retta estesa $\overline{\boldsymbol{R}}$ o un suo intervallo chiuso), così pure lo è ogni prodotto diretto di catene complete (per esempio l'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$). Inoltre si osserva che l'insieme dei semifiltri $\mathbf{sf}\,X$ è un reticolo completamente distributivo rispetto all'inclusione insiemistica. In $\mathbf{sf}\,X$ l'operazione di griglia è un involuzione, cioè: $\mathcal{A}^{\#\#} = \mathcal{A}$, $(\bigcup \mathcal{A}_i)^\# = \bigcap (\mathcal{A}_i^\#)$ e $(\bigcap \mathcal{A}_i)^\# = \bigcup (\mathcal{A}_i^\#)$. Sempre in $\mathbf{sf}\,X$, i limiti inferiori corrispondono all'operazione definita in (1.4); e la proprietà (1.10), in virtù di (1.4), diventa $(\mathcal{M}(\mathcal{B})^\# = \mathcal{M}^\#(\mathcal{B}^\#)$.

Si dice che un'applicazione $T\colon L^X \to L$ è un *L-limitoide in X* (in breve: *L-limitoide* o, semplicemente, *limitoide*) [15], se per ogni coppia di funzioni f, g definite su X a valori in L e per ogni omomorfismo ψ completo di L in L valgono:

$$f\leqslant g \Rightarrow T(f)\leqslant T(g) \tag{1.11}$$

$$T(\psi\circ f) = \psi(T(f)) \tag{1.12}$$

$$T(f) \in \overline{f(X)}^L \tag{1.13}$$

dove $\overline{f(X)}^L$ è il sottoreticolo chiuso di L, generato da $f(X)$.

Il *sostegno* $\mathbf{st}\,(T)$ *di un L-limitoide* T in X è il semifiltro definito da

$$\mathbf{st}\,(T) = \{A \subset X\colon T(\chi_A^L) = 1_L\}\,, \tag{1.14}$$

dove $\chi_A^L\colon X \to L$ vale 1_L su A e 0_L su $X - A$.

Ogni limite inferiore ed ogni limite superiore lungo una base di semifiltro $\mathcal{A}$ è un limitoide; il loro sostegno è rispettivamente il semifiltro generato da $\mathcal{A}$ $(= \mathcal{A}^{\#\#})$

e la griglia $\mathcal{A}^\#$ di $\mathcal{A}$. Viceversa, *se L è completamente distributivo, ogni L-limitoide è un limite inferiore ed un limite superiore. Più precisamente se T è L-limitoide, allora*

$$T(f) = \operatorname{liminf}_{\mathbf{st}(T)} f = \operatorname{limsup}_{\mathbf{st}(T)^\#} f \,, \tag{1.15}$$

per ogni f [15].

Questa proprietà (1.15) (detta teorema di rappresentazione dei limitoidi) permette di delineare con chiarezza la struttura reticolare dell'insieme $\mathbf{Lim}\,(X, L)$ degli L-limitoidi in X. $\mathbf{Lim}\,(X, L)$ è un reticolo completo rispetto alla relazione d'ordine definita da « $T \leqslant T'$ se e solo se $T(f) \leqslant T'(f)$ per ogni $f \in L^X$ ». *L'applicazione che fa corrispondere ad ogni L-limitoide in X il suo sostegno è un isomorfismo completo di* $\mathbf{Lim}\,(X, L)$ *su* $\mathbf{sf}\, X$, *se L è completamente distributivo.* Ciò significa che fissato un reticolo completamente distributivo L, ogni teorema in $\mathbf{Lim}\,(X, L)$ diventa un teorema insiemistico in $\mathbf{sf}\, X$. Così pure ogni relazione insiemistica riguardante i semifiltri su un insieme X tramite le proprietà dell'isomorfismo:

$$\operatorname{liminf}_{\bigcap_i \mathcal{A}_i} f = \inf_i \operatorname{liminf}_{\mathcal{A}_i} f \tag{1.16}$$

$$\operatorname{liminf}_{\bigcup_i \mathcal{A}_i} f = \sup_i \operatorname{liminf}_{\mathcal{A}_i} f \tag{1.17}$$

dove $\{\mathcal{A}_i\}_i$ è una famiglia di semifiltri, si tradurrà in una relazione sugli L-limitoidi in X, qualunque sia il reticolo completamente distributivo L.

Insieme alle proprietà (1.10), (1.16) e (1.17) su ogni reticolo completamente distributivo valgono pure le loro duali, poichè il duale di un reticolo completamente distributivo è ancora completamente distributivo. Osserviamo inoltre che l'ultima delle suddette tre proprietà vale su ogni reticolo completo; mentre ognuna delle altre due oltre ad essere necessaria è anche sufficiente a garantire la completa distributività del reticolo completo su cui si calcolano i limiti inferiori o superiori [15].

A proposito di notazioni, nel seguito con L si indicherà sempre un reticolo completamente distributivo. Le funzioni a valori nell'insieme $\overline{\boldsymbol{R}}$ dei numeri reali estesi si diranno *funzioni numeriche*; la lettera greca ν indicherà la topologia usuale di $\overline{\boldsymbol{R}}$.

2. – Γ-limiti.

Siano $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ delle basi di semifiltro, rispettivamente sugli insiemi non vuoti $X_1, X_2, \dots, X_n$. Sia $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ una sequenza finita di segni $+$ o $-$; si ponga $\operatorname{ext}^+ = \sup$ e $\operatorname{ext}^- = \inf$. Allora seguendo DE GIORGI [6], definiamo

$$\Gamma(\mathcal{A}_1^{\alpha_1}, \dots, \mathcal{A}_n^{\alpha_n}) \lim f = \operatorname*{ext^{-\alpha_n}}_{A_n \in \mathcal{A}_n} \dots \operatorname*{ext^{-\alpha_1}}_{A_1 \in \mathcal{A}_1} \operatorname*{ext^{\alpha_1}}_{x_1 \in A_1} \dots \operatorname*{ext^{\alpha_n}}_{x_n \in A_n} f(x_1, \dots, x_n) \tag{2.1}$$

dove f è una funzione definita su $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ e a valori in un reticolo completamente distributivo L.

Gli L-limitoidi definiti con (2.1) sono detti *Γ-limiti* (*di De Giorgi*). Il loro sostegno indicato con $(\mathcal{A}_1^{\alpha_1}, \dots, \mathcal{A}_n^{\alpha_n})$ si può definire recursivamente mediante le seguenti uguaglianze:

$$(2.2) \qquad (\mathcal{A}^-) = \mathcal{A}^{\#\#} \quad e \quad (\mathcal{A}^+) = \mathcal{A}^\#$$

$$(2.3) \qquad (\mathcal{A}_1^{\alpha_1}, \dots, \mathcal{A}_{n-1}^{\alpha_{n-1}}, \mathcal{A}_n^-) = (\mathcal{A}_1^{\alpha_1}, \dots, \mathcal{A}_{n-1}^{\alpha_{n-1}}) \times \mathcal{A}_n$$

$$(2.4) \qquad (\mathcal{A}_1^{\alpha_1}, \dots, \mathcal{A}_{n-1}^{\alpha_{n-1}}, \mathcal{A}_n^+) = \big((\mathcal{A}_1^{\alpha_1}, \dots, \mathcal{A}_{n-1}^{\alpha_{n-1}})^\# \times \mathcal{A}_n\big)^\#$$

dove qualunque siano le basi di semifiltro $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, con $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ si indica il semifiltro generato dalla famiglia $\{A \times B\colon A \in \mathcal{A} \text{ e } B \in \mathcal{B}\}$.

Casi particolari sono:

$$(2.5) \qquad (\mathcal{A}^-, \mathcal{B}^-) = \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \qquad (\mathcal{A}^+, \mathcal{B}^-) = \mathcal{A}^\# \times \mathcal{B}$$

$$(2.6) \qquad (\mathcal{A}^+, \mathcal{B}^+) = (\mathcal{A} \times \mathcal{B})^\#, \qquad (\mathcal{A}^-, \mathcal{B}^+) = (\mathcal{A}^\# \times \mathcal{B})^\#$$

$$(2.7) \qquad (\mathcal{A}^+, \mathcal{B}^-, \mathcal{C}^-) = \mathcal{A}^\# \times \mathcal{B} \times \mathcal{C}, \quad (\mathcal{A}^-, \mathcal{B}^+, \mathcal{C}^-) = (\mathcal{A}^\# \times \mathcal{B})^\# \times \mathcal{C}.$$

La proprietà (1.10) dei limitoidi unitamente alla seguente

$$(2.8) \qquad (\mathcal{A}_1^{-\alpha_1}, \dots, \mathcal{A}_n^{-\alpha_n}) = (\mathcal{A}_1^{\alpha_1}, \dots, \mathcal{A}_n^{\alpha_n})^\#$$

implica in virtù di (1.15) le seguenti uguaglianze sui Γ-limiti:

$$(2.9) \qquad \Gamma(\mathcal{A}_1^{\alpha_1}, \dots, \mathcal{A}_n^{\alpha_n}) \lim f = \sup_{A \in (\mathcal{A}_1^{\alpha_1}, \dots, \mathcal{A}_n^{\alpha_n})} \inf_{(x_1, \dots, x_n) \in A} f(x_1, \dots, x_n)$$

$$(2.10) \qquad \Gamma(\mathcal{A}_1^{-\alpha_1}, \dots, \mathcal{A}_n^{-\alpha_n}) \lim f = \inf_{A \in (\mathcal{A}_1^{\alpha_1}, \dots, \mathcal{A}_n^{\alpha_n})} \sup_{(x_1, \dots, x_n) \in A} f(x_1, \dots, x_n).$$

In virtù dell'identità

$$(2.11) \qquad (\mathcal{A}_1^{\alpha_1}, \dots, \mathcal{A}_{n-1}^{\alpha_{n-1}}, \mathcal{A}_n^{\alpha_n}) = \big((\mathcal{A}_1^{\alpha_1}, \dots, \mathcal{A}_{n-1}^{\alpha_{n-1}})^-, \mathcal{A}_n^{\alpha_n}\big)$$

molte proprietà dei Γ-limiti si possono ricondurre allo studio dei Γ-limiti del tipo «$\Gamma(\mathcal{A}^-, \mathcal{B}^\pm) \lim$». Ecco un esempio.

ESEMPIO. – Sia τ una topologia secondo Sierpiński su Y e sia $\mathcal{A}$ una base di semifiltro su X. Sia $\Gamma(\mathcal{A}^-, \tau^\pm) \lim f\colon Y \to L$, definita da $\big(\Gamma(\mathcal{A}^-, \tau^\pm) \lim f\big)(y) = \Gamma(\mathcal{A}^-, \mathcal{N}_\tau(y)^\pm) \lim f$ per ogni $y \in Y$. Poichè, in virtù di (1.6) e (1.7), per ogni $y' \in Y$

$$\bigcup_{F \in \mathcal{N}_\tau(y')} \bigcap_{y \in F} (\mathcal{A}^-, \mathcal{N}_\tau(y)^-) = (\mathcal{A}^-, \mathcal{N}_\tau(y')^-)$$

e

$$\bigcap_{F \in \mathcal{N}_\tau(y')} \bigcup_{y \in F} (\mathcal{A}^-, \mathcal{N}_\tau(y)^+) = (\mathcal{A}^-, \mathcal{N}_\tau(y')^+),$$

allora da (1.16) e (1.17) segue che le funzioni $\Gamma(\mathcal{A}^-, \tau^-)\lim f$ e $\Gamma(\mathcal{A}^-, \tau^+)\lim f$ sono rispettivamente semicontinue inferiormente e superiormente. Perciò da (2.11) segue pure che la funzione $\Gamma(\mathcal{A}_1^{\alpha_1}, \dots, \mathcal{A}_n^{\alpha_n}, \tau^-)\lim f$ è semicontinua inferiormente, mentre quella ottenuta da questa scambiando il segno $-$ con $+$ è semicontinua superiormente.

In virtù dell'isomorfismo fra limitoidi e semifiltri, il confronto di limitoidi è riconducibile al confronto del loro sostegno. Per esempio, siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due basi di semifiltro rispettivamente su X, Y, allora per ogni funzione f definita su $X \times Y$ e a valori in un reticolo completamente distributivo si ha:

$$\liminf_{y,\mathcal{B}}\big(\liminf_{x,\mathcal{A}} f(x, y)\big) \geqslant \Gamma(\mathcal{A}^-, \mathcal{B}^-)\lim f; \tag{2.12}$$

perchè il sostegno del limitoide «liminf liminf» contiene il sostegno del Γ-limite, cioè $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} \bigcap_{y\in B} (\mathcal{A}^-, \mathcal{N}_\iota(y)^-) \supset (\mathcal{A}^-, \mathcal{B}^-)$.

Da (2.12) si ottiene per dualità e per sostituzione di $\mathcal{A}$ con $\mathcal{A}^\#$:

$$\limsup_{y,\mathcal{B}}\big(\liminf_{x,\mathcal{A}} f(x, y)\big) \leqslant \Gamma(\mathcal{A}^-, \mathcal{B}^+)\lim f\,. \tag{2.13}$$

Altre relazioni fra i sostegni di Γ-limiti sono le seguenti:

$$(\mathcal{A}^+, \mathcal{A}_1^{\alpha_1}, \dots, \mathcal{A}_n^{\alpha_n}) = (\mathcal{A}^{\#-}, \mathcal{A}_1^{\alpha_1}, \dots, \mathcal{A}_n^{\alpha_n}) \qquad \textit{per ogni } \mathcal{A} \tag{2.14}$$

$$(\mathcal{A}_1^{\alpha_1}, \dots, \mathcal{A}^-, \dots, \mathcal{A}_n^{\alpha_n}) \subset (\mathcal{A}_1^{\alpha_1}, \dots, \mathcal{B}^-, \dots, \mathcal{A}_n^{\alpha_n}) \qquad \textit{se } \mathcal{A} \leqslant \mathcal{B} \tag{2.15}$$

$$(\mathcal{A}_1^{\alpha_1}, \dots, \mathcal{A}^{\#-}, \dots, \mathcal{A}_n^{\alpha_n}) \subset (\mathcal{A}_1^{\alpha_1}, \dots, \mathcal{A}^+, \dots, \mathcal{A}_n^{\alpha_n}) \qquad \textit{per ogni } \mathcal{A} \tag{2.16}$$

$$(\mathcal{A}_1^{\alpha_1}, \dots, \mathcal{A}^-, \dots, \mathcal{A}_n^{\alpha_n}) \subset (\mathcal{A}_1^{\alpha_1}, \dots, \mathcal{A}^+, \dots, \mathcal{A}_n^{\alpha_n}) \qquad \textit{se } \mathcal{A} \subset \mathcal{A}^\#, \tag{2.17}$$

dove con « $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{B}$ » (leggasi $\mathcal{A}$ *meno fine di* $\mathcal{B}$) si intende che ogni elemento di $\mathcal{A}$ contiene qualche elemento di $\mathcal{B}$.

Infine osserviamo che le famiglie d'insiemi $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ che intervengono nella definizione (2.1) possono a secondo delle necessità essere dei filtri o gli intorni di un punto in uno spazio topologico o pretopologico oppure una base di intorni. Sostituendo $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ con delle famiglie $\boldsymbol{F}_1, \dots, \boldsymbol{F}_n$ di basi di semifiltri si possono ottenere i Γ-limiti, introdotti da MOSCARIELLO in [16]; per esempio un Γ-limite di questo tipo che servirà nel seguito è:

$$\Gamma(\boldsymbol{F}_1^+, \boldsymbol{F}_2^-)\lim f = \inf_{\mathcal{A}\in \boldsymbol{F}_2}\, \sup_{A\in\mathcal{A}}\, \sup_{\mathcal{B}\in \boldsymbol{F}_1}\, \inf_{B\in\mathcal{B}}\, \sup_{x\in B}\, \inf_{y\in A} f(x, y)\,. \tag{2.18}$$

3. – Decomposizione di semifiltri mediante filtri elementari.

I filtri elementari sono quei filtri associati a qualche successione. Nel seguito il simbolo $\mathcal{E}$ sarà utilizzato per indicare filtri elementari. Se $\mathcal{E}$ è il filtro elementare associato ad un successione $\{x_n\}_n$, si scriverà $\mathcal{E} \equiv \{x_n\}_n$; in tal caso i simboli $\{x_n\}_n$ e

$\{x_n\}^\#$ denoteranno anche $\mathcal{E}$ e la sua griglia $\mathcal{E}^\#$. Il simbolo $\boldsymbol{N}$ denoterà sia l'insieme dei numeri naturali sia il filtro elementare (dei sottoinsiemi cofiniti di $\boldsymbol{N}$) associato alla successione $\{n\}_n$; il diverso significato di $\boldsymbol{N}$ sarà chiaro dal contesto.

Ricordiamo che se $\mathcal{E} \equiv \{x_n\}_n$, allora

$$\operatorname{liminf}_{\mathcal{E}} f = \liminf_{n\to+\infty} f(x_n) \quad \text{e} \quad \operatorname{liminf}_{\mathcal{E}^\#} f \equiv \limsup_{n\to+\infty} f(x_n)\,.$$

Elenchiamo anzitutto alcune decomposizioni di semifiltri mediante filtri elementari. La dimostrazione di queste decomposizioni è diretta; per cui è lasciata al lettore.

Siano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ filtri a base numerabile, allora

$$\mathcal{F} = \bigcap_{\mathcal{E}\supset\mathcal{F}} \mathcal{E} = \bigcap_{\mathcal{E}\supset\mathcal{F}} \mathcal{E}^\#, \qquad \mathcal{F}^\# = \bigcup_{\mathcal{E}\supset\mathcal{F}} \mathcal{E} = \bigcup_{\mathcal{E}\supset\mathcal{F}} \mathcal{E}^\# \tag{3.1}$$

$$(\mathcal{F}^-, \mathcal{G}^-) = \bigcap_{\mathcal{E}\supset\mathcal{F}} (\mathcal{E}^-, \mathcal{G}^-) = \bigcap_{\mathcal{E}\supset\mathcal{F}} (\mathcal{E}^+, \mathcal{G}^-) \tag{3.2}$$

$$(\mathcal{F}^+, \mathcal{G}^-) = \bigcup_{\mathcal{E}\supset\mathcal{F}} (\mathcal{E}^-, \mathcal{G}^-) = \bigcup_{\mathcal{E}\supset\mathcal{F}} (\mathcal{E}^+, \mathcal{G}^-)\,. \tag{3.3}$$

TEOREMA 3.1. – *Sia $\mathcal{E} \equiv \{x_n\}_n$. Allora per ogni filtro $\mathcal{G}$ a base numerabile vale*

$$(\mathcal{E}^-, \mathcal{G}^-) = \bigcap_{\{y_n\}_n\supset\mathcal{G}} \{(x_n, y_n)\}_n \quad e \quad (\mathcal{E}^+, \mathcal{G}^-) = \bigcap_{\{y_n\}_n\supset\mathcal{G}} \{(x_n, y_n)\}_n^\#\,. \quad \blacksquare \tag{3.4}$$

Da questo teorema, la cui dimostrazione è lasciata al lettore, e da (3.2), (3.3) si ottengono le seguenti uguaglianze, qualora $\mathcal{E} \equiv \{x_n\}_n$ e i filtri $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ siano a base numerabile:

$$(\mathcal{F}^-, \mathcal{G}^-) = \bigcap_{\{x_n\}_n\supset\mathcal{F}} \; \bigcap_{\{y_n\}_n\supset\mathcal{G}} \{(x_n, y_n)\}_n = \bigcap_{\{x_n\}_n\supset\mathcal{F}} \; \bigcap_{\{x_n\}_n\supset\mathcal{G}} \{(x_n, y_n)\}_n^\#, \tag{3.5}$$

$$(\mathcal{F}^+, \mathcal{G}^-) = \bigcup_{\{x_n\}_n\supset\mathcal{F}} \; \bigcap_{\{y_n\}_n\supset\mathcal{G}} \{(x_n, y_n)\}_n = \bigcup_{\{y_n\}_n\supset\mathcal{G}} \; \bigcap_{\{z_n\}_n\supset\mathcal{H}} \{(x_n, y_n)\}_n^\#, \tag{3.6}$$

$$(\mathcal{E}^-, \mathcal{G}^-, \mathcal{H}^-) = \bigcap_{\{y_n\}_n\supset\mathcal{G}} \; \bigcap_{\{z_n\}_n\supset\mathcal{H}} \{(x_n, y_n, z_n)\}_n\,, \tag{3.7}$$

$$(\mathcal{E}^+, \mathcal{G}^-, \mathcal{H}^-) = \bigcap_{\{y_n\}_n\supset\mathcal{G}} \; \bigcap_{\{z_n\}_n\supset\mathcal{H}} \{(x_n, y_n, z_n)\}_n^\#\,, \tag{3.8}$$

$$(\mathcal{E}^-, \mathcal{G}^+, \mathcal{H}^-) = \bigcup_{\{y_n\}_n\supset\mathcal{G}} \; \bigcap_{\{z_n\}_n\supset\mathcal{H}} \{(x_n, y_n, z_n)\}_n\,, \tag{3.9}$$

$$(\mathcal{E}^+, \mathcal{G}^+, \mathcal{H}^-) = \bigcup_{\{y_n\}_n\supset\mathcal{G}} \; \bigcap_{\{z_n\}_n\supset\mathcal{H}} \{(x_n, y_n, z_n)\}_n^\#\,. \tag{3.10}$$

TEOREMA 3.2. – *Qualunque siano i filtri a base numerabile $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ vale:*

$$(\mathcal{F}^-, \mathcal{G}^+, \mathcal{H}^-) = \bigcap_{\mathcal{E}\supset\mathcal{F}} (\mathcal{E}^-, \mathcal{G}^+, \mathcal{H}^-)\,, \tag{3.11}$$

D'altra parte esistono dei filtri a base numerabile $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ *tali che*

$$(\mathcal{F}^-, \mathcal{G}^+, \mathcal{H}^-) \neq \bigcap_{\mathcal{E}\supset\mathcal{F}} (\mathcal{E}^+, \mathcal{G}^+, \mathcal{H}^-)\,. \tag{3.12}$$

Alla dimostrazione di questo teorema premettiamo alcune osservazioni.

OSSERVAZIONE 3.3. – Sia $\mathcal{A}$ una base di semifiltro su X ed $\mathcal{F}$ un filtro a base numerabile su Y. Fissata una base numerabile $\{V_n\}_n$ di $\mathcal{F}$ con $V_n \supset V_{n+1}$ per ogni numero naturale n. Per ogni insieme $\Omega \subset X \times Y$ si definisca la seguente funzione numerica $f_\Omega\colon X \to \overline{\mathbf{R}}$ nel seguente modo: $f_\Omega(x) = \sup\{1/n\colon (x, y) \in \Omega$ per ogni $y \in V_n\}$, ove si pone $\sup \emptyset = 0$. Allora $\Omega \in (\mathcal{A}^-, \mathcal{F}^-)$ se e solo se $\liminf_{\mathcal{A}} f_\Omega > 0$. ■

Sia f una funzione numerica definita su X. Il sottografico di f è il sottoinsieme ipo (f) di $X \times \overline{\mathbf{R}}$ definito da ipo $(f) = \{(x, t)\colon t \leqslant f(x)\}$. Indicata con ν la topologia usuale su $\overline{\mathbf{R}}$, allora il filtro degli intorni di un numero reale b (finito o no) è denotato $\mathcal{N}_\nu(b)$.

LEMMA 3.4. – *Sia* $\mathcal{A}$ *una base di semifiltro su* X *ed* $f\colon X \to \overline{\mathbf{R}}$ *una funzione numerica. Allora per ogni numero reale* $b \neq +\infty$ *risulta*: $\liminf_{\mathcal{A}} f > b$ *se e solo se* ipo $(f) \in (\mathcal{A}^-, \mathcal{N}_\nu(b)^-)$. ■

PROPOSIZIONE 3.5 ([15]). – *Sia* $\mathcal{A}$ *un semifiltro che è l'intersezione di una famiglia di semifiltri* $\{\mathcal{A}_i\}_i$ *su* X. *Allora le seguenti proprietà sono equivalenti*:

$$\liminf_{\mathcal{A}} f = \min_i \liminf_{\mathcal{A}_i} f \quad \textit{per ogni } f\colon X \to \overline{\mathbf{R}} \tag{3.13}$$

$$(\mathcal{A}^-, \mathcal{F}^-) = \bigcap_i (\mathcal{A}_i^-, \mathcal{F}^-) \quad \textit{per ogni filtro } \mathcal{F} \textit{ a base numerabile}\,. \tag{3.14}$$

DIMOSTRAZIONE. – Verifichiamo che da (3.13) segue (3.14). É ovvio che $(\mathcal{A}^-, \mathcal{F}^-) \subset \subset \bigcap_i (\mathcal{A}_i^-, \mathcal{F}^-)$. Perciò sia $\Omega \in \bigcap_i (\mathcal{A}_i^-, \mathcal{F}^-)$; questo significa che $\liminf_{\mathcal{A}_i} f_\Omega > 0$ per ogni indice i, in virtù dell'osservazione precedente. Quindi da (3.13), sempre in virtù della stessa osservazione, si ottiene che $\Omega \in (\mathcal{A}^-, \mathcal{F}^-)$ qualunque sia il filtro $\mathcal{F}$ a base numerabile. Dunque la (3.13) implica (3.14). Ora dimostriamo l'implicazione inversa. Senza mancare di generalità possiamo supporre che $\inf_i \liminf_{\mathcal{A}_i} f = b \neq +\infty$. Allora in virtù di (1.16), essendo $\mathcal{A} = \bigcap_i \mathcal{A}_i$, si ha $b = \liminf_{\mathcal{A}} f$; perciò dal lemma precedente segue che ipo $(f) \notin (\mathcal{A}^-, \mathcal{N}_\nu(b)^-)$. Quindi per (3.14) esiste un indice i_0 tale che ipo $(f) \notin (\mathcal{A}_{i_0}^-, \mathcal{N}_\nu(b)^-)$. Da ciò e dal lemma (3.4) si ottiene che $\liminf_{\mathcal{A}_{i_0}} f \leqslant b$. Dunque dalla definizione di b segue che $\liminf_{\mathcal{A}_{i_0}} f = b$. Così si è verificato che (3.14) implica la (3.13). ■

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3.2. – In virtù di (3.3) e di (2.8) si ha che $(\mathcal{F}^-, \mathcal{G}^+)$ è l'intersezione dei semifiltri $(\mathcal{E}^-, \mathcal{G}^+)$, dove $\mathcal{E}$ percorre tutti i filtri elementari più fini di $\mathcal{F}$. Quindi dalla proposizione 3.5 segue che la (3.11) sarà dimostrata, qualora si verifichi che $\Gamma(\mathcal{F}^-, \mathcal{G}^+)\lim f = \min_{\mathcal{E}\supset\mathcal{F}} \Gamma(\mathcal{E}^-, \mathcal{G}^+)\lim f$ per ogni funzione numerica f. Poniamo $b = \Gamma(\mathcal{F}^-, \mathcal{G}^+)\lim f$. Poichè $(\mathcal{F}^-, \mathcal{G}^+) = \bigcap_{\mathcal{E}\supset\mathcal{F}} (\mathcal{E}^-, \mathcal{G}^+)$, da (1.16) segue che $b = \inf_{\mathcal{E}\supset\mathcal{F}} \Gamma(\mathcal{E}^-, \mathcal{G}^+)\lim f$. Perciò sia $\{\mathcal{E}_n\}_n$ una successione di filtri elementari più fini di $\mathcal{F}$, tali che $b = \inf_n \Gamma(\mathcal{E}_n^-, \mathcal{G}^+)\lim f$. Essendo $\mathcal{F}$ un filtro a base numerabile, esiste un filtro elementare $\mathcal{E}_0$ più fine di $\mathcal{F}$ e meno fine di ogni $\mathcal{E}_n$. Quindi da $(\mathcal{E}_0^-, \mathcal{G}^+) \subset \subset (\mathcal{E}_n^-, \mathcal{G}^+)$ si ottiene $\Gamma(\mathcal{E}_0^-, \mathcal{G}^+)\lim f \leqslant \Gamma(\mathcal{E}_n^-, \mathcal{G}^+)\lim f$ per ogni n. Perciò $b = \Gamma(\mathcal{E}_0^-, \mathcal{G}^+)\lim f$. Così si è verificato quanto richiesto.

Per la seconda parte del teorema esibiamo questo esempio.

ESEMPIO 3.6. – Sia $\mathcal{F} = \mathcal{G} = \mathcal{H} = \mathcal{N}(0)$, dove $\mathcal{N}(0)$ è il filtro degli intorni di zero in $X = [0, 1]$. Sia $g\colon [0,1]^2 \to \overline{\boldsymbol{R}}$ così definita

$$g(x, y) = \begin{cases} 2^{-m} & \textit{se } \exists n, m \in \boldsymbol{N} \textit{ tali che } x = 2^{-n}(1-2^{-m}),\ 0 \leqslant y \leqslant 2^{-m} \\ 1 & \textit{altrimenti}\,. \end{cases}$$

Si ponga $\mathcal{E}_m \equiv \{2^{-n}(1-2^{-m})\}_n$. È evidente che $\Gamma(\mathcal{E}_m^+, \mathcal{N}(0)^+)\lim g = 2^{-m}$. Quindi $0 = \inf_{\mathcal{E}\supset\mathcal{N}(0)} \Gamma(\mathcal{E}^+, \mathcal{N}(0)^+)\lim g = \Gamma(\mathcal{N}(0)^-, \mathcal{N}(0)^+)\lim g$, in virtù di (1.16) e (3.3). Perciò dal lemma 3.4 l'insieme ipo (g) non appartiene alla famiglia d'insiemi $(\mathcal{N}(0)^-, \mathcal{N}(0)^+, \mathcal{N}(0)^-)$. Ora sia $\mathcal{E}$ il filtro elementare associato ad una qualsiasi successione $\{x_n\}_n \subset [0, 1]$ convergente vero zero. Se esiste un numero naturale m tale che l'insieme $\{x_n\colon n \in \boldsymbol{N}\} \cap \{2^{-n}(1-2^{-m})\colon n \in \boldsymbol{N}\}$ sia infinito, si ha $\Gamma(\mathcal{E}^+, \mathcal{N}(0)^+)\lim g \geqslant 2^{-m}$; altrimenti risulta $\Gamma(\mathcal{E}^+, \mathcal{N}(0)^+)\lim g = 1$. Quindi in virtù del lemma 3.4 l'insieme ipo (g) appartiene alla famiglia d'insiemi $(\mathcal{E}^+, \mathcal{N}(0)^+, \mathcal{N}(0)^-)$ per ogni filtro elementare $\mathcal{E}$ più fine di $\mathcal{N}(0)$. In conclusione si è dimostrato che ipo $(g) \notin (\mathcal{N}(0)^-, \mathcal{N}(0)^+, \mathcal{N}(0)^-)$ e ipo $(g) \in \bigcap_{\mathcal{E}\supset\mathcal{N}(0)} (\mathcal{E}^+, \mathcal{N}(0)^+, \mathcal{N}(0)^-)$. ■

Dal teorema 3.2 precedente e da (3.9), (3.10) si ottiene:

$$(3.15) \qquad (\mathcal{F}^-, \mathcal{G}^+, \mathcal{H}^-) = \bigcap_{\{x_n\}\supset\mathcal{F}} \ \bigcup_{\{y_n\}_n\supset\mathcal{G}} \ \bigcap_{\{z_n\}_n\supset\mathcal{H}} \{(x_n, y_n, z_n)\}_n$$

qualunque siano i filtri $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ a base numerabile; mentre esistono alcuni di questi filtri tali che:

$$(3.16) \qquad (\mathcal{F}^-, \mathcal{G}^+, \mathcal{H}^-) \neq \bigcap_{\{x_n\}_n\supset\mathcal{F}} \ \bigcup_{\{y_n\}_n\supset\mathcal{G}} \ \bigcap_{\{z_n\}_n\supset\mathcal{H}} \{(x_n, y_n, z_n)\}_n^{\#}\,.$$

Queste due ultime proprietà delimitano le possibilità di esprimere i semifiltri, che sono sostegni di Γ-limiti di De Giorgi, mediante filtri elementari. Per esempio se $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{C}$ sono filtri a base numerabile le seguenti estensioni di proprietà precedenti (vedi (3.1), (3.6) e (3.15)): $(\mathcal{F}^+, \mathcal{G}^-, \mathcal{H}^+, \mathcal{C}^-) = \bigcup_{\{x_n\}_n\supset\mathcal{F}} \ \bigcap_{\{y_n\}_n\supset\mathcal{G}} \ \bigcup_{\{z_n\}\supset\mathcal{H}} \ \bigcap_{\{w_n\}_n\supset\mathcal{C}} \{(x_n,$

$y_n, z_n, w_n)\}_n$ e $(\mathcal{F}^+, \mathcal{G}^-, \mathcal{H}^+, \mathcal{C}^-) = \bigcup_{\{x_n\}_n \supset \mathcal{F}} \bigcap_{\{y_n\}_n \supset \mathcal{G}} \bigcup_{\{z_n\}_n \supset \mathcal{H}} \bigcap_{\{w_n\}_n \supset \mathcal{C}} \{(x_n, y_n, z_n, w_n)\}_n^{\#}$ non sono in generale vere.

La decomposizione di un semifiltro mediante filtri elementari più ricca di conseguenze e più generale è data dal seguente teorema.

TEOREMA 3.7. – *Sia $\mathcal{E} \equiv \{x_n\}_n$ un filtro elementare e siano $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ dei filtri a base numerabile. Allora vale:*

$$(\mathcal{E}^-, \mathcal{F}^-, \mathcal{G}^+, \mathcal{H}^-) = \bigcap_{\{y_n\}_n \supset \mathcal{F}} \left(\{(x_n, y_n)\}_n^-, \mathcal{G}^+, \mathcal{H}^-\right). \tag{3.17}$$

DIMOSTRAZIONE. – Sia Ω un insieme e sia f_Ω la funzione definita come nell'osservazione 3.3 (mutatis mutandis). L'insieme Ω apparrtiene ad $(\mathcal{E}^-, \mathcal{F}^-, \mathcal{G}^+, \mathcal{H}^-)$ se e solo se $\Gamma(\mathcal{E}^-, \mathcal{F}^-, \mathcal{G}^+) \lim f_\Omega > 0$; mentre appartiene all'altra famiglia d'insiemi indicata in (3.17) se e solo se $\Gamma(\{(x_n, y_n)\}_n^-, \mathcal{G}^+) \lim f_\Omega > 0$ per ogni successione $\{y_n\}_n$ più fine di $\mathcal{F}$. Essendo $(\mathcal{E}^-, \mathcal{F}^-, \mathcal{G}^+) = \bigcap_{\{y_n\}_n \supset \mathcal{F}} (\{(x_n, y_n)\}_n^-, \mathcal{G}^+)$, da (1.16) segue che $\Gamma(\mathcal{E}^-, \mathcal{F}^-, \mathcal{G}^+) \lim f_\Omega = \inf_{\{y_n\}_n \supset \mathcal{F}} \Gamma(\{(x_n, y_n)\}_n^-, \mathcal{G}^+) \lim f_\Omega$; perciò la proprietà (3.17) risulterà vera se si dimostra che l'uguaglianza $\Gamma(\mathcal{E}^-, \mathcal{F}^-, \mathcal{G}^+) \lim f_\Omega = 0$ comporta l'esistenza di una successione $\{y_n^0\}_n$ più fine di $\mathcal{F}$ tale che $\Gamma(\{(x_n, y_n^0)\}_n^-, \mathcal{G}^+) \lim f_\Omega = 0$. Quindi supponiamo che $\Gamma(\mathcal{E}^-, \mathcal{F}^-, \mathcal{G}^+) \lim f_\Omega = \inf_{\{y_n\}_n \supset \mathcal{F}} \inf_{V \in \mathcal{G}} \liminf_{n \to +\infty} \sup_{z \in V} f_\Omega(x_n, y_n, z) = 0$. Ciò significa che per ogni numero naturale m esiste $V_m \in \mathcal{G}$ e $\{y_n^m\}_n \supset \mathcal{F}$ tali che ogni insieme $E(m) = \{n : \sup_{z \in V_m} f_\Omega(x_n, y_n^m, z) < 1/m,\ y_n^m \in F_m\}$ contiene infiniti elementi, dove $\{F_m\}_m$ è un base numerabile decrescente di $\mathcal{F}$. Ora scelto per ogni m un sottoinsieme infinito $E'(m)$ di $E(m)$ in modo tale che per ogni coppia di numeri naturali m, s distinti si abbia $E'(m) \cap E'(s) = \emptyset$, è possibile ben definire una successione $\{y_n^0\}_n \supset \mathcal{F}$ tale che per ogni numero naturale m e per ogni $n \in E'(m)$ si abbia $y_n^0 = y_n^m$. Per questa successione si può dimostrare quanto richiesto, cioè $\Gamma(\{(x_n, y_n^0)\}_n^-, \mathcal{G}^+) \lim f_\Omega = 0$. Così si è conclusa la dimostrazione. ■

COROLLARIO 3.8. – *Per ogni terna di filtri $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ a base numerabile si ha:*

$$(N^-, \mathcal{F}^-, \mathcal{G}^+, \mathcal{H}^-) = \bigcap_{\{x_n\}_n \supset \mathcal{F}} \bigcup_{\{y_n\}_n \supset \mathcal{G}} \bigcap_{\{z_n\}_n \supset \mathcal{H}} \{(n, x_n, y_n, z_n)\}_n; \tag{3.18}$$

mentre esistono dei filtri a base numerabile $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ tali che:

$$(N^+, \mathcal{F}^-, \mathcal{G}^+, \mathcal{H}^-) \neq \bigcup_{\{x_n\}_n \supset \mathcal{F}} \bigcup_{\{y_n\}_n \supset \mathcal{G}} \bigcap_{\{z_n\}_n \supset \mathcal{H}} \{(n, x_n, y_n, z_n)\}_n^{\#}. \tag{3.19}$$

DIMOSTRAZIONE. – La (3.18) è una diretta conseguenza del teorema precedente e della proprietà (3.9). Per la (3.19), posto $\mathcal{F} = \mathcal{G} = \mathcal{H} = \mathcal{N}(0)$, dove $\mathcal{N}(0)$ è il filtro degli intorni di zero in $[0, 1]$, si osserva che l'insieme $N \times \Omega$, dove Ω è l'ipografico della funzione g dell'esempio 3.6, appartiene al semifiltro che compare nel secondo membro della (3.19), ma non appartiene al semifiltro $(N^+, \mathcal{F}^-, \mathcal{G}^+, \mathcal{H}^-)$. ■

Adattando la dimostrazione del teorema 3.7 si ottiene

TEOREMA 3.9. – *Sia* $\mathcal{E} \equiv \{x_n\}_n$ *un filtro elementare e siano* $\mathcal{F}, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_k$ *dei filtri a base numerabile. Allora*

$$(3.20) \qquad (\mathcal{E}^-, \mathcal{F}^-, \mathcal{F}_1^{\alpha_1}, \ldots, \mathcal{F}_k^{\alpha_k}) = \bigcap_{\{y_n\}_n \supset \mathcal{F}} (\{(x_n, y_n)\}_n^-, \mathcal{F}_1^{\alpha_1}, \ldots, \mathcal{F}_k^{\alpha_k})$$

per ogni sequenza finita di segni $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. ■

Questo teorema unitamente all'ovvia inclusione

$$(3.21) \qquad (\mathcal{E}^-, \mathcal{F}^+, \mathcal{F}_1^{\alpha_1}, \ldots, \mathcal{F}_k^{\alpha_k}) \supset \bigcup_{\{y_n\}_n \supset \mathcal{F}} (\{(x_n, y_n)\}_n^+, \mathcal{F}_1^{\alpha_1}, \ldots, \mathcal{F}_k^{\alpha_k})$$

permette di precisare ed estendere al caso di più filtri le disuguaglianze (3.16) e (3.19). A tal scopo si ponga

$$(3.22) \qquad (N^{\alpha_0}, \mathcal{F}_1^{\alpha_1}, \ldots, \mathcal{F}_k^{\alpha_k})_{\text{seq}} = \operatorname*{ext}^{\alpha_1}_{\{x_n^1\}_n \supset \mathcal{F}_1} \ldots \operatorname*{ext}^{\alpha_k}_{\{x_n^k\}_n \supset \mathcal{F}_k} \operatorname*{ext}^{-\alpha_0}_{m \in N} \operatorname*{ext}^{\alpha_0}_{n \geqslant m} \{(n, x_n^1, \ldots, x_n^k)\}_n ,$$

dove $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sono segni qualsiasi ed $\operatorname{ext}^- = \bigcap$, $\operatorname{ext}^+ = \bigcup$.
Allora risulta

$$(3.23) \qquad (N^-, \mathcal{F}_1^{\alpha_1}, \ldots, \mathcal{F}_k^{\alpha_k})_{\text{seq}} \subset (N^{\alpha_0}, \mathcal{F}_1^{\alpha_1}, \ldots, \mathcal{F}_k^{\alpha_k}) \subset (N^+, \mathcal{F}_1^{\alpha_1}, \ldots, \mathcal{F}_k^{\alpha_k})_{\text{seq}} ,$$

per ogni sequenza finita di segni $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ e di filtri $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_k$ a basi numerabili. Si noti che le precedenti inclusioni sono in generale proprie, come risulta da (3.19); sono invece uguaglianze solo in quei casi in cui ci si può ricondurre alla (3.18), vedasi per esempio (3.7), (3.8), (3.9) e (3.10).

Perciò rimane aperto il problema di determinare decomposizioni sequenziali dei semifiltri $(N^{\alpha_0}, \mathcal{F}_1^{\alpha_1}, \ldots, \mathcal{F}_k^{\alpha_k})$, qualora i filtri $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_k$ siano a basi numerabili. In particolare vi è qualche decomposizione sequenziale di $(N^+, \mathcal{F}_1^-, \mathcal{F}_2^+, \mathcal{F}_3^-)$?

Forse potranno essere di qualche utilità le seguenti osservazioni sulla proposizione 3.5 e su una proprietà dei filtri a base numerabile.

OSSERVAZIONE 3.10. – *Famiglie di semifiltri numerabilmente sature.*

La realizzazione della proprietà (3.13) involve una nozione di compattezza della famiglia di semifiltri $\{\mathcal{A}_i\}_i$ su X.

Sia $\mathcal{B}$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Si dirà che $\mathcal{B}$ è un *ricoprimento di* $\{\mathcal{A}_i\}_i$, se per ogni i esiste un insieme $B \in \mathcal{B}$ tale che $B \in \mathcal{A}_i$. Posto $\mathcal{A} = \bigcap_i \mathcal{A}_i$, si dirà che $\{\mathcal{A}_i\}_i$ è *satura* (risp. *numerabilmente satura*) se da ogni suo ricoprimento (risp. numerabile) si può estrarre un numero finito di insiemi $B_1, \ldots, B_n$ tale che $\bigcup_{k=1}^{n} B_k \in \mathcal{A}$.

Allora si può dimostrare che $\{\mathcal{A}_i\}_i$ è satura (risp. numerabilmente satura) se e solo se per ogni filtro $\mathcal{F}$ (a base numerabile) risulta $(\mathcal{A}^-, \mathcal{F}^-) = \bigcap_i (\mathcal{A}_i^-, \mathcal{F}^-)$.

Nell'ambito dei filtri la nozione di famiglia satura è già nota (vedi [13], teorema 1.1).

Sia X uno spazio topologico e sia $\mathcal{A}_i$ il filtro degli intorni di un punto i al variare di i in un suo sottoinsieme K, allora K è compatto (o numerabilmente compatto) se e solo se $\{\mathcal{A}_i\}_i$ è satura (o numerabilmente satura).

Osserviamo inoltre che l'ugugaglianza di (3.14) si può riscrivere nel seguente modo: $\bigcup_F \bigcap_i (\mathcal{A}_i^-, \{F\}^-) = \bigcap_i \bigcup_F (\mathcal{A}_i^-, \{F\}^-)$, dove F percorre gli elementi di $\mathcal{F}$. Per cui l'uguaglianza di (3.14) equivale a realizzare una posizione di sella per funzioni a valori nel reticolo dei semifiltri. ∎

OSSERVAZIONE 3.11. – *Una proprietà dei filtri a base numerabile.*

Nella dimostrazione del teorema 3.7 è stata usata una proprietà dei filtri a base numerabile, che ci accingiamo a enucleare. Sia $\mathcal{F}$ un filtro a base numerabile. Il semifiltro $(\boldsymbol{N}^-, \mathcal{F}^-)$ è il prodotto del filtro dei sottoinsiemi cofiniti di $\boldsymbol{N}$ con il filtro $\mathcal{F}$. Per ogni numero naturale m sia $\mathcal{E}_m$ un filtro elementare più fine di $(\boldsymbol{N}^-, \mathcal{F}^-)$; cioè $\mathcal{E}_m \equiv \{(n_k, x_k^m)\}_k$ per qualche successione di naturali $\{n_k\}_k$ convergente verso ∞ e per qualche successione $\{x_k^m\}_k$ più fine di $\mathcal{F}$. Allora si può dimostrare che esiste una successione $\{x_n^0\}_n$ più fine di $\mathcal{F}$ tale che $\{(n, x_n^0)\}_n \subset \mathcal{E}_m^\#$ per ogni m. Un filtro avente questa *proprietà di densità* e verificante la seguente *proprietà di saturazione*: «la famiglia dei suoi filtri elementari è numerabilmente satura», è un filtro a base numerabile? ∎

OSSERVAZIONE 3.12. – Sia $\mathcal{F}$ un filtro a base numerabile. Siano $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_i$ semifiltri su X. Consideriamo le seguenti relazioni:

$$\Gamma(\mathcal{A}^-, \mathcal{F}^-)\lim = \inf_i \Gamma(\mathcal{A}_i^-, \mathcal{F}^-)\lim \quad \textit{per ogni } \mathcal{F} \tag{3.24}$$

$$\Gamma(\mathcal{A}^-, \mathcal{F}^+)\lim = \sup_i \Gamma(\mathcal{A}_i^-, \mathcal{F}^+)\lim \quad \textit{per ogni } \mathcal{F}\,. \tag{3.25}$$

In virtù della proposizione 3.5, la (3.24) vale su ogni reticolo completamente distributivo se e solo se vale (3.13). Mentre la (3.25) vale se e solo se

$$\liminf_{\mathcal{A}} f = \max_i \liminf_{\mathcal{A}_i} f \quad \text{per ogni } f\colon X \to \overline{\boldsymbol{R}}\,. \tag{3.26}$$

Ciò significa che ricercare modi diversi di esprimere Γ-limiti di funzioni di due (o di $n+1$) variabili a valori in un qualsiasi reticolo completamente distributivo (vedi (3.24) e (3.25)) è possedere sufficienti informazioni sul raggiungimento di particolari estremizzazioni riguardanti i Γ-limiti di funzioni numeriche di una (o di n) variabili (vedi (3.13) e (3.26)). Questa è stata l'idea conduttrice seguita nelle dimostrazioni dei teoremi 3.2 e 3.7, e, forse, è pure una buona idea per la risoluzione del problema aperto accennato sopra. ■

4. – Γ-limiti sequenziali.

In [8] E. DE GIORGI e T. FRANZONI introducono i Γ-limiti di successioni di funzioni numeriche di una variabile, dandone le espressioni sequenziali (vedi teorema 3.1 [8]), qualora gli spazi topologici in gioco siano metrici o, più generalmente, soddisfino il 1° assioma di numerabilità. Successivamente con l'introduzione di DE GIORGI in [6] dei Γ-limiti di funzioni numeriche di più variabili, G. BUTTAZZO dà le espressioni sequenziali dei Γ-limiti di funzioni di due variabili (vedi teorema 3.3 [2]). Una riformulazione dei suddetti teoremi di De Giorgi, Franzoni e di Buttazzo è la seguente.

TEOREMA 4.1 (DE GIORGI, FRANZONI [8]). – *Per ogni filtro $\mathcal{G}$ su Y a base numerabile e per ogni funzione f: $\boldsymbol{N}\times Y \to \overline{\boldsymbol{R}}$ valgono*:

$$\Gamma(\boldsymbol{N}^-, \mathcal{G}^-)\lim f = \min_{\{y_n\}_n\supset\mathcal{G}} \ \liminf_{n\to+\infty} f(n, y_n) \tag{4.1}$$

$$\Gamma(\boldsymbol{N}^+, \mathcal{G}^-)\lim f = \min_{\{y_n\}_n\supset\mathcal{G}} \ \limsup_{n\to+\infty} f(n, y_n)\,. \quad ■ \tag{4.2}$$

TEOREMA 4.2 (BUTTAZZO [2]). – *Per ogni coppia di filtri $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ a basi numerabili, rispettivamente, su X e su Y e per ogni funzione f: $X\times Y\to\overline{\boldsymbol{R}}$ valgono*:

$$\Gamma(\mathcal{F}^-, \mathcal{G}^-)\lim f = \min_{\{x_n\}_n\supset\mathcal{F}} \ \min_{\{y_n\}_n\supset\mathcal{G}} \ \liminf_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) \tag{4.3}$$

$$\Gamma(\mathcal{F}^+, \mathcal{G}^-)\lim f = \max_{\{x_n\}_n\supset\mathcal{F}} \ \min_{\{y_n\}_n\supset\mathcal{G}} \ \limsup_{n\to+\infty} f(x_n, y_n)\,. \quad ■ \tag{4.4}$$

In [16] estendendo la definizione di Γ-limite alle convergenze pseudotopologiche, G. MOSCARIELLO propone una definizione di «Γ-limiti sequenziali» equivalente a quella di De Giorgi, Franzoni per successioni di funzioni di una variabile (vedi prop. 1.7 [16]), ma non equivalente a quella di De Giorgi per funzioni di due variabili, come si mostra nel seguente esempio.

ESEMPIO 4.3. – Sia Ω un sottoinsieme di $[0, 1]^2$ definito da $\Omega = \{(x_n^t, y_m^t): t \in [0, 1)$ e $n, m \in \boldsymbol{N}\}$, dove $x_n^t = 2^{-n}(1 - t/2)$ e dove la successione $\{y_n^t\}_n$ al variare di t descrive in maniera univoca tutte le successioni in $[0, 1]$ convergenti verso zero (questo è possibile perchè la cardinalità dell'insieme di tutte queste successioni è quella del continuo). Allora il Γ-limite di De Giorgi $\Gamma(\mathcal{N}(0)^+, \mathcal{N}(0)^-)\lim \chi_\Omega$, dove $\mathcal{N}(0)$ è il filtro degli intorni di zero in $[0, 1]$, è uguale a zero; mentre il Γ-limite di Moscariello $\Gamma(\boldsymbol{F}^+, \boldsymbol{F}^-)\lim \chi_\Omega$, dove $\boldsymbol{F}$ è la famiglia dei filtri elementari su $[0, 1]$ più fini di $\mathcal{N}(0)$, è uguale ad uno (vedi (2.18)). In altre parole si è verificato che il sostegno $(\mathcal{N}(0)^+, \mathcal{N}(0)^-)$ del Γ-limite di De Giorgi è diverso dal sostegno $\bigcap_{\mathcal{E}\supset\mathcal{N}(0)} (\mathcal{N}(0)^+, \mathcal{E}^-)$ del Γ-limite di Moscariello. ■

In [3] G. BUTTAZZO e G. DAL MASO propongono una diversa definizione di « Γ-limite sequenziale » di successioni di funzioni numeriche di più variabili.

Riformuliamo la definizione data in [3] solo per filtri a base numerabile (i quali possono essere i filtri degli intorni di qualche punto di uno spazio topologico con il 1° assioma di numerabilità).

Nelle definizioni e negli enunciati che seguono con L si indicherà sempre un reticolo completamente distributivo, per esempio: la retta estesa $\overline{\boldsymbol{R}}$, il reticolo delle parti di un insieme, quello dei semifiltri....

Siano $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_k$ dei filtri a basi numerabili, rispettivamente, su $X_1, \ldots, X_k$; e sia $f\colon \boldsymbol{N}\times X_1\times\ldots\times X_k \to L$ una qualsiasi funzione. Siano $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ segni qualsiasi. Si pone:

$$\Gamma_{\text{seq}}(\boldsymbol{N}^{\alpha_0}, \mathcal{F}_1^{\alpha_1}, \ldots, \mathcal{F}_k^{\alpha_k}) \lim f = \underset{\{x_n^1\}_n\supset\mathcal{F}_1}{\operatorname{ext}^{\alpha_1}} \ldots \underset{\{x_n^k\}_n\supset\mathcal{F}_k}{\operatorname{ext}^{\alpha_k}}\ \underset{m\in\boldsymbol{N}}{\operatorname{ext}^{-\alpha_0}}\ \underset{n\geqslant m}{\operatorname{ext}^{\alpha_0}} f(n, x_n^1, \ldots, x_n^k)\,.$$

Contrariamente alle aspettative (vedi nota 2.1 in [3] e fine del § 1 in [10]) la definizione di Γ-limite sequenziale, proposta in [3], non è in generale equivalente a quella data da DE GIORGI in [6] nel caso di spazi topologici verificanti il 1° assioma di numerabilità.

I Γ_{seq}-limiti sono limitoidi. Il loro sostegno è la famiglia di insiemi $(\boldsymbol{N}^{\alpha_0}, \mathcal{F}_1^{\alpha_1}, \ldots, \mathcal{F}_k^{\alpha_k})_{\text{seq}}$ definita in (3.22). Quindi da (3.23) segue:

TEOREMA 4.4. – *Per ogni funzione $f\colon \boldsymbol{N}\times X_1\times\ldots\times X_k\to L$ valgono le disuguaglianze*

$$\Gamma_{\text{seq}}(\boldsymbol{N}^-, \mathcal{F}_1^{\alpha_1}, \ldots, \mathcal{F}_k^{\alpha_k}) \lim f \leqslant \Gamma(\boldsymbol{N}^-, \mathcal{F}_1^{\alpha_1}, \ldots, \mathcal{F}_k^{\alpha_k}) \lim f \leqslant \\ \leqslant \Gamma(\boldsymbol{N}^+, \mathcal{F}_1^{\alpha_1}, \ldots, \mathcal{F}_k^{\alpha_k}) \lim f \leqslant \Gamma_{\text{seq}}(\boldsymbol{N}^+, \mathcal{F}_1^{\alpha_1}, \ldots, \mathcal{F}_k^{\alpha_k}) \lim f \tag{4.5}$$

qualunque siano i segni $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ e i filtri $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_k$ a basi numerabile, rispettivamente, su $X_1, \ldots, X_k$. ■

Dal corollario 3.8 segue

TEOREMA 4.5. – *Per ogni terna di filtri $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ a basi numerabili si ha:*

$$\Gamma(\boldsymbol{N}^-, \mathcal{F}^-, \mathcal{G}^+, \mathcal{H}^-) \lim = \Gamma_{\text{seq}}(\boldsymbol{N}^-, \mathcal{F}^-, \mathcal{G}^+, \mathcal{H}^-) \lim; \tag{4.6}$$

mentre esistono dei filtri $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ a basi numerabili tali che:

$$\Gamma(\boldsymbol{N}^+, \mathcal{F}^-, \mathcal{G}^+, \mathcal{H}^-) \lim \neq \Gamma_{\text{seq}}(\boldsymbol{N}^+, \mathcal{F}^-, \mathcal{G}^+, \mathcal{H}^-) \lim\,. \tag{4.7}$$ ■

Dunque per $k \geqslant 4$, qualunque siano i segni α_0, α_1 esistono dei filtri $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k$ a basi numerabili ed esistono dei segni $\alpha_2, \dots, \alpha_k$ tali che $\Gamma(N^{\alpha_0}, \mathcal{F}_1^{\alpha_1}, \mathcal{F}_2^{\alpha_2}, \dots, \mathcal{F}_k^{\alpha_k}) \lim \neq \Gamma_{\mathrm{seq}}(N^{\alpha_0}, \mathcal{F}_1^{\alpha_1}, \mathcal{F}_2^{\alpha_2}, \dots, \mathcal{F}_k^{\alpha_k}) \lim$.

Nel caso che $k=1$ o $k=2$ si ha uguaglianza fra Γ_{seq}-limiti e Γ-limiti; per $k=1$ si veda il teorema 3.1; per $k=2$ si veda (3.7), (3.8), (3.9) e (3.10).

Nel caso di funzioni numeriche espressioni più complete dei Γ-limiti mediante successioni sono ottenibili dall'applicazione ripetuta della seguente proposizione; la cui dimostrazione è un'implicazione del teorema 3.9 e di quanto lo segue, in virtù della proposizione 3.5.

PROPOSIZIONE 4.6. – *Sia $\mathcal{E} \equiv \{x_n\}_n$ un filtro elementare su X e siano, $\mathcal{F}, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k$ dei filtri a basi numerabili su $Y, X_1, \dots, X_k$. Allora per ogni funzione $f\colon X \times Y \times X_1 \times \dots \times X_k \to \overline{\boldsymbol{R}}$ si ha*

$$\Gamma(\{x_n\}_n^-, \mathcal{F}^-, \mathcal{F}_1^{\alpha_1}, \dots, \mathcal{F}_k^{\alpha_k}) \lim f = \min_{\{y_n\}_n \supset \mathcal{F}} \Gamma(\{(x_n, y_n)\}_n^-, \mathcal{F}_1^{\alpha_1}, \dots, \mathcal{F}_k^{\alpha_k}) \lim f \tag{4.8}$$

qualunque siano i segni $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Se inoltre $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \dots \geqslant \alpha_k$ si ha

$$\Gamma(\{x_n\}_n^-, \mathcal{F}^+, \mathcal{F}_1^{\alpha_1}, \dots, \mathcal{F}_k^{\alpha_k}) \lim f = \sup_{\{y\}_n \supset \mathcal{F}} \Gamma(\{(x_n, y_n)\}_n^-, \mathcal{F}_1^{\alpha_1}, \dots, \mathcal{F}_k^{\alpha_k}) \lim f\,. \tag{4.9}$$

In quest'ultima uguaglianza si può cambiare il « sup » *in* « max » *se $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = +$; in caso contrario si possono scegliere i filtri e la funzione in modo che il* « sup » *non sia raggiunto.* ■

Nuove informazioni sulle espressioni sequenziali dei Γ-limiti, che ne derivano, sono date nei seguenti teoremi.

TEOREMA 4.7. – *Siano $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ dei filtri a basi numerabili su X e su Y. Allora per ogni funzione $f\colon \boldsymbol{N} \times X \times Y \to \overline{\boldsymbol{R}}$ risulta*

$$\Gamma(\boldsymbol{N}^+, \mathcal{F}^+, \mathcal{G}^-) \lim f = \max_{\{x\}_n \supset \mathcal{F}} \min_{\{y_n\}_n \supset \mathcal{G}} \limsup_{n \to +\infty} f(n, x_n, y_n) \tag{4.10}$$

$$\Gamma(\boldsymbol{N}^-, \mathcal{F}^+, \mathcal{G}^-) \lim f = \sup_{\{x_n\}_n \supset \mathcal{F}} \min_{\{y_n\}_n \supset \mathcal{G}} \liminf_{n \to +\infty} f(n, x_n, y_n); \tag{4.11}$$

in quest'ultima uguaglianza il « sup » *può non essere raggiunto.* ■

TEOREMA 4.8. – *Siano $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ dei filtri a basi numerabili su X, Y, Z. Allora per ogni funzione $f\colon \boldsymbol{N} \times X \times Y \times Z \to \overline{\boldsymbol{R}}$ risulta:*

$$\Gamma(\boldsymbol{N}^-, \mathcal{F}^-, \mathcal{G}^+, \mathcal{H}^-) \lim f = \min_{\{x_n\}_n \supset \mathcal{F}} \sup_{\{y_n\}_n \supset \mathcal{G}} \min_{\{z_n\}_n \supset \mathcal{H}} \liminf_{n \to +\infty} f(n, x_n, y_n, z_n)\,. \tag{4.12}$$ ■

Ora vogliamo precisare meglio la novità del teorema 4.7. Anzitutto consideriamo il seguente esempio che conferma che il « sup » che compare in (4.11) può non essere raggiunto.

ESEMPIO 4.9. – Sia $\tilde{f}\colon \boldsymbol{N}\times[0,1]\times[0,1]\to\overline{\boldsymbol{R}}$, definita da $\tilde{f}(n,x,y)=-g(x,y)$, dove g è la funzione costruita nell'esempio 3.6. Allora si ha

$$\Gamma(\boldsymbol{N}^-,\mathcal{N}(0)^+,\mathcal{N}(0)^-)\lim\tilde{f}=0 \tag{4.13}$$

e

$$\min\{\liminf_{n\to+\infty}\tilde{f}(n,x_n,y_n)\colon \{y_n\}_n\subset[0,1] \text{ converge verso } 0\}<0 \tag{4.14}$$

per ogni successione $\{x_n\}_n\subset[0,1]$ convergente verso 0. Infatti, tenendo conto di quanto si è visto nell'esempio 3.6 a proposito della funzione g, si ottiene $\Gamma(\boldsymbol{N}^-,\mathcal{N}(0)^+,\mathcal{N}(0)^-)\lim\tilde{f}=-\Gamma(\mathcal{N}(0)^-,\mathcal{N}(0)^+)\lim g=0$ e $\min\{\liminf_{n\to+\infty}\tilde{f}(n,x_n,y_n)\colon\{y_n\}_n\subset$ $\subset[0,1]$ converge verso $0\}=-\Gamma(\{x_n\}_n^+,\mathcal{N}(0)^+)\lim g<0$. ■

Diversamente da quanto si afferma nel teorema 4.7, H. ATTOUCH e R. WETS affermano che in (4.11) il «sup» è raggiunto (vedi proposizione 4.35 in [1]): questo equivarrebbe ad ammettere che in (4.7) vale l'uguaglianza qualunque siano i filtri a base numerabile.

Il fatto che in (4.10) si abbia un «max» invece che solamente un «sup», non è inessenziale: permette di avere l'uguaglianza (4.12). Notiamo che, sempre in [1], si può trovare una formula simile alla (4.10) con il «sup» al posto del «max».

Usando la proposizione 4.35 di [1], in [4] (cfr. prop. 1) e in [5] (cfr. teor. 2.2) si afferma che, nel caso di filtri $\mathcal{F},\mathcal{G}$ a base numerabile, le uguaglianze «$c=\Gamma(\boldsymbol{N}^-,\mathcal{F}^+,\mathcal{G}^-)\lim f=\Gamma(\boldsymbol{N}^+,\mathcal{F}^+,\mathcal{G}^-)\lim f$» comportano le seguenti relazioni:

(*a*) $\forall\{x_n\}_n\supset\mathcal{F},\ \exists\{y_n\}_n\supset\mathcal{G}\colon \limsup_{n\to+\infty} f(n,x_n,y_n)\leqslant c$;

(*b*) $\exists\{x_n\}_n\supset\mathcal{F},\ \forall\{y_n\}_n\supset\mathcal{G}\colon \liminf_{n\to+\infty} f(n,x_n,y_n)\geqslant c$.

Ciò in generale non è del tutto evidente. Infatti per la funzione $\tilde{f}$, dell'esempio precedente, risulta $\Gamma(\boldsymbol{N}^-,\mathcal{F}^+,\mathcal{G}^-)\lim\tilde{f}=\Gamma(\boldsymbol{N}^+,\mathcal{F}^+,\mathcal{G}^-)\lim\tilde{f}=0$, dove $\mathcal{F}=\mathcal{G}=$ $=\mathcal{N}(0)$; mentre la (*b*) non è verificata.

Mediante la funzione g dell'esempio 3.6 si può rilevare un insospettato inconveniente dei Γ-limiti sequenziali rispetto ai Γ-limiti di De Giorgi; cioè può accadere che un Γ-limite sequenziale di una funzione dipenda dalla variabile naturale senza che la funzione dipenda. Infatti, denotata con $\chi_{\boldsymbol{N}\times\Omega}$ la funzione caratteristica dell'insieme $\boldsymbol{N}\times\Omega$, dove Ω è il sottografico di g, risulta

$$0=\Gamma_{\text{seq}}(\boldsymbol{N}^-,\mathcal{F}^-,\mathcal{F}^+,\mathcal{F}^-)\lim\chi_{\boldsymbol{N}\times\Omega}\neq\Gamma_{\text{seq}}(\boldsymbol{N}^+,\mathcal{F}^-,\mathcal{F}^+,\mathcal{F}^-)\lim\chi_{\boldsymbol{N}\times\Omega}=1$$

dove $\mathcal{F}=\mathcal{N}(0)$.

Concludiamo questo paragrafo con due esempi; il primo riguarda e rafforza alcuni lemmi di diagonalizzazione presenti in [1], il secondo dà un'espressione sequenziale di un Γ-limite insolito per la letteratura usuale.

ESEMPIO 4.10. – *Lemmi di diagonalizzazione.*

Sia $\mathcal{F}$ un filtro a base numerabile su un insieme X e sia f una funzione numerica definita su $\boldsymbol{N}\times X$. Sostituendo in (2.12) e in (2.13) le famiglie d'insiemi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, che ivi compaiono, con il filtro dei cofiniti su $\boldsymbol{N}$ e con $\mathcal{F}$, si ottiene che esistono due successioni $\{x_n\}_n$, $\{y_n\}_n$ più fini di $\mathcal{F}$ tali che:

$$\liminf_{x,\mathcal{F}} \big(\liminf_{n\to+\infty} f(n,x)\big) \geqslant \liminf_{n\to+\infty} f(n,x_n) \tag{4.15}$$

$$\limsup_{x,\mathcal{F}} \big(\liminf_{n\to+\infty} f(n,x)\big) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} f(n,y_n)\,, \tag{4.16}$$

in virtù del teorema 4.1 di De Giorgi, Franzoni. Se in queste disuguaglianze si sceglie, come filtro $\mathcal{F}$, il filtro dei cofiniti sull'insieme dei naturali, allora si può osservare un rafforzamento del lemma A.1 di ATTOUCH, WETS [1]. Questi in [1] presentano altri lemmi di diagonalizzazione, dimostrati per via diretta, ma dimostrabili via il teorema di De Giorgi, Franzoni prendendo su X il filtro $\{X\}$ o, in altre parole, considerando su X la topologia che ha come unico aperto l'insieme X. ■

ESEMPIO 4.11. – Sia X uno spazio topologico ed x_0 un suo punto. Sia f una funzione definita su $\boldsymbol{N}\times X$ e a valori in $\overline{\boldsymbol{R}}$ o, più in generale, in un reticolo completamente distributivo. Supponiamo che il filtro $\mathcal{F}$ degli intorni di x_0 sia a base numerabile. Allora dalla definizione di Γ-limite risulta

$$\Gamma(\boldsymbol{N}^+, \mathcal{F}^{\#-}) \lim f = \sup_{x_0\in \bar{A}} \limsup_{n\to+\infty} \inf_{x\in A} f(n,x)\,.$$

L'espressione sequenziale di questo Γ-limite è $\sup\limits_{x_n\to x_0} \inf\limits_{n_k\to+\infty} \limsup\limits_{k\to+\infty} f(k, x_{n_k})$, in virtù del teorema 3.1. ■

5. – *K*-limiti di epi e ipografici e *Γ*-limiti di funzioni numeriche.

L'uso della nozione di «sostegno di un limite» permette di descrivere alcune proprietà dei Γ-limiti in termini dell'epi- e dell'ipografico della funzione su cui agisce il Γ-limite con il duplice vantaggio di unificare una gran varietà di teoremi già noti (vedi [1], [2], [9] e [11]) e di ottenere informazioni sugli epi- e ipografici di un Γ-limite, qualunque siano i segni che intervengono nella definizione del Γ-limite. Lo strumento per ottenere le suddette proprietà è costituito dai K-limiti introdotti da DE GIORGI in [8] (chiamati «G-limiti» in [8] e «K-limiti» in [18]).

Sia $\mathcal{A}$ una base di semifiltro definito su X. Siano (Y,τ), (Z,σ) due spazi topologici, i cui sistemi di intorni sono indicati con $\mathcal{N}_\tau$ e $\mathcal{N}_\sigma$. Sia $E\subset X\times Y\times Z$ e $E'\subset Y\times Z$; si pone

$$K(\mathcal{A}^-;\tau^\alpha,\sigma^\beta)\lim E = E'$$

se $\Gamma(\mathcal{A}^-,\tau^\alpha,\sigma^\beta)\lim \chi_E = \chi_{E'}$; l'insieme E' è detto, in breve, *K-limite* di E.

Un punto (x, y) appartiene a $K(\mathcal{A}^-; \tau^\alpha, \sigma^\beta) \lim E$ se e solo se $E \in (\mathcal{A}^-, \mathcal{N}_\tau(x)^\alpha, \mathcal{N}_\delta(y)^\beta)$.

TEOREMA 5.1. – *K-limiti di epigrafici.*
Sia $f: X \times Y \to \overline{\mathbf{R}}$ una qualsiasi funzione. Allora valgono le seguenti uguaglianze qualunque sia il segno α:

$$K(\mathcal{A}^-; \tau^\alpha, \nu^+) \lim \operatorname{epi}(f) = \operatorname{epi}\big(\Gamma(\mathcal{A}^+, \tau^{-\alpha}) \lim f\big) \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} K(\mathcal{A}^-; \tau^\alpha, \nu^-) \lim \operatorname{epi}(f) = {} & \operatorname{epi}_s\big(\Gamma(\mathcal{A}^+, \tau^{-\alpha}) \lim f\big) \cup \\ & \cup \{(y, -\infty) \in Y \times \overline{\mathbf{R}}: \textit{esiste } F \in (\mathcal{A}^-, \mathcal{N}_\tau(y)^\alpha) \textit{ con } f|_F = -\infty\}. \quad \blacksquare \end{aligned} \tag{5.2}$$

TEOREMA 5.2. – *K-limiti di ipografici.*
Sia $f: X \times Y \to \overline{\mathbf{R}}$ una qualsiasi funzione. Allora valgono le seguenti uguaglianze qualunque sia il segno α:

$$K(\mathcal{A}^-; \tau^\alpha, \nu^+) \lim \operatorname{ipo}(f) = \operatorname{ipo}\big(\Gamma(\mathcal{A}^-, \tau^{\alpha}) \lim f\big) \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned} K(\mathcal{A}^-; \tau^\alpha, \nu^-) \lim \operatorname{ipo}(f) = {} & \operatorname{ipo}_s\big(\Gamma(\mathcal{A}^-, \tau^{\alpha}) \lim f\big) \cup \\ & \cup \{(y, +\infty) \in Y \times \overline{\mathbf{R}}: \textit{esiste } F \in (\mathcal{A}^-, \mathcal{N}_\tau(y)^\alpha) \textit{ con } f|_F = +\infty\}. \quad \blacksquare \end{aligned} \tag{5.4}$$

Altre espressioni dei K-limiti di epi e ipografici sono ottenibili mediante il seguente teorema:

TEOREMA 5.3. – *K-limiti di insiemi.*
Sia $B \subset X \times Y \times Z$ un sottoinsieme qualsiasi. Allora valgono:

$$K(\mathcal{A}^-; \tau^+, \sigma^+) \lim E = \bigcap_{A \in \mathcal{A}^\#} \operatorname{cl}_{\tau \times \sigma}\Big(\bigcup_{x \in A} E(x)\Big) \tag{5.5}$$

$$K(\mathcal{A}^-; \tau^-, \sigma^-) \lim E = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \operatorname{int}_{\tau \times \sigma}\Big(\bigcap_{x \in A} E(x)\Big) \tag{5.6}$$

$$\big(K(\mathcal{A}^-; \tau^\alpha, \sigma^+) \lim E\big)(y_0) = \bigcap_{F \in (\mathcal{A}^+, \mathcal{N}_\tau(y_0)^{-\alpha})} \operatorname{cl}_\sigma\Big(\bigcup_{(x,y) \in F} E(x, y)\Big) \tag{5.7}$$

$$\big(K(\mathcal{A}^-; \tau^\alpha, \sigma^-) \lim E\big)(y_0) = \bigcup_{F \in (\mathcal{A}^-, \mathcal{N}_\tau(y_0)^{\alpha})} \operatorname{int}_\sigma\Big(\bigcap_{(x,y) \in F} E(x, y)\Big). \quad \blacksquare \tag{5.8}$$

La preferenza accordata nei teoremi precedenti agli spazi topologici è giustificata solo dal fatto che solitamente nella letteratura sui Γ-limiti sono usate le topologie. In realtà i suddetti teoremi continuano a valere qualora si sostituisca la topologia τ su un insieme Y con un selettore $\mathcal{M}: Y \to \mathbf{bsf}\, Y$. In tal caso si dovrà porre per ogni insieme $A \subset Y$: $\operatorname{cl}_{\mathcal{M}} A = \{y \in Y: A \in \mathcal{M}(y)^\#\}$ e $\operatorname{int}_{\mathcal{M}} A = \operatorname{cl}_{\mathcal{M}^\#}(A) = \{y \in Y:$ esiste $V \in \mathcal{M}(y)$ tale che $V \subset A\}$ $\big(= (\operatorname{cl}_{\mathcal{M}}(A^c))^c$, dove «^{c}» è l'operatore del complementare in $Y\big)$. Notiamo che se $\mathcal{M}$ è il sistema degli intorni di una topologia τ su Y, allora $\operatorname{cl}_{\mathcal{M}} = \operatorname{cl}_\tau$ e $\operatorname{int}_{\mathcal{M}} = \operatorname{int}_\tau$.

Osserviamo pure che ogni catena completa può svolgere lo stesso ruolo di $\overline{\boldsymbol{R}}$ nei teoremi 5.1, 5.2. In altre parole, se con ν si intende l'usuale topologia di una catena completa, allora per ogni funzione f, a valori in essa, continuano a valere le proprietà (5.1), (5.3) e, mutatis mutandis (vedi il lemma 5.4), la (5.2), (5.4).

I teoremi precedenti permettono di esprimere in termini di K-limiti, o in termini di limiti inferiori o superiori (calcolati nel reticolo completo — ma non completamente distributivo — degli insiemi chiusi dello spazio topologico in questione) gli epi e ipografici di un qualsiasi Γ-limite. Si ottengono così estensioni di diversi teoremi; vedi 1.12 in [2], 1.21 in [9], 4.6 in [11] e 4.17, 4.32 in [1].

Inoltre osserviamo che mediante la formula

$$K(\mathcal{A}^{\gamma};\tau^{\alpha},\sigma^{\beta})\lim E=\big(K(\mathcal{A}^{-\gamma};\tau^{-\alpha},\sigma^{-\beta})\lim(E^{c})\big)^{c},$$

dai teoremi 5.1 e 5.2 è possibile calcolare i K-limiti degli epi_s- e ipo_s-grafici di una qualsiasi funzione numerica. Notiamo che si pone $\mathrm{epi}_s(f)=(\mathrm{ipo}(f))^{c}=\{(z,t):f(z)<t\}$ e $\mathrm{ipo}_s(f)=(\mathrm{epi}(f))^{c}=\{(z,t)\ f(z)>t\}$.

La dimostrazione dei precedenti teoremi segue direttamente dai seguenti due lemmi; più esattamente i teoremi 5.1 e 5.2 seguono dal lemma 5.4, mentre il teorema 5.3 segue dal lemma 5.5.

LEMMA 5.4. – *Sia $\mathcal{B}$ un semifiltro su un insieme S. Sia C una catena completa e ν la topologia degli intervalli su C; siano g una funzione definita su X a valori in L e t un elemento di C. Allora valgono:*

(5.9) $\quad \mathrm{epi}(g)\in(\mathcal{B}^{-},\mathcal{N}_{\nu}(t)^{+})\Leftrightarrow \limsup_{\mathcal{B}} g\leqslant t$

(5.10) $\quad \mathrm{ipo}(g)\in(\mathcal{B}^{-},\mathcal{N}_{\nu}(t)^{+})\Leftrightarrow \liminf_{\mathcal{B}} g\geqslant t$

(5.11) *se* $[t,1_C]$ *non è aperto per* ν:

$$\mathrm{epi}(g)\in(\mathcal{B}^{-},\mathcal{N}_{\nu}(t)^{-})\Leftrightarrow \limsup_{\mathcal{B}} g<t$$

(5.12) *se* $[t,1_C]$ *è aperto per* ν:

$$\mathrm{epi}(g)\in(\mathcal{B}^{-},\mathcal{N}_{\nu}(t)^{-})\Leftrightarrow \textit{esiste } A\in\mathcal{B} \textit{ tale che } g|_A\leqslant t$$

(5.13) *se* $[0_C,t]$ *non è aperto per* ν:

$$\mathrm{ipo}(g)\in(\mathcal{B}^{-},\mathcal{N}_{\nu}(t)^{-})\Leftrightarrow \liminf_{\mathcal{B}} g>t$$

(5.14) *se* $[0_C,t]$ *è aperto per* ν:

$$\mathrm{ipo}(g)\in(\mathcal{B}^{-},\mathcal{N}_{\nu}(t)^{-})\Leftrightarrow \textit{esiste } A\in\mathcal{B} \textit{ tale che } g|_A\geqslant t. \quad\blacksquare$$

LEMMA 5.5. – *Sia $\mathcal{B}$ un semifiltro su un insieme S e $\mathcal{M}$: $Y\to$* **bsf** *Y un selettore.*

Allora valgono le seguenti equivalenze per ogni $E \subset S \times Y$ e $y \in Y$:

$$E \in (\mathcal{B}^-, \mathcal{M}(y)^+) \Leftrightarrow y \in \bigcap_{A \in \mathcal{B}^\#} \mathrm{cl}_{\mathcal{M}} \Big(\bigcup_{s \in A} E(s) \Big) \tag{5.15}$$

$$E \in (\mathcal{B}^-, \mathcal{M}(y)^-) \Leftrightarrow y \in \bigcup_{A \in \mathcal{B}} \mathrm{int}_{\mathcal{M}} \Big(\bigcap_{s \in A} E(s) \Big). \tag{5.16}$$ ∎

Diamo un saggio della semplicità delle dimostrazioni dei teoremi precedenti. Per esempio si vuol verificare la proprietà (5.1). Allora un punto $(y, t) \in K(\mathcal{A}^-; \tau^\alpha, \nu^+) \lim \mathrm{epi}\,(f)$ se e solo se $\mathrm{epi}\,(f) \in (\mathcal{A}^-, \mathcal{N}_\tau(y)^\alpha, \mathcal{N}_\nu(t)^+)$. Perciò da (5.9) e (2.10) si ottiene che $(y, t) \in K(\mathcal{A}^-; \tau^\alpha, \nu^+) \lim \mathrm{epi}\,(f)$ se e solo se

$$\Gamma(\mathcal{A}^+, \mathcal{N}_\tau(y)^{-\alpha}) \lim f = \mathrm{limsup}_{(\mathcal{A}^-, \mathcal{N}_\sigma(y)^\alpha)} f \leqslant t\,.$$

Da cui si ottiene quanto si voleva dimostrare.

Analogamente a quanto visto sopra possono essere definiti i K-limiti del tipo « $K(\mathcal{A}^-; \tau_1^{\alpha_1}, \tau_2^{\alpha_2}, \ldots, \tau_k^{\alpha_k}) \lim$ », quando $\mathcal{A}$ è una base di semifiltro su X e le τ_i sono topologie su X_i. In tal caso si ha che per ogni insieme $E \subset X \times X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k$ e per ogni punto $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k$ risulta:

$$(x_1, \ldots, x_k) \in K(\mathcal{A}^-; \tau_1^{\alpha_1}, \ldots, \tau_k^{\alpha_k}) \lim E \Leftrightarrow E \in (\mathcal{A}^-, \mathcal{N}_{\tau_1}(x_1)^{\alpha_1}, \ldots, \mathcal{N}_{\tau_k}(x_k)^{\alpha_k})\,.$$

I K-limiti del tipo « $K(\mathcal{A}_1^{\gamma_1}, \ldots, \mathcal{A}_s^{\gamma_s}; \tau_1^{\alpha_1}, \ldots, \tau_k^{\alpha_k}) \lim$ » sono riconducibili ai precedenti, ponendo $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1^{\gamma_1}, \ldots, \mathcal{A}_s^{\gamma_s})$.

Similmente si possono definire i K-limiti del tipo « $K(-; \tau_1^{\alpha_1}, \ldots, \tau_k^{\alpha_k}) \lim$ ». Allora se E è un sottoinsieme di $X_1 \times \ldots \times X_k$ ed $(x_1, \ldots, x_k)$ un punto di $X_1 \times \ldots \times X_k$ si ha che

$$(x_1, \ldots, x_k) \in K(-; \tau_1^{\alpha_1}, \ldots, \tau_k^{\alpha_k}) \lim E \Leftrightarrow E \in (\mathcal{N}_{\tau_1}(x_1)^{\alpha_1}, \ldots, \mathcal{N}_{\tau_k}(x_k)^{\alpha_k})\,.$$

Per ogni tipo di K-limite continuano a valere teoremi analoghi ai precedenti. Per esempio:

$$K(-; \tau_1^{\alpha_1}, \ldots, \tau_k^{\alpha_k}, \nu^+) \lim \mathrm{ipo}\,(f) = \mathrm{ipo}\,(\Gamma(\tau_1^{\alpha_1}, \ldots, \tau_k^{\alpha_k}) \lim f)\,, \tag{5.17}$$

$$K(-; \tau_1^{\alpha_1}, \ldots, \tau_k^{\alpha_k}, \nu^+) \lim \mathrm{epi}\,(f) = \mathrm{epi}\,(\Gamma(\tau_1^{-\alpha_1}, \ldots, \tau_k^{-\alpha_k}) \lim f)\,. \tag{5.18}$$

Vale pure questa relazione tra K-limiti di diverso tipo:

$$\begin{aligned}(K(-; \tau_1^{\alpha_1}, \ldots, \tau_s^{\alpha_s}, \tau_{s+1}^{\alpha_{s+1}}, \ldots, \tau_k^{\alpha_k}) \lim E)(x_1, \ldots, x_s) &= \\ = K(\mathcal{N}_{\tau_1}(x_1)^{\alpha_1}, \ldots, \mathcal{N}_{\tau_s}(x_s)^{\alpha_s}; \tau_{s+1}^{\alpha_{s+1}}, \ldots, \tau_s^{\alpha_s}) \lim (E(x_1, \ldots, x_s))\,.&\end{aligned} \tag{5.19}$$

OSSERVAZIONE 5.6. – L'appartenenza di un punto a un K-limite di un insieme E è espressa mediante l'appartenenza di E al sostegno del Γ-limite corrispondente.

D'altra parte nel § 3 si è visto che in alcuni casi si può decomporre il sostegno di un Γ-limite mediante filtri elementari. Quindi quando $\tau_1, \ldots, \tau_k$ sono topologie verificanti il primo assioma di numerabilità si potrà in alcuni casi dare una caratterizzazione sequenziale dell'appartenenza di un punto ad un K-limite. ■

BIBLIOGRAFIA

[1] H. ATTOUCH - R. J.-B. WETS, *A convergence theory for saddle functions*, Trans. Am. Math. Soc., 1983, to appear.

[2] G. BUTTAZZO, *Su una definizione generale dei Γ-limiti*, Boll. Un. Mat. Ital., (5) **14**-B (1977), pp. 722-744.

[3] G. BUTTAZZO - G. DAL MASO, *Γ-convergence and optimal control problems*, J. Opt. Th. Appl., **32** (1982), pp. 385-407.

[4] E. CAVAZZUTI, *Alcune caratterizzazioni della Γ-convergenza multipla*, Ann. Mat. Pura e Appl., (IV)-**132** (1982), pp. 69-112.

[5] E. CAVAZZUTI, *Γ-limiti multipli e loro caratterizzazioni*, in Atti del convegno di Bressanone, Pitagora Ed. Bologna, (1982), pp. 213-247.

[6] E. DE GIORGI, *Γ-convergenza e G-convergenza*, Boll. Un. Mat. Ital., (5) **14**-A (1977), pp. 213-220.

[7] E. DE GIORGI, *Generalized limits in calculus of variations*, in Topics in functional analysis 1980-81, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (1982), pp. 117-148.

[8] E. DE GIORGI - T. FRANZONI, *Su un tipo di convergenza variazionale*, Atti Ac. Naz. Lincei, (8) **58** (1975), pp. 842-850.

[9] E. DE GIORGI - T. FRANZONI, *Su un tipo di convergenza variazionale*, Rend. Sem. Mat. Brescia, **3** (1979), pp. 63-101.

[10] E. DE GIORGI, *Operatori elementari di limite ed applicazioni al calcolo delle variazioni*, in Atti del Convegno di Bressanone, Pitagora Ed., Bologna, (1982), pp. 101-116.

[11] S. DOLECKI, *Tangency and differentiation: some applications of convergence theory*, Ann. Mat. Pura e Appl., (IV) **130** (1982), pp. 223-255.

[12] S. DOLECKI - G. H. GRECO, *Topologically maximal pretopologies*, Studia Math., **77**, (1983), pp. 265-281.

[13] S. DOLECKI - G. H. GRECO, *Familles pseudotopologiques de filtres et compacité*, C.R. Acad. Sci. Paris, **296** (1983), pp. 211-214.

[14] G. H. GRECO, *Limites et fonctions d'ensembles*, Rend. Sem. Mat. Padova, **72** (1984), to appear.

[15] G. H. GRECO, *Limitoidi e reticoli completi*, Ann. Univ. Ferrara, **29** (1983), pp. 153-164.

[16] G. MOSCARIELLO, *Γ-limiti in spazi con convergenza*, Ric. di Mat. Napoli, **22** (1979), pp. 301-321.

[17] W. SIERPINSKI, *General topology*, Univ. Toronto Press, 1961.

[18] E. DE GIØRGI - T. FRANZONI: *Una presentazione sintetica dei limiti generalizzati*, Port. Math., to appear.