Sulla regolarità della soluzione di un problema variazionale (*) (**).

A. M. Rossi - P. Sambuceti (Genova)

Summary. – *In this paper we study some regularity properties of a solution of a variational problem connected with a free boundary problem.*

Introduzione.

Questo lavoro è nato dall'esigenza di uno studio più approfondito delle proprietà della soluzione di un problema variazionale così formulabile:

dato Ω aperto, limitato, connesso, regolare di $\boldsymbol{R}^n$, $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$, A chiuso di $\bar{\Omega}$, si tratta di determinare $u \in M(\Omega, A, \Gamma_0, 0)$, $\mathfrak{a}(u, f) + \mathfrak{l}(A, f) = 0$ per ogni $f \in M(\Omega, A, \Gamma_0, 0)$, ove $\mathfrak{a}$ è una forma bilineare definita su $M(\Omega, \bar{\Omega}, \Gamma_0, p_0)$, $p_0 \in H^{1,2}(\Omega)$, $M(\Omega, A, \Gamma_0, p_0) = \{u \in H^{1,2}(\Omega)\colon u = 0$ q.o. in $\overline{\Omega \setminus A} \cap \Omega$, $u = p_0$ su Γ_0 nel senso delle tracce$\}$, ed $\mathfrak{l}$ è un funzionale lineare che gode di determinate proprietà.

Tale studio è molto utilizzato in [RS] dove viene esaminata la generalizzazione matematica di un problema di frontiera libera quale quello della filtrazione dell'acqua in un materiale poroso, problema che è stato affrontato da molti studiosi, in particolare H. W. Alt [A], C. Baiocchi [B] e A. Friedman [F].

In questo lavoro dapprima si caratterizzano gli spazi $M(\Omega, A, \Gamma_0, p_0) \subset H^{1,2}(\Omega)$ (§ 0), quindi, trovata l'esistenza di una soluzione del problema variazionale su esposto (teor. 1.2 e sue conseguenze), si danno nel § 1 varie proprietà di regolarità di tale soluzione.

Desideriamo ringraziare il Prof. J. P. Cecconi ed il Prof. M. Chicco con i quali abbiamo discusso i risultati del presente lavoro.

0. – Notazioni e preliminari.

Nel corso del lavoro, se Ω è un aperto di $\boldsymbol{R}^n$ con frontiera lipschitziana (nel senso della def. 1.3, cap. 1 di [N]), intenderemo, a meno di esplicita menzione, che ogni uguaglianza tra funzioni di $H^{1,2}(\Omega)$ su sottoinsiemi di frontiera regolari è intesa come uguaglianza delle rispettive tracce.

(*) Entrata in Redazione il 30 giugno 1983.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'Istituto per la Matematica Applicata del C.N.R. presso l'Università di Genova.

Analogamente negli integrali su frontiera le funzioni vanno intese nel senso delle tracce.

Per ogni $u \in H^{1,2}(\Omega)$ indicheremo con $\partial_j u$ la derivata rispetto alla j-esima variabile nel senso delle distribuzioni, con $\nabla u = (\partial_1 u, \dots, \partial_n u)$ e con

$$\underset{=}{f} = \operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}} \qquad \text{per ogni } f \in \mathfrak{C}_0^1(\Omega) .$$

Se $y \in \boldsymbol{R}^n$ e A è un chiuso di $\boldsymbol{R}^n$, la distanza $d(y, A)$ sarà così definita: $d(y, A) = \inf\{\|x - y\|, x \in A\}$ e analogamente se B è un altro chiuso di $\boldsymbol{R}^n$, $d(A, B) = \inf\{d(y, A), y \in B\}$.

0.1. Definizione. – Siano $\mathfrak{D}$ un aperto di $\boldsymbol{R}^n$, $n \geqslant 2$, con frontiera $\partial\mathfrak{D}$ lipschitziana, F un chiuso di $\boldsymbol{R}^n$, $\Gamma \subset \partial\mathfrak{D}$, Γ chiuso e $v \in H^{1,2}(\mathfrak{D})$. Definiamo:

$$M(\mathfrak{D}, F, \Gamma, v) \;= \{u \in H^{1,2}(\mathfrak{D}) : u = 0 \text{ q.o. in } \overline{\mathfrak{D} \setminus F} \cap \mathfrak{D},\ u = v \text{ su } \Gamma\} ,$$

$$M^+(\mathfrak{D}, F, \Gamma, v) = \{u \in M(\mathfrak{D}, F, \Gamma, v) : u \geqslant 0 \text{ q.o. in } \mathfrak{D}\} .$$

0.2. Osservazione. – Notiamo che $M(\mathfrak{D}, F, \Gamma, v)$ e $M^+(\mathfrak{D}, F, \Gamma, v)$ risultano sottoinsiemi chiusi e convessi di $H^{1,2}(\mathfrak{D})$. Inoltre, se $M(\mathfrak{D}, F, \Gamma, v) \neq \emptyset$ si ha che $v = 0$ su $\Gamma \setminus F$.

Infatti sia $p \in M(\mathfrak{D}, F, \Gamma, v)$, allora $p = 0$ q.o. in $\overline{\mathfrak{D} \setminus F} \cap \mathfrak{D} \supset \mathfrak{D} \setminus F$. Sia quindi $x \in \Gamma \setminus F$; esiste $\delta \in \boldsymbol{R}_+$ tale che $(S(x, \delta) \cap \mathfrak{D}) \cap F = \emptyset$, allora $p = 0$ in $S(x, \delta) \cap \mathfrak{D}$; ma, poichè $\partial\mathfrak{D}$ è lipschitziana, si ha che p ha traccia nulla su $\Gamma \setminus F$, quindi $v = 0$ su $\Gamma \setminus F$.

0.3. Definizione. – Siano $\mathfrak{D}$ come in 0.1, B un sottoinsieme compatto di $\overline{\mathfrak{D}}$ $1 \leqslant p < n$. Definiamo:

$$p - \operatorname{cap}_{\mathfrak{D}} B = \inf\{\|f\|^p_{H^{1,p}(\mathfrak{D})} : f \in \mathfrak{C}^1(\overline{\mathfrak{D}}),\ f \geqslant 1 \text{ in } B\} \tag{0.3.1.}$$

$$p - \operatorname{cap} B = \inf\{\|\nabla f\|^p_{L^p(\boldsymbol{R}^n)} : f \in \mathfrak{C}_0^1(\boldsymbol{R}^n),\ f \geqslant 1 \text{ in } B\} . \tag{0.3.2.}$$

0.4. Osservazione. – Le definizioni (0.3.1.) e (0.3.2.) non sono sempre equivalenti (proposizione in appendice di [C II]), tuttavia se $\mathfrak{D}$ è come in 0.1 (lemma 1 di [C II]) esistono due costanti $K_1(n, p, \mathfrak{D})$ e $K_2(n, p, \mathfrak{D})$ tali che:

$$K_1(n, p, \mathfrak{D}) \operatorname{cap}_{\mathfrak{D}} B \leqslant \operatorname{cap} B \leqslant K_2(n, p, \mathfrak{D}) \operatorname{cap}_{\mathfrak{D}} B .$$

0.5. Definizione. – Sia $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+$, $j_\varepsilon : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ così definita:

$$j_\varepsilon(x) = \begin{cases} k_\varepsilon \exp\big(\varepsilon^2/(|x|^2 - \varepsilon^2)\big) & \text{se } |x| < \varepsilon \\ 0 & \text{se } |x| \geqslant \varepsilon \end{cases} \tag{0.5.1}$$

ove $k_\varepsilon = \Big(\int\limits_{S(0,\varepsilon)} \exp\big(\varepsilon^2/(|x|^2 - \varepsilon^2)\big)\, dx\Big)^{-1}$.

Ovviamente $j_\varepsilon \in \mathfrak{C}_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ e $j_\varepsilon \subset \{x \in \boldsymbol{R}^n : |x| \leqslant \varepsilon\}$.

0.6. Definizione. – Sia $f \in L^p(\mathfrak{D})$, $1 \leqslant p < +\infty$, $\mathfrak{D}$ aperto limitato di $\boldsymbol{R}^n$. Per ogni $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+$ sia $j_\varepsilon * f : \mathfrak{D} \to \boldsymbol{R}$ così definita:

$$(j_\varepsilon * f)(x) = \int j_\varepsilon(x-y) f(y)\, dy .$$

Risulta che $j_\varepsilon * f \in \mathfrak{C}_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ per ogni $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+$; se $\varepsilon \to 0$, $j_\varepsilon * f$ converge ad f in $L^p(\mathfrak{D})$ e $\|j_\varepsilon * f\|_{L^p(\mathfrak{D})} \leqslant \|f\|_{L^p(\mathfrak{D})}$.

0.7. Teorema. – Siano $\mathfrak{D}$ un aperto limitato, connesso di $\boldsymbol{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ con frontiera $\partial\mathfrak{D}$ lipschitziana (def. 1.3, cap. 1 di [N]), $\Gamma \subset \partial\mathfrak{D}$, Γ chiuso e tale che $2-$ $-\operatorname{cap}_{\mathfrak{D}}(\Gamma \cap \overline{(\partial\mathfrak{D} \setminus \Gamma)}) = 0$. Allora se $u \in H^{1,2}(\mathfrak{D})$ è nulla su Γ nel senso delle tracce, $u = 0$ su Γ nel senso di $H^{1,2}(\mathfrak{D})$.

Dimostrazione. – Sia $\psi \in \mathfrak{C}_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ tale che $\psi \cap \overline{(\partial\mathfrak{D} \setminus \Gamma)} = \emptyset$, allora, in quanto $u \in H^{1,2}(\mathfrak{D})$, $\psi u \in H^{1,2}(\mathfrak{D})$. Mostriamo che $\psi u \in H_0^{1,2}(\mathfrak{D})$. Poichè u ha traccia nulla su Γ, esiste una successione $(u_j)_{j \in \boldsymbol{N}}$ tale che $u_j \in \mathfrak{C}^1(\overline{\mathfrak{D}})$, $u_j \to u$ in $H^{1,2}(\mathfrak{D})$ e $u_j \to 0$ in $L^2(\Gamma)$, allora la successione $(\psi u_j)_{j \in \boldsymbol{N}} \subset \mathfrak{C}^1(\overline{\mathfrak{D}})$, essendo nulla su $\partial\mathfrak{D} \setminus \Gamma$ e tale che $\psi u_j \to 0$ in $L^2(\Gamma)$, soddisfa: $\psi u_j \to 0$ in $L^2(\partial\mathfrak{D})$.

Quindi dal fatto che $\psi u_j \to \psi u$ in $H^{1,2}(\mathfrak{D})$, dalle considerazioni precedenti segue che $\psi u \in H_0^{1,2}(\mathfrak{D})$.

Sia a questo punto $A_\psi = \{x \in \boldsymbol{R}^n : \psi(x) = 1\}$; mostriamo che $u = 0$ su $A_\psi \cap \Gamma$ nel senso di $H^{1,2}(\mathfrak{D})$.

Poichè $\psi u \in H_0^{1,2}(\mathfrak{D})$ e pertanto è nulla nel senso di $H^{1,2}(\mathfrak{D})$ su $\partial\mathfrak{D} \supset A_\psi \cap \Gamma$ e $u = (u - \psi u) + \psi u$, è sufficiente mostrare che $(u - \psi u) = 0$ su $A_\psi \cap \Gamma$ nel senso di $H^{1,2}(\mathfrak{D})$.

Ma, per quanto visto, $u_j - \psi u_j \in \mathfrak{C}^1(\overline{\mathfrak{D}})$, $u_j - \psi u_j \to u - \psi u$ in $H^{1,2}(\mathfrak{D})$, $u_j - \psi u_j = 0$ in $A_\psi \cap \overline{\mathfrak{D}} \supset A_\psi \cap \Gamma$, quindi $u - \psi u = 0$ su $A_\psi \cap \Gamma$ nel senso di $H^{1,2}(\mathfrak{D})$.

Per ogni $x \in \Gamma \setminus \overline{(\partial\mathfrak{D} \setminus \Gamma)}$, sia $\delta_x = d(x, \overline{(\partial\mathfrak{D} \setminus \Gamma)})$. Allora $\{S(x, \delta_x/4),\ x \in \Gamma \setminus \overline{(\partial\mathfrak{D} \setminus \Gamma)}\}$ è un ricoprimento di aperti di $\Gamma \setminus \overline{(\partial\mathfrak{D} \setminus \Gamma)}$ e per il teorema di Lindelöff è possibile estrarre da questo un sottoricoprimento numerabile $\{S(x_n, \delta_{x_n}/4) : n \in \boldsymbol{N}\}$.

Tenendo conto delle notazioni di 0.6., consideriamo ora: $\psi_n = j_{\delta_{x_n}/4} * \chi_{S(x_n, \delta_{x_n}/2)} \in$ $\in \mathfrak{C}_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$, con $\chi_{S(x_n, \delta_{x_n}/2)}$ funzione caratteristica di $S(x_n, \delta_{x_n}/2)$, allora si ha $S(x_n, \delta_{x_n}/4) \subset$ $\subset A_{\psi_n} \subset S(x_n, \delta_{x_n}/2)$, $\psi_n \cap \overline{(\partial\mathfrak{D} \setminus \Gamma)} = \emptyset$.

Per quanto precedentemente dimostrato si ha che $u = 0$ nel senso di $H^{1,2}(\mathfrak{D})$ su $A_{\psi_n} \cap \Gamma$ per ogni $n \in \boldsymbol{N}$.

Quindi, per [C II], $u(x) = 0$ per ogni $x \in (A_{\psi_n} \cap \Gamma) \setminus E_{\psi_n}$, con $2 - \operatorname{cap}_{\mathfrak{D}} E_{\psi_n} = 0$ per ogni $n \in \boldsymbol{N}$, da cui $u(x) = 0$ per ogni $x \in \Big[\bigcup_{n \in \boldsymbol{N}} A_{\psi_n} \cap \Gamma\Big] \setminus \bigcup_{n \in \boldsymbol{N}} E_{\psi_n} = \Gamma \setminus [\overline{(\partial\mathfrak{D} \setminus \Gamma)}] \cup \Big[\bigcup_{n \in \boldsymbol{N}} E_{\psi_n}\Big]$.

Ma poichè per il lemma 2 di [C II], $2 - \operatorname{cap}_{\mathfrak{D}}\Big([\Gamma \cap \overline{(\partial\mathfrak{D} \setminus \Gamma)}] \cup \big(\bigcup_{n \in \boldsymbol{N}} E_{\psi_n}\big)\Big) \leqslant 2-$ $-\operatorname{cap}_{\mathfrak{D}}(\Gamma \cap \overline{(\partial\mathfrak{D} \setminus \Gamma)}) + \sum_{n \in \boldsymbol{N}} 2 - \operatorname{cap}_{\mathfrak{D}} E_{\psi_n}$, segue che $u = 0$ su Γ a meno di un insieme di $2 - \mathrm{cap}_{\mathfrak{D}}$ nulla, quindi $u = 0$ su Γ nel senso di $H^{1,2}(\mathfrak{D})$ per il teorema 2 di [C II].

0.8. OSSERVAZIONE. – In base a 0.4. una condizione sufficiente affinchè $2 - \mathrm{cap}_{\mathfrak{D}}(\Gamma \cap \overline{(\partial\mathfrak{D}\setminus\Gamma)}) = 0$ è che la misura $(n-2)$-dimensionale di Hausdorff di $[\Gamma \cap \overline{(\partial\mathfrak{D}\setminus\Gamma)}]$ sia finita [V], che, a sua volta, è equivalente al fatto che la misura $(n-2)$-dimensionale inferiore di Minkowski di $[\Gamma \cap \overline{(\partial\mathfrak{D}\setminus\Gamma)}]$ sia finita. (3.2.37. e 3.2.44. di [Fe]).

0.9. TEOREMA. – Siano $\mathfrak{D}$ e Γ come in 0.7., allora:

$$\{u \in H^{1,2}(\mathfrak{D}):\ u = 0 \text{ su } \Gamma \text{ nel senso di } H^{1,2}(\mathfrak{D})\} = \overline{\mathfrak{C}_0^\infty(\boldsymbol{R}^n\setminus\Gamma)}^{H^{1,2}(\mathfrak{D})}.$$

DIMOSTRAZIONE. – Sia $u = 0$ su Γ nel senso di $H^{1,2}(\mathfrak{D})$. Esistono allora due successioni $(\varphi_j)_{j\in\boldsymbol{N}}$ e $(\psi_j)_{j\in\boldsymbol{N}}$, tali che $\varphi_j,\ \psi_j \in \mathfrak{C}_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$, $\varphi_j(x) \geqslant 0$ per ogni $x \in \Gamma$, $\psi_j(x) \leqslant 0$ per ogni $x \in \Gamma$ e $\varphi_j \to u$, $\psi_j \to u$ in $H^{1,2}(\mathfrak{D})$.

Ora $\max(\varphi_j, 0) \to \max(u, 0)$, $\min(\varphi_j, 0) \to \min(u, 0)$ in $H^{1,2}(\mathfrak{D})$; analogamente $\max(\psi_j, 0) \to \max(u, 0)$, $\min(\psi_j, 0) \to \min(u, 0)$ in $H^{1,2}(\mathfrak{D})$ e $\max(\psi_j, 0) = 0$ su Γ, $\min(\varphi_j, 0) = 0$ su Γ $(j \in \boldsymbol{N})$.

Consideriamo a questo punto

$$\tilde{\varphi}_j = \min\big(\min(\varphi_j, 0) + 1/j, 0\big) \qquad \text{e} \qquad \tilde{\psi}_j = \max\big(\max(\psi_j, 0) - 1/j, 0\big), \qquad (j \in \boldsymbol{N});$$

queste sono funzioni lipschitziane, sono nulle in un intorno aperto U_j di Γ, $\tilde{\varphi}_j \to \min(u, 0)$ e $\tilde{\psi}_j \to \max(u, 0)$ in $H^{1,2}(\mathfrak{D})$. Sia quindi $\varepsilon = d(\Gamma, \boldsymbol{R}^n\setminus U_j)$, che risulta positivo in quanto Γ e $\boldsymbol{R}^n\setminus U_j$ sono chiusi disgiunti, allora, se consideriamo $\tilde{\tilde{\varphi}}_{j,\varepsilon} = j_{\varepsilon/2} * \tilde{\varphi}_j$, $\tilde{\tilde{\psi}}_{j,\varepsilon} = j_{\varepsilon/2} * \tilde{\psi}_j$, si ha che $\tilde{\tilde{\varphi}}_{j,\varepsilon}, \tilde{\tilde{\psi}}_{j,\varepsilon} \in \mathfrak{C}_0^\infty(\boldsymbol{R}^n\setminus\Gamma)$ e per ogni $\eta \in \boldsymbol{R}_+$ e per ogni $j \in \boldsymbol{N}$ esiste $\varepsilon(j, \eta) > 0$ per cui se $\varepsilon < \varepsilon(j, \eta)$ si ha $\|\tilde{\tilde{\varphi}}_{j,\varepsilon} - \tilde{\varphi}_j\|_{H^{1,2}(\mathfrak{D})} < \eta/2$ e $\|\tilde{\tilde{\psi}}_{j,\varepsilon} - \tilde{\psi}_j\|_{H^{1,2}(\mathfrak{D})} < \eta/2$.

Allora per ogni $\eta \in \boldsymbol{R}_+$ esiste $j_\eta \in \boldsymbol{N}$ tale che se $j > j_\eta$, $\varepsilon < \varepsilon(j_\eta, \eta)$ si ha:

$$\|\tilde{\tilde{\varphi}}_{j,\varepsilon} - \min(u, 0)\|_{H^{1,2}(\mathfrak{D})} < \eta,$$

infatti:

$$\|\tilde{\tilde{\varphi}}_{j,\varepsilon} - \min(u, 0)\|_{H^{1,2}(\mathfrak{D})} \leqslant \|\tilde{\tilde{\varphi}}_{j,\varepsilon} - \tilde{\varphi}_j\|_{H^{1,2}(\mathfrak{D})} + \|\tilde{\varphi}_j - \min(u, 0)\|_{H^{1,2}(\mathfrak{D})} < \eta/2 + \eta/2 = \eta.$$

Con discorso analogo si può provare che per ogni $\eta \in \boldsymbol{R}_+$ esiste $j_\eta \in \boldsymbol{N}$ tale che, se $j > j_\eta$, $\varepsilon < \varepsilon(j_\eta, \eta)$ si ha:

$$\|\tilde{\tilde{\psi}}_{j,\varepsilon} - \max(u, 0)\|_{H^{1,2}(\mathfrak{D})} < \eta.$$

Abbiamo così provato che per ogni $u \in H^{1,2}(\mathfrak{D})$, $u = 0$ su Γ nel senso delle tracce e per ogni $\eta \in \boldsymbol{R}_+$ esiste una funzione $\chi_\eta \in \mathfrak{C}_0^\infty(\boldsymbol{R}^n \setminus \Gamma)$ tale che: $\|u - \chi_\eta\|_{H^{1,2}(\mathfrak{D})} < \eta$; basta prendere $\chi_\eta = \tilde{\tilde{\varphi}}_{j,\varepsilon} + \tilde{\tilde{\psi}}_{j,\varepsilon}$, $j > j_\eta$ e $\varepsilon < \varepsilon(j_\eta, \eta)$.

0.10. COROLLARIO. – In base ai teoremi 0.7. e 0.9., se $\mathfrak{D}$ e Γ sono come in 0.7., allora:

$$M(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}}, \Gamma, 0) = \overline{\mathfrak{C}_0^\infty(\boldsymbol{R}^n \setminus \Gamma)}^{H^{1,2}(\mathfrak{D})} .$$

0.11. TEOREMA. – Siano $\mathfrak{D}$, Γ come in 0.7., v come in 0.1., $v \geqslant 0$ su Γ, $\mathfrak{D}$ connesso, F', F'' chiusi di $\boldsymbol{R}^n$, $F' \supset F''$ ed $\mathfrak{a}$: $H^{1,2}(\mathfrak{D}) \times H^{1,2}(\mathfrak{D}) \to \boldsymbol{R}$, una forma bilineare tale che esista $\eta \in \boldsymbol{R}_+$ per cui $\mathfrak{a}(g, g) \geqslant \eta \|\nabla g\|^2_{L^2(\mathfrak{D})}$ e tale che $\mathfrak{a}(g, h) = 0$ se $g \cdot h = 0$ q.o. in $\mathfrak{D}$.

Siano inoltre $u \in M^+(\mathfrak{D}, F', \Gamma, v)$, $w \in M^+(\mathfrak{D}, F'', \Gamma, v)$ tali che:

$$\mathfrak{a}(u, f) + \mathfrak{l}_1(f) \geqslant 0 \quad \text{per ogni } f \in M^+(\mathfrak{D}, F', \Gamma, 0) \tag{0.11.1.}$$

$$\mathfrak{a}(w, f - w) + \mathfrak{l}_2(f - w) \geqslant 0 \quad \text{per ogni } f \in M^+(\mathfrak{D}, F'', \Gamma, v) , \tag{0.11.2.}$$

ove $\mathfrak{l}_i$: $H^{1,2}(\mathfrak{D}) \to \boldsymbol{R}$, $(i = 1, 2)$, sono funzionali lineari tali che:

$$\mathfrak{l}_2(\max (w - u, 0)) \geqslant l_1(\max (w - u, 0)) . \tag{0.11.3.}$$

Allora $w \leqslant u$ q.o. in $\mathfrak{D}$.

DIMOSTRAZIONE. – Poichè $\min (u, w) \in M^+(\mathfrak{D}, F'', \Gamma, v)$, in quanto $0 \leqslant \min (u, w) \leqslant w$, da (0.11.2.) si ha: $0 \leqslant \mathfrak{a}(w, \min (u, w) - w) + \mathfrak{l}_2(\min (u, w) - w) = \mathfrak{a}(w - u, \min (u - w, 0)) + \mathfrak{a}(u, \min (u - w, 0)) + \mathfrak{l}_2(\min (u - w, 0)) \leqslant - \mathfrak{a}(\min (u - w, 0), \min (u - w, 0)) + \mathfrak{a}(u, \min (u - w, 0)) + \mathfrak{l}_1(\min (u - w, 0)) \leqslant - \eta \|\nabla(\min (u - w, 0))\|^2_{L^2(\mathfrak{D})}$, avendo sfruttato che $\max (w - u, 0) \in M^+(\mathfrak{D}, F', \Gamma, 0)$, (0.11.1.) e (0.11.3.).

Allora $\min (u - w, 0)$ è costante in $\mathfrak{D}$, ma, essendo nulla su Γ, si ha $\min (u - w, 0) = 0$ q.o. in $\mathfrak{D}$, cioè la tesi.

0.12. TEOREMA. – Siano $\mathfrak{D}$, Γ come in 0.7., F come in 0.1., v, $\mathfrak{a}$ come in 0.11.. Sia $u \in M(\mathfrak{D}, F, \Gamma, v)$, tale che $\mathfrak{a}(u, f) + \mathfrak{l}(f) \geqslant 0$ per ogni $f \in M^+(\mathfrak{D}, F, \Gamma, 0)$, dove $\mathfrak{l}$: $H^{1,2}(\mathfrak{D}) \to \boldsymbol{R}$ è un funzionale lineare continuo tale che $\mathfrak{l}(f) \leqslant 0$ per ogni $f \in M^+(\mathfrak{D}, F, \Gamma, 0)$. Allora $u \geqslant 0$ q.o. in $\mathfrak{D}$.

DIMOSTRAZIONE. – Poichè $\min (u, 0) \in M(\mathfrak{D}, F, \Gamma, 0)$ e $\min (u, 0) \leqslant 0$ q.o. in $\mathfrak{D}$, si ha:

$$0 \geqslant \mathfrak{a}(u, \min (u, 0)) + \mathfrak{l}(\min (u, 0)) \geqslant \mathfrak{a}(\min (u, 0), \min (u, 0)) \geqslant \eta \|\nabla \min (u, 0)\|^2_{L^2(\mathfrak{D})} .$$

Quindi $\min (u, 0)$ è costante in $\mathfrak{D}$, ma, poichè è nullo su Γ, esso è nullo q.o. in $\mathfrak{D}$.

0.13. LEMMA. – Sia $\mathfrak{D}$ aperto, limitato, connesso di $\boldsymbol{R}^n$, con frontiera lipschitziana, $\Gamma_0 \subset \partial\mathfrak{D}$, Γ_0 chiuso, $p \in H^{1,2}(\mathfrak{D})$. Sia $f \in \mathfrak{C}_0^\infty(\boldsymbol{R}^n \setminus \Gamma_0)$, $f \geqslant 0$. Allora $\min(p - \varepsilon f, 0) \to \min(p, 0)$ in $H^{1,2}(\mathfrak{D})$ per $\varepsilon \to 0$.

DIMOSTRAZIONE. – Segue dal teorema 5.23 e dalle osservazioni precedenti e seguenti il teorema 5.23 di [BC] e dal teorema 10 di [An].

0.14. TEOREMA. – Siano $\mathfrak{D}, \Gamma$ come in 0.7., F come in 0.1., sia $\mathfrak{a}\colon H^{1,2}(\mathfrak{D}) \times H^{1,2}(\mathfrak{D}) \to \boldsymbol{R}$ una forma bilineare continua tale che $\mathfrak{a}(g, g) \geqslant 0$ per ogni $g \in H^{1,2}(\mathfrak{D})$ e tale che $\mathfrak{a}(g, h) = 0$ se $g \cdot h = 0$ q.o. in $\mathfrak{D}$. Sia $\mathfrak{l}\colon H^{1,2}(\mathfrak{D}) \to \boldsymbol{R}$ un funzionale lineare continuo. Siano inoltre $u, w \in H^{1,2}(\mathfrak{D})$ tali che $u \geqslant w$ q.o. in $\mathfrak{D}$, $u = w$ q.o. in $\overline{\mathfrak{D} \setminus F} \cap \mathfrak{D}$ e

$$\mathfrak{a}(u, f) + \mathfrak{l}(f) \geqslant 0 \qquad \text{per ogni } f \in M^+(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}}, \Gamma, 0)$$
$$\mathfrak{a}(w, g) + \mathfrak{l}(g) \geqslant 0 \qquad \text{per ogni } g \in M^+(\mathfrak{D}, F, \Gamma, 0)\,.$$

Allora $\mathfrak{a}(w, f) + \mathfrak{l}(f) \geqslant 0$ per ogni $f \in M^+(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}}, \Gamma, 0)$.

DIMOSTRAZIONE. – Sia $\varepsilon > 0$ ed $f \in M^+(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}}, \Gamma, 0)$. Poichè $\min(u - w, \varepsilon f) \in M^+(\mathfrak{D}, F, \Gamma, 0)$ e $\min(u - w - \varepsilon f, 0) \in M(\mathfrak{D}, \overline{\mathfrak{D}}, \Gamma, 0)$, si ha:

$$\begin{aligned}
0 &\geqslant -\mathfrak{a}(w, \min(u - w, \varepsilon f)) - \mathfrak{l}(\min(u - w, \varepsilon f)) + \mathfrak{a}(u, \min(u - w - \varepsilon f, 0)) + \\
&+ \mathfrak{l}(\min(u - w - \varepsilon f, 0)) = \mathfrak{a}(-w, \min(u - w - \varepsilon f, 0)) - \varepsilon\mathfrak{a}(w, f) - \\
&- \mathfrak{l}(\min(u - w - \varepsilon f, 0)) - \varepsilon\mathfrak{l}(f) + \mathfrak{a}(u, \min(u - w - \varepsilon f, 0)) + \mathfrak{l}(\min(u - w - \varepsilon f, 0)) = \\
&= \mathfrak{a}(u - w, \min(u - w - \varepsilon f, 0)) - \varepsilon\{\mathfrak{a}(w, f) + \mathfrak{l}(f)\} = \\
&= \mathfrak{a}(\min(u - w - \varepsilon f, 0), \min(u - w - \varepsilon f, 0)) + \varepsilon\{\mathfrak{a}(f, \min(u - w - \varepsilon f, 0)) - \\
&\qquad - \mathfrak{a}(w, f) - \mathfrak{l}(f)\} \geqslant \varepsilon\{\mathfrak{a}(f, \min(u - w - \varepsilon f, 0)) - \mathfrak{a}(w, f) - \mathfrak{l}(f)\}\,.
\end{aligned}$$

Dividendo per ε, facendo tendere ε a zero ed usando il lemma 0.13., si ottiene la tesi.

1. – Proprietà delle soluzioni.

Sia Ω un aperto limitato connesso di R^n, $n \geqslant 2$, con frontiera lipschitziana, tale che $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ con $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$, Γ_0 chiuso e tale che $2 - \mathrm{cap}_\Omega(\Gamma_0 \cap \overline{\Gamma}_1) = 0$, $\mathfrak{a}\colon H^{1,2}(\Omega) \times H^{1,2}(\Omega) \to R$ una forma bilineare continua per cui esiste una costante $\eta \in \boldsymbol{R}_+$ tale che $\mathfrak{a}(u, u) \geqslant \eta\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}$ per ogni $u \in H^{1,2}(\Omega)$ e tale che $\mathfrak{a}(g, h) = 0$ se $g \cdot h = 0$ q.o. in Ω. Indichiamo con $\mathcal{F}(\overline{\Omega})$ la famiglia dei chiusi di $\overline{\Omega}$ e sia $\mathfrak{l}\colon \mathcal{F}(\overline{\Omega}) \times H^{1,2}(\Omega) \to \boldsymbol{R}$

un funzionale tale che:

(1.0.1.) $\mathfrak{l}(A,\cdot)\in(H^{1,2}(\Omega))'$ per ogni $A\in\mathcal{F}(\bar{\Omega})$

(1.0.2.) $\mathfrak{l}(\cdot,u)\colon\mathcal{F}(\bar{\Omega})\to\boldsymbol{R}$ sia funzione additiva.

Indichiamo inoltre con:

$\mathcal{F}_0(\Omega)=\{A\in\mathcal{F}(\bar{\Omega})$: esiste $m(A,\cdot)\in(H^{1,2}(\Omega))'$ tale che $\mathfrak{l}(A,f)+m(A,f)=0$ per ogni $f\in M(\Omega,A,\Gamma_0,0)$, $m(A,f)\geqslant 0$ per ogni $f\in\mathfrak{C}_0^\infty(\boldsymbol{R}^n\setminus\Gamma_0)$, $f\geqslant 0\}$.

1.1. Osservazione. – Osserviamo che, se $A\in\mathcal{F}_0(\Omega)$, esiste, per il teorema di Riesz, $\mu_{m,A}\in\mathcal{M}_+(\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n\setminus\Gamma_0))$ tale che $m(A,f)=\int f\,d\mu_{m,A}$ per ogni $f\in\mathfrak{C}_0^\infty(\boldsymbol{R}^n\setminus\Gamma_0)$.

1.2. Teorema. – Sia A chiuso di $\boldsymbol{R}^n$ tale che $M(\Omega,A,\Gamma_0,p_0)\neq\emptyset$, $p_0\in H^{1,2}(\Omega)$, allora esiste almeno una funzione $p_A\in M(\Omega,A,\Gamma_0,p_0)$ tale che:

(1.2.1.) $\mathfrak{a}(p_A,p-p_A)+\mathfrak{l}(A,p-p_A)\geqslant 0$ per ogni $p\in M(\Omega,A,\Gamma_0,p_0)$.

Dimostrazione. – Segue dal teorema 5.1. di [LS]. Basta infatti applicare tale teorema con $p_0(v)=\|v\|_{L^2(\Omega)}$, $p_1(v)=\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$, $\mathfrak{K}=\{v\in H^{1,2}(\Omega)\colon v=w-\tilde{p},\ w\in M(\Omega,A,\Gamma_0,p_0)\}$, dove $\tilde{p}\in M(\Omega,A,\Gamma_0,p_0)\neq\emptyset$ per ipotesi.

Allora $0\in\mathfrak{K}$, $Y\cap\mathfrak{K}=\{0\}$, essendo $Y=\{u\in H^{1,2}(\Omega)\colon\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}=0\}$ ed esiste $C_1(n,\Omega)$ tale che $\inf\{\|v-y\|_{L^2(\Omega)}\colon y\in Y\}\leqslant C_1(n,\Omega)\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$ (dal teorema 3.6.5. di [Mo I] applicato a $v-1/|\Omega|\int_\Omega v\,dx$).

Otteniamo quindi che esiste almeno una soluzione $v_A\in\mathfrak{K}$ di

(1.2.2.) $\mathfrak{a}(v_A,v-v_A)\geqslant-\mathfrak{a}(\tilde{p},v-v_A)-\mathfrak{l}(A,v-v_A)$ per ogni $v\in\mathfrak{K}$.

Ma da (1.2.2.) si ricava:

(1.2.3.) $\mathfrak{a}(v_A+\tilde{p},(v+\tilde{p})-(v_A+\tilde{p}))\geqslant-\mathfrak{l}(A,(v+\tilde{p})-(v_A+\tilde{p}))$.

Ponendo ora $p_A=v_A+\tilde{p}$ e $p=v+\tilde{p}$, per definizione di $\mathfrak{K}$, si ha $p_A\in M(\Omega,A,\Gamma_0,p_0)$ e $p\in M(\Omega,A,\Gamma_0,p_0)$ e quindi la tesi.

1.3. Osservazione. – Per 0.1., (1.2.1.) si può riscrivere così:

(1.3.1.) $\mathfrak{a}(p_A,f)+\mathfrak{l}(A,f)=0$ per ogni $f\in M(\Omega,A,\Gamma_0,0)$.

Infatti da (1.2.1.) si ha:

$\mathfrak{a}(p_A,f)+\mathfrak{l}(A,f)\geqslant 0$ per ogni $f\in M(\Omega,A,\Gamma_0,0)$ e da quest'ultima segue (1.3.1). prendendo come funzione test $-f$.

Viceversa, in quanto $p_A \in M(\Omega, A, \Gamma_0, p_0)$, da (1.3.1.) si ha:

$$\mathfrak{a}(p_A, p - p_A) + \mathfrak{l}(A, p - p_A) = 0 \qquad \text{per ogni } p \in M(\Omega, A, \Gamma_0, p_0)\,.$$

1.4. Teorema. – Nelle ipotesi di 1.2. e se mis $(\Gamma_0) \neq 0$, ove col simbolo mis si intende la misura superficiale su $\partial\Omega$, si ha che la soluzione di (1.3.1.) è unica.

Dimostrazione. – Siano p_A' e p_A'' due soluzioni di (1.3.1.). Allora, poichè $p_A' - p_A'' \in M(\Omega, A, \Gamma_0, 0)$, da (1.3.1.) si ottiene:

$$\mathfrak{a}(p_A', p_A' - p_A'') + \mathfrak{l}(A, p_A' - p_A'') = 0 = \mathfrak{a}(p_A'', p_A' - p_A'') + \mathfrak{l}(A, p_A' - p_A'')\,,$$

da cui:

$$\mathfrak{a}(p_A' - p_A'', p_A' - p_A'') = 0\,.$$

Usando ora la debole coercività della forma $\mathfrak{a}(\cdot,\cdot)$, si ha la tesi, poichè mis $(\Gamma_0) \neq 0$.

1.5. Teorema. – Sia $p_A \in M(\Omega, A, \Gamma_0, p_0)$ la soluzione di (1.3.1.), $p_0 \in H^{1,2}(\Omega)$ con traccia non negativa su $\partial\Omega$, $A \in \mathcal{F}(\bar{\Omega})$. Si ha:

(1.5.1.) se $\mathfrak{l}(A, f) \leqslant 0$ per ogni $f \in M^+(\Omega, A, \Gamma_0, 0)$, allora $p_A \geqslant 0$ quasi ovunque in Ω;

(1.5.2.) se $A \in \mathcal{F}_0(\Omega)$, allora $\mathfrak{a}(p_A, f) \leqslant m(A, f)$ per ogni $f \in M^+(\Omega, \bar{\Omega}, \Gamma_0, 0)$.

Dimostrazione. – (1.5.1.) è conseguenza di 0.12. con $\mathfrak{D} = \Omega$, $F = A$, $\Gamma = \Gamma_0$, $v = p_0$, $\alpha = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}(A, \cdot)$.

(1.5.2.) è conseguenza di 0.14. con $\mathfrak{D} = \Omega$, $F = A$, $\Gamma = \Gamma_0$, $\alpha = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{l} = m(A, \cdot)$, $w = -p_A$, $u = 0$.

1.6. Definizione. – Sia $\lambda \in (0, 1)$, $x_0 \in \boldsymbol{R}^n$. Definiamo gli spazi:

$$H^{1,2,\lambda}(S(x_0, R)) = \Bigg\{u \in H^{1,2}(S(x_0, R)) \colon |||u|||_{H^{1,2,\lambda}} = \\ = \sup\left\{\|\nabla u\|_{L^2(S(x,R))}\left(\frac{R - |x - x_0|}{r}\right)^{n/2-1+\lambda}, \right. \\ \left. 0 \leqslant r < R - |x - x_0|,\ x \in S(x_0, R)\right\} < +\infty\Bigg\}$$

e indichiamo con:

$$\|u\|_{H^{1,2,\lambda}(S(x_0,R))} = \max\left\{|||u|||_{H^{1,2,\lambda}(S(x_0,R))}, \|u\|_{H^{1,2}(S(x_0,R))}\right\},$$

che risulta evidentemente una norma.

1.7. Teorema. – Sia $\mathfrak{a}_0\colon H_0^{1,2}(S(x,R))\times H_0^{1,2}(S(x,R))\to \boldsymbol{R}$ la forma così definita:

$$\mathfrak{a}_0(u,v)=\int\limits_{S(x,R)}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,\partial_j u\,\partial_i v\,dy\,, \tag{1.7.1.}$$

con $a_{ij}\in L^\infty(S(x,R))$, tali che esiste $\nu\in\boldsymbol{R}_+$ per cui:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant \nu|\xi|^2 \qquad \text{per ogni } \xi\in\boldsymbol{R}^n\,.$$

Sia inoltre $u\in H^{1,2}(S(x,R))$, tale che:

$$\mathfrak{a}_0(u,f)=0 \qquad \text{per ogni } f\in H_0^{1,2}(S(x,R))\,, \tag{1.7.2.}$$

allora esiste $\lambda_0\in(0,1)$, λ_0 dipendente da ν, n, M ove $M\geqslant \sum\limits_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2$, per cui:

$$\|\nabla u\|_{L^2(S(x,R))}\leqslant C(\nu,n,M)\|\nabla u\|_{L^2(S(x,R))}(r/R)^{n/2-1+\lambda_0}\,. \tag{1.7.3.}$$

La dimostrazione segue dal teorema 5.3.4. di [Mo I].

1.8. Teorema. – Siano $\mathfrak{a}_0\colon H_0^{1,2}(S(x,R))\times H_0^{1,2}(S(x,R))\to\boldsymbol{R}$ la forma del teorema 1.7., $\lambda_0\in(0,1)$ come nella tesi dello stesso teorema, $\mu\in(0,1)$ e $g,h\in L^{2n/n+2}(S(x,R))$, $g_i,h_i\in L^2(S(x,R))$, $i=1,\dots,n$ tali che:

$$\begin{cases}\displaystyle\int\limits_{S(x,s)}|g|\,dy\leqslant C_1R^{(n/2)-1}(s/R)^{n-2+\mu}\\ \displaystyle\int\limits_{S(x,s)}|h|\,dy\leqslant C_2R^{(n/2)-1}(s/R)^{n-2+\mu}\\ \displaystyle\int\limits_{S(x,s)}\sum_{i=1}^{n}|g_i|^2\,dy\leqslant C_3^2(s/R)^{n-2+2\mu}\\ \displaystyle\int\limits_{S(x,s)}\sum_{i=1}^{n}|h_i|^2\,dy\leqslant C_4^2(s/R)^{n-2+2\mu}\end{cases} \tag{1.8.1.}$$

con $0<s\leqslant R$, $C_i\in\boldsymbol{R}$, $i=1,\dots,4$, $C_1\geqslant\|g\|_{L^{2n/n+2}(S(x,R))}$, $C_2\geqslant\|h\|_{L^{2n/n+2}(S(x,R))}$.
Sia $u\in H_0^{1,2}(S(x,R))$ tale che per ogni $f\in H_0^{1,2}(S(x,R))$, $f\geqslant0$ si ha:

$$\int\limits_{S(x,R)}hf\,dy+\int\limits_{S(x,R)}\sum_{i=1}^{n}h_i\,\partial_i f\,dy\leqslant\mathfrak{a}_0(u,f)\leqslant\int\limits_{S(x,R)}gf\,dy+\int\limits_{x,R)}\sum_{i=1}^{n}g_i\,\partial_i f\,dy\,. \tag{1.8.2.}$$

Allora per ogni $\lambda < \min(\lambda_0, \mu)$, $\lambda > 0$ si ha:

$$\int_{S(x,s)} |\nabla u|^2 \, dy \leqslant C_5(n, \nu, \lambda, M)(s/R)^{n-2+2\lambda}, \qquad 0 < s \leqslant R, \; C_5 \in \boldsymbol{R}_+ ,$$

ove $M \in \boldsymbol{R}_+$ è tale che $M \geqslant \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2$.

Dimostrazione. – Osserviamo preliminarmente che si può supporre $h = g = 0$, in quanto se V_h e V_g sono tali che rispettivamente $\Delta V_h = h$ e $\Delta V_g = g$ su $S(x, R)$, per il teorema 3.7.3. di [Mo I] si ha:

$$\text{(1.8.3.)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{S(x,s)} |\nabla V_g|^2 \, dy \leqslant C_1^2 C(n, \lambda)(s/R)^{n-2+2\lambda} \\ \displaystyle\int_{S(x,s)} |\nabla V_h|^2 \, dy \leqslant C_2^2 C(n, \lambda)(s/R)^{n-2+2\lambda} \end{cases}, \qquad 0 < s \leqslant R$$

e:

$$\text{(1.8.4.)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{S(x,R)} \sum_{i=1}^{n} \partial_i V_g \, \partial_i f \, dy = \int_{S(x,R)} - gf \, dy \\ \displaystyle\int_{S(x,R)} \sum_{i=1}^{n} \partial_i V_h \, \partial_i f \, dy = \int_{S(x,R)} - hf \, dy \end{cases} \qquad \text{per ogni } f \in H_0^{1,2}(S(x, R)) .$$

Sostituendo quindi in (1.8.2.), la stessa risulta:

$$\int_{S(x,R)} \sum_{i=1}^{n} (h_i - \partial_i V_h) \, \partial_i f \, dy \leqslant \mathfrak{a}_0(u, f) \leqslant \int_{S(x,R)} \sum_{i=1}^{n} (g_i - \partial_i V_g) \, \partial_i f \, dy ,$$

dove $h_i - \partial_i V_h$ e $g_i - \partial_i V_g$, $i = 1, \ldots, n$, verificano ancora condizioni del tipo (1.8.1.), cioè:

$$\text{(1.8.5.)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{S(x,s)} \sum_{i=1}^{n} |g_i - \partial_i V_g|^2 \, dy \leqslant 2\big(C_3^2 + C_1^2 C(n, \lambda)\big)(s/R)^{n-2+2\lambda} \\ \displaystyle\int_{S(x,s)} \sum_{i=1}^{n} |h_i - \partial_i V_h|^2 \, dy \leqslant 2\big(C_4^2 + C_2^2 C(n, \lambda)\big)(s/R)^{n-2+2\lambda} \end{cases} \qquad \text{con } 0 < s \leqslant R .$$

Sia $\lambda < \min(\lambda_0, \mu)$, $\lambda > 0$. Osservando che le (1.8.1.) continuano a valere con λ al posto di μ in quanto $0 < s/R \leqslant 1$, definiamo per $0 < \sigma < 1$:

$$\varphi(\sigma) = \sup \left\{ \frac{\|\nabla u\|_{L^2(S(x,b\sigma))}}{L_1 + L_2} \right. ,$$

al variare di $g_i \in L^2(S(x,b))$, $i=1,\dots,n$, tali che:

$$\int_{S(x,s)} \sum_{i=1}^{n} |g_i|^2\, dy \leqslant L_1^2 (s/b)^{n-2+2\lambda}, \quad 0<s\leqslant b\leqslant R \tag{1.8.6.}$$

al variare di $h_i \in L^2(S(x,b))$, $i=1,\dots,n$, tali che:

$$\int_{S(x,s)} \sum_{i=1}^{n} |h_i|^2\, dy \leqslant L_2^2 (s/b)^{n-2+2\lambda}, \quad 0<s\leqslant b\leqslant R \tag{1.8.7.}$$

con $u\in H_0^{1,2}(S(x,b))$ verificante:

$$\int_{S(x,b)} \sum_{i=1}^{n} h_i\, \partial_i f\, dy \leqslant \mathfrak{a}_0(u,f) \leqslant \int_{S(x,b)} \sum_{i=1}^{n} g_i\, \partial_i f\, dy \tag{1.8.8.}$$

per ogni $f\in H_0^{1,2}(S(x,b))$, $f\geqslant 0\big\}$.

Sia ora $0<t\leqslant R$ e siano $\bar g_i, \bar h_i \in L^2(S(x,t))$ e $\bar u \in H_0^{1,2}(S(x,t))$ verificanti rispettivamente (1.8.6.), (1.8.7.), (1.8.8.).

Sia $0<w\leqslant t\leqslant R$ e sia $H_w\in H^{1,2}(S(x,w))$, $H_w=\bar u$ su $\partial S(x,w)$, $\mathfrak{a}_0(H_w,f)=0$ per ogni $f\in H_0^{1,2}(S(x,w))$, che esiste per [S].

Se $U_w=\bar u - H_w \in H_0^{1,2}(S(x,w))$ si ha per $f\geqslant 0$, $f\in H_0^{1,2}(S(x,w))$:

$$\int_{S(x,w)} \sum_{i=1}^{n} \bar h_i\, \partial_i f\, dy \leqslant \mathfrak{a}_0(U_w,f) = \mathfrak{a}_0(\bar u,f) - \mathfrak{a}_0(H_w,f) = \mathfrak{a}_0(\bar u,f) \leqslant \int_{S(x,w)} \sum_{i=1}^{n} \bar g_i\, \partial_i f\, dy\,.$$

Ora $\bar g_i\in L^2(S(x,w))$, $\bar h_i\in L^2(S(x,w))$, $i=1,\dots,n$ e per $0<\varrho\leqslant w$ si ha:

$$\int_{S(x,\varrho)} \sum_{i=1}^{n} |\bar g_i|^2\, dy \leqslant L_1^2 (w/t)^{n-2+2\lambda} (\varrho/w)^{n-2+2\lambda}$$

$$\int_{S(x,\varrho)} \sum_{i=1}^{n} |\bar h_i|^2\, dy \leqslant L_2^2 (w/t)^{n-2+2\lambda} (\varrho/w)^{n-2+2\lambda}\,.$$

Per definizione di φ si ha quindi:

$$\|\nabla U_w\|_{L^2(S(x,\varrho))} \leqslant (L_1+L_2)(w/t)^{(n-2+2\lambda)/2}\varphi(\varrho/w)\,.$$

D'altra parte, essendo $\mathfrak{a}_0(H_w,f)=0$ per ogni $f\in H_0^{1,2}(S(x,w))$, si ottiene, in base al teorema 1.7.:

$$\|\nabla H_w\|_{L^2(S(x,\varrho))} \leqslant c(n,\nu,M)\|\nabla H_w\|_{L^2(S(x,w))}(\varrho/w)^{n/2-1+\lambda_0}\,,$$

ove $\lambda_0\in(0,1)$ e λ_0 dipende da ν, n e M: $M\geqslant \sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2$.

Perciò, per il teorema 5.3.5. di [Mo I], si ha:

$$\|\nabla H_w\|_{L^2(S(x,\varrho))} \leqslant C(n, \nu, M)\|\nabla \bar{u}\|_{L^2(S(x,w))}(\varrho/w)^{n/2-1+\lambda_0} \leqslant$$
$$\leqslant C(n, \nu, M)(L_1 + L_2)\varphi(w/t)(\varrho/w)^{n/2-1+\lambda_0} .$$

Allora:

$$\|\nabla \bar{u}\|_{L^2(S(x,\varrho))} \leqslant \|\nabla H_w\|_{L^2(S(x,\varrho))} + \|\nabla U_w\|_{L^2(S(x,\varrho))} \leqslant C(n, \nu, M)(L_1 + L_2)\varphi(w/t)(\varrho/w)^{n/2-1+\lambda_0} +$$
$$+ (L_1 + L_2)(w/t)^{n/2-1+\lambda}\varphi(\varrho/w) .$$

Sia ora $\varrho(t) = ts$, $w(t) = tz$ con $0 < s < z \leqslant 1$, si ottiene:

$$\|\nabla \bar{u}\|_{L^2(S(x,ts))} \leqslant C(n, \nu, M)(L_1 + L_2)\varphi(z)(s/z)^{n/2-1+\lambda_0} + (L_1 + L_2)z^{n/2-1+\lambda}\varphi(s/z)$$

per ogni $0 < s < z \leqslant 1$ e $0 < t \leqslant R$.

Dalla definizione di φ si ha allora:

$$\text{(1.8.9.)} \qquad \varphi(s) \leqslant C(n, \nu, M)\varphi(z)(s/z)^{n/2-1+\lambda_0} + z^{n/2-1+\lambda}\varphi(s/z)$$

per ogni $0 < s < z \leqslant 1$.

Osserviamo ora che

$$\varphi(1) = \sup\left\{\frac{\|\nabla u\|_{L^2(S(x,b))}}{L_1 + L_2}, \quad 0 < b \leqslant R ,\right.$$

al variare di $g_i \in L^2(S(x, b))$, $h_i \in L^2(S(x, b))$, $(i = 1, ..., n)$, e $u \in H_0^{1,2}(S(x, b))$ verificanti rispettivamente (1.8.6.), (1.8.7.), (1.8.8.)$\}$ è limitato.

Siano infatti g_i, $h_i \in L^2(S(x, b))$, $(i = 1, ..., n)$, verificanti rispettivamente (1.8.6.) e (1.8.7.) e $u \in H_0^{1,2}(S(x, b))$ tale che:

$$\int_{(x,b)} \sum_{i=1}^{n} h_i\, \partial_i f\, dy \leqslant \mathfrak{a}_0(u, f) \leqslant \int_{S(x,b)} \sum_{i=1}^{n} g_i\, \partial_i f\, dy \qquad \text{per ogni } f \in H_0^{1,2}(S(x, b)),\ f \geqslant 0 .$$

Posto $u_+ = \max(u, 0)$, $u_- = \max(-u, 0)$, $u_+, u_- \geqslant 0$, $u_+, u_- \in H_0^{1,2}(S(x, b))$, $u = u_+ - u_-$, si ha:

$$\nu\|\nabla u_+\|^2_{L^2(S(x,b))} \leqslant \mathfrak{a}_0(u_+, u_+) = \mathfrak{a}_0(u, u_+) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|g_i\|_{L^2(S(x,b))}\|\nabla u_+\|_{L^2(S(x,b))}$$

e quindi:

$$\|\nabla u_+\|_{{}^2(S(x,b))} \leqslant 1/\nu \sum_{i=1}^{n} \|g_i\|_{L^2(S(x,b))} .$$

Inoltre:

$$-\sum_{i=1}^{n}\|h_i\|_{L^2(S(x,b))}\|\nabla u_-\|_{L^2(S(x,b))}\leqslant \mathfrak{a}_0(u,u_-)=-\,\mathfrak{a}_0(u_-,u_-)\leqslant -\nu\|\nabla u_-\|^2_{L^2(S(x,b))},$$

da cui:

$$\|\nabla u_-\|_{L^2(S(x,b))}\leqslant 1/\nu\sum_{i=1}^{n}\|h_i\|_{L^2(S(x,b))}.$$

Allora esiste $\overline{C}(n,\nu)>0$ tale che:

$$\|\nabla u\|_{L^2(S(x,b))}\leqslant 1/\nu\Big(\sum_{i=1}^{n}\|h_i\|_{L^2(S(x,b))}+\sum_{i=1}^{n}\|g_i\|_{L^2(S(x,b))}\Big)\leqslant \overline{C}(n,\nu)(L_1^2+L_2^2)^{\frac12}$$

e quindi:

$$\varphi(1)\leqslant \overline{C}(n,\nu)\,.$$

Inoltre φ è ovviamente monotona crescente, quindi, se $0<\alpha<1$ e se $\alpha\leqslant s\leqslant 1$, si ha:

$$\varphi(s)\leqslant\varphi(1)\,\alpha^{1-(n/2)-\lambda}\alpha^{(n/2)-1+\lambda}\leqslant S(\alpha)\,s^{(n/2)-1+\lambda}\,, \tag{1.8.10.}$$

ove $S(\alpha)=\overline{C}(n,\nu)\,\alpha^{1-(n/)2-\lambda}$.

Dimostriamo ora, per induzione, che per ogni $N\geqslant 1$ vale:

$$\varphi(s)\leqslant S(\alpha)\prod_{k=1}^{N}\big(1+C(n,\nu,M)\,\alpha^{k(\lambda_0-\lambda)}\big)\,s^{n/2-1+\lambda}\qquad \text{per } \alpha^{2N}\leqslant s\leqslant 1\,. \tag{1.8.11.}$$

Sia infatti $\alpha^2\leqslant s\leqslant\alpha$ e $z=s/\alpha\in[\alpha,1]$, da (1.8.9.) si ha:

$$\varphi(s)\leqslant C(n,\nu,M)\,\varphi(s/\alpha)\,\alpha^{n/2-1+\lambda_0}+(s/\alpha)^{n/2-1+\lambda}\varphi(\alpha)\leqslant C(n,\nu,M)\,S(\alpha)(s/\alpha)^{n/2-1+\lambda}\alpha^{n/2-1+\lambda_0}+$$
$$+(s/\alpha)^{n/2-1+\lambda}S(\alpha)\,\alpha^{n/2-1+\lambda}=S(\alpha)\,s^{n/2-1+\lambda}[C(n,\nu,M)\,\alpha^{(\lambda_0-\lambda)}+1]\,,$$

avendo sfruttato (1.8.10.).

Notiamo che questa maggiorazione vale per $\alpha^2\leqslant s\leqslant 1$.

Supponiamo ora vera (1.8.11.) per il passo $N-1$ e verifichiamola al passo N.

Sia $\alpha^{2N}\leqslant s\leqslant\alpha^{2N-2}$, $z=\alpha^{-N}s\in[\alpha^N,\alpha^{N-2}]$, da (1.8.9.), applicabile in quanto $N\geqslant 2$ e quindi $s<s/\alpha^N=z<1$, si ha:

$$\varphi(s)\leqslant C(n,\nu,M)\,\varphi(s/\alpha^N)\,\alpha^{N(n/2-1+\lambda_0)}+(s/\alpha^N)^{n/2-1+\lambda}\varphi(\alpha^N)\leqslant$$
$$\leqslant S(\alpha)\prod_{=1}^{N-1}\big(1+C(n,\nu,M)\,\alpha^{k(\lambda_0-\lambda)}\big)[C(n,\nu,M)(s/\alpha^N)^{n/2-1+\lambda}\alpha^{N(n/2-1+\lambda_0)}+$$
$$+\alpha^{N(n/2-1+\lambda)}(s/\alpha^N)^{n/2-1+\lambda}]=S(\alpha)\prod_{k=1}^{N-1}\big(1+C(n,\nu,M)\,\alpha^{k(\lambda_0-\lambda)}\big)\cdot$$
$$\cdot[1+C(n,\nu,M)\,\alpha^{N(\lambda_0-\lambda)}]\,s^{n/2-1+\lambda}=S(\alpha)\prod_{k=1}^{N}\big(1+C(n,\nu,M)\,\alpha^{k(\lambda_0-\lambda)}\big)\,s^{n/2-1+\lambda}\,.$$

Otteniamo perciò che:

$$\varphi(s) \leqslant S s^{n/2-1+\lambda}, \qquad 0 < s \leqslant 1,$$

ove:

$$S = S(\alpha) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + C(n, \nu, M)\alpha^{k(\lambda_0-\lambda)}\right).$$

Notiamo che $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + C(n, \nu, M)\alpha^{k(\lambda_0-\lambda)})$ converge in quanto $\lambda < \lambda_0$ per ipotesi. Sfruttando allora (1.8.5.) segue che:

$$\|\nabla u\|_{L^2(S(x,Rs))} \leqslant S\sqrt{2}\left[(C_3^2 + C_1^2 C(n, \lambda))^{\frac12} + (C_4^2 + C_2^2 C(n, \lambda))^{\frac12}\right] s^{n/2-1+\lambda},$$

da cui:

$$\|\nabla u\|_{L^2(S(x,t))} \leqslant C_5(n, \lambda, \nu, M)(t/R)^{n/2-1+\lambda} \qquad \text{per } 0 < t \leqslant R,$$

cioè la tesi.

1.9. Corollario. – Nelle ipotesi del teorema 1.8. si ha che:

(1.9.1.) $$u \in \mathfrak{C}^{0,\lambda}(S(x, R)).$$

Dimostrazione. – Segue dal teorema 1.8. e dal teorema 2.2. di [Mo II].

1.10. Definizione. – Diremo che (p, A) è soprasoluzione, e scriveremo $(p, A) \in \in M_+$, se:

(1.10.1.) $$p \in M(\Omega, A, \Gamma_0, p_0), \qquad A \in \mathcal{F}(\bar{\Omega})$$

(1.10.2.) $$\mathfrak{a}(p, f) + \mathfrak{l}(A, f) \geqslant 0 \qquad \text{per ogni } f \in M^+(\Omega, \bar{\Omega}, \Gamma_0, 0).$$

1.11. Teorema. – Sia $(p, A) \in M_+$, $p_A \in M(\Omega, A, \Gamma_0, p_0)$ la soluzione di (1.3.1.), $p_0 \in H^{1,2}(\Omega)$ con traccia non negativa su $\partial\Omega$, $A \in \mathcal{F}(\bar{\Omega})$. Sia inoltre $\mathfrak{l}(A, f) \leqslant 0$ per ogni $f \in M^+(\Omega, A, \Gamma_0, 0)$, allora:

(1.11.1.) $$p \geqslant p_A \geqslant 0 \qquad \text{quasi ovunque in } \Omega;$$

(1.11.2.) $$(p_A, A) \in M_+.$$

Dimostrazione. – (1.11.1.) segue dai teoremi 0.12., 0.11. e 1.5.. Infatti dal teorema 0.12. con $\mathfrak{D} = \Omega$, $F = A$, $\Gamma = \Gamma_0$, $v = p_0$, $u = p$, $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}(A, \cdot)$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ si ha $p \geqslant 0$ quasi ovunque in Ω; quindi, poichè per il teorema 1.5. $p_A \geqslant 0$ quasi ovunque in Ω, dal teorema 0.11. con $\mathfrak{D} = \Omega$, $F' = F'' = A$, $\Gamma = \Gamma_0$, $v = p_0$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{l}_2 = \mathfrak{l}(A, \cdot)$, $u = p$, $w = p_A$ si ha la tesi.

(1.11.2.) è conseguenza di 0.14.; infatti basta verificare che p_A soddisfa (1.10.2.) e ciò segue dal teorema 0.14. con $\mathfrak{D} = \Omega$, $F = A$, $\Gamma = \Gamma_0$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}(A, \cdot)$, $u = p$, $w = p_A$.

1.12. TEOREMA. – Siano $A \in \mathcal{F}_0(\Omega)$, $(p_A, A) \in M_+$, $\lambda_0 \in (0,1)$ come nella tesi del teorema 1.7., $\mu \in (0,1)$ e $g, h \in L^{2n/n+2}(\Omega)$, $g_i, h_i \in L^2(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$, verificanti (1.8.1.) su ogni sfera di centro $x \in \Omega$ e raggio R tale che $\overline{S(x, R)} \subset \Omega$ e per cui:

$$\mathfrak{l}(A, \varphi) = \int_\Omega g\varphi \, dy + \int_\Omega \sum_{i=1}^n g_i \, \partial_i \varphi \, dy \qquad \text{per ogni } \varphi \in \mathfrak{C}_0^\infty(\Omega) \tag{1.12.1.}$$

$$m(A, f) = \int_\Omega hf \, dy + \int_\Omega \sum_{i=1}^n h_i \, \partial_i f \, dy \qquad \text{per ogni } f \in \mathfrak{C}_0^\infty(\Omega) \, . \tag{1.12.2.}$$

Siano inoltre $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $(i, j = 1, \ldots, n)$ tali che $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(y)\xi_i\xi_j \geqslant \nu|\xi|^2$, $\nu > 0$, per ogni $\xi \in \boldsymbol{R}^n$ e per quasi ogni $y \in \Omega$, $b_i \in L^r(\Omega)$, $c_i \in L^r(\Omega)$, $(i = 1, \ldots, n)$, $d \in L^{r/2}(\Omega)$, $\psi \in L^{r-1}(\Gamma_1)$, $(r > n)$ ed $\mathfrak{a}\colon H^{1,2}(\Omega) \times H^{1,2}(\Omega) \to \boldsymbol{R}$ la forma bilineare continua così definita:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}(u, v) = \\ = \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \, \partial_j u \, \partial_i v + \sum_{i=1}^n b_i \, \partial_i uv + \sum_{i=1}^n c_i u \, \partial_i v + duv \Big) dy + \int_{\Gamma_1} \psi uv \, d\sigma \, . \end{aligned} \tag{1.12.3.}$$

Supponiamo ancora che per tale forma esista una costante $\eta \in \boldsymbol{R}_+$ tale che: $\mathfrak{a}(u, u) \geqslant \eta \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}$ per ogni $u \in H^{1,2}(\Omega)$.

Allora esiste $\beta \in (0,1)$, $\beta < \min(\lambda_0, \mu)$ tale che:

$$p_A \in \mathfrak{C}^{0,\beta}(\Omega) \, . \tag{1.12.4.}$$

DIMOSTRAZIONE. – Sia $x \in \Omega$, $R \in \boldsymbol{R}_+$ tale che $\overline{S(x, R)} \subset \Omega$. Sia inoltre $\xi_R \in H_0^{1,2}(S(x, R))$ tale che:

$$\mathfrak{a}_0(p_A + \xi_R, f) = 0 \qquad \text{per ogni } f \in H_0^{1,2}(S(x, R)) \, , \tag{1.12.5.}$$

ove $\mathfrak{a}_0\colon H_0^{1,2}(\Omega) \times H_0^{1,2}(\Omega) \to \boldsymbol{R}$ è la forma così definita:

$$\mathfrak{a}_0(u, v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \, \partial_j u \, \partial_i v \, dy \, . \tag{1.12.6.}$$

Osserviamo che la funzione ξ_A esiste per [S].

Poichè $(p_A, A) \in M_+$, ponendo $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a} - \mathfrak{a}_0$ e sfruttando (1.12.5.), si ha che, per ogni $f \in H_0^{1,2}(S(x, R))$, $f \geqslant 0$:

$$0 \leqslant \mathfrak{a}(p_A, f) + \mathfrak{l}(A, f) = - \mathfrak{a}_0(\xi_R, f) + \mathfrak{a}_1(p_A + \xi_R, f) - \mathfrak{a}_1(\xi_R, f) + \mathfrak{l}(A, f)$$

da cui:

$$\text{(1.12.7.)} \quad \mathfrak{a}(\xi_R, f) \leqslant \mathfrak{a}_1(p_A + \xi_R, f) + \mathfrak{l}(A, f) \qquad \text{per ogni } f \in H_0^{1,2}(S(x, R)),\ f \geqslant 0 .$$

Inoltre, poichè $A \in \mathcal{F}_0(\Omega)$, per (1.12.5.) e (1.5.2.) si ottiene che per ogni $f \in H_0^{1,2}(S(x, R))$, $f \geqslant 0$:

$$\mathfrak{a}(\xi_R, f) = \mathfrak{a}(p_A + \xi_R, f) - \mathfrak{a}(p_A, f) = \mathfrak{a}_1(p_A + \xi_R, f) - \mathfrak{a}(p_A, f) \geqslant$$
$$\geqslant \mathfrak{a}_1(p_A + \xi_R, f) - m(A, f) ,$$

da cui, sfruttando (1.12.7.) si ha:

$$\text{(1.12.8.)} \quad \mathfrak{a}_1(p_A + \xi_R, f) - m(A, f) \leqslant \mathfrak{a}(\xi_R, f) \leqslant \mathfrak{a}_1(p_A + \xi_R, f) + \mathfrak{l}(A, f)$$
$$\text{per ogni } f \in H_0^{1,2}(S(x, R)),\ f \geqslant 0 .$$

Sia ora $V_R \in H_{0\,\Delta}^{1,2}(S(x, R))$ ([S]), tale che:

$$\mathfrak{a}_0(V_R, f) + \mathfrak{a}_1(\xi_R, f) = 0 \qquad \text{per ogni } f \in H_0^{1,2}(S(x, R))$$

e

$$W_R = \xi_R - V_R \in H_0^{1,2}(S(x, R)) .$$

Allora per ogni $f \in H_0^{1,2}(S(x, R))$:

$$\mathfrak{a}_0(W_R, f) = \mathfrak{a}_0(\xi_R, f) - \mathfrak{a}_0(V_R, f) = \mathfrak{a}(\xi_R, f)$$

e quindi per (1.12.8.) per ogni $f \in H_0^{1,2}(S(x, R))$, $f \geqslant 0$:

$$\mathfrak{a}_1(p_A + \xi_R, f) - m(A, f) \leqslant \mathfrak{a}_0(W_R, f) \leqslant \mathfrak{a}_1(p_A + \xi_R, f) + \mathfrak{l}(A, f) .$$

Poichè $p_A + \xi_R$ verifica (1.12.5.), per il teorema 1.7. si ha che $p_A + \xi_R \in H_0^{1,2,\lambda_0}(S(x, R))$, per il teorema 2.2 di [Mo II] segue che $p_A + \xi_R \in \mathfrak{C}^{0,\lambda_0}(S(x, R))$ e quindi per il lemma 4.6 di [Mo II] segue che:

$$b_i \partial_i(p_A + \xi_R) \in L^s(S(x, R)) , \qquad c_i(p_A + \xi_R) \in L^2(S(x, R)) , \qquad d(p_A + \xi_R) \in L^{s'}(S(x, R)) ,$$

dove:

$$s = r/(r/2)+1 > 2n/(n+2)\,, \qquad s' = nr/(rn/2) - r + 2 > 2n/(n+2)$$

e:

$$\text{(1.12.9.)}\quad \left\{\begin{aligned} &\int\limits_{S(x,\varrho)} \Big|\sum_{i=1}^{n} b_i(y)\,\partial_i(p_A+\xi_R)(y)\Big|\,dy \leqslant \\ &\qquad \leqslant C(n)\|p_A+\xi_R\|_{H^{1,2,\lambda_0}(S(x,R))}\sum_{i=1}^{n}\|b_i\|_{L^r(S(x,R))}R^{(n/2)-1+\tau}(\varrho/R)^{n-2+\lambda+\tau} \\ &\int\limits_{S(x,\varrho)} \sum_{i=1}^{n}|c_i(y)|^2|(p_A+\xi_R)(y)|^2\,dy \leqslant \\ &\qquad \leqslant \big(C(n,\lambda_0)\|p_A+\xi_R\|_{H^{1,2,\lambda_0}(S(x,R))}\sum_{i=1}^{n}\|c_i\|_{L^r(S(x,R))}\big)^2 R^{2\tau}(\varrho/R)^{n-2+2\tau} \\ &\int\limits_{S(x,\varrho)} |d(y)(p_A+\xi_R)(y)|\,dy \leqslant \\ &\qquad \leqslant C(n,\lambda_0)\|p_A+\xi_R\|_{H^{1,2,\lambda_0}(S(x,R))}\|d\|_{L^{r/2}(S(x,R))}R^{n/2-1+2\tau}(\varrho/R)^{n-2+2\tau} \end{aligned}\right.$$

con $0 \leqslant \varrho \leqslant R$, $\tau = 1 - n/r$.

Quindi da (1.12.1.) e (1.12.9.) segue che per ogni $f \in \mathfrak{C}_0^\infty(S(x,R))$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_1(p_A+\xi_R, f) + \mathfrak{l}(A, f) &= \int\limits_{S(x,R)} \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i\,\partial_i(p_A+\xi_R) + d(p_A+\xi_R) + g\Big) f\,dy + \\ &\quad + \int\limits_{S(x,R)} \Big[\sum_{i=1}^{n}(c_i(p_A+\xi_R)+g_i)\Big]\partial_i f\,dy\,, \\ &\quad \text{con} \quad \left\{\begin{array}{l} b_i\,\partial_i(p_A+\xi_R) + d(p_A+\xi_R) + g \in L^{2n/(n+2)}(S(x,R)) \\ c_i(p_A+\xi_R) + g_i \in L^2(S(x,R)) \end{array}\right. \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} &\int\limits_{S(x,\varrho)} \Big|\sum_{i=1}^{n} b_i\,\partial_i(p_A+\xi_R) + d(p_A+\xi_R) + g\Big|\,dy \leqslant \\ &\qquad \leqslant \Big[[C(n)\|p_A+\xi_R\|_{H^{1,2,\lambda_0}(S(x,R))}\sum_{i=1}^{n}\|b_i\|_{L^r(S(x,R))}R^{\tau} + \\ &\qquad + C(n,\lambda_0)\|p_A+\xi_R\|_{H^{1,2,\lambda_0}(S(x,R))}\|d\|_{L^{r/2}(S(x,R))}R^{2\tau} + C_1\Big]R^{n/2-1}(\varrho/R)^{n-2+\lambda}\,, \\ &\int\limits_{S(x,\varrho)} \sum_{i=1}^{n}|g_i + c_i(p_A+\xi_R)|^2\,dy \leqslant \\ &\qquad \leqslant 2\Big[\Big(C(n,\lambda_0)\|p_A+\xi_R\|_{H^{1,2,\lambda_0}(S(x,R))}\sum_{i=1}^{n}\|c_i\|_{L^r(S(x,R))}\Big)^2 + C_3^2\Big](\varrho/R)^{n-2+2\lambda}\,, \end{aligned}$$

dove $0 \leqslant \varrho \leqslant R$, $\lambda \leqslant \min(\mu, \tau)$, $\lambda \in (0,1)$.

Mentre da (1.12.2.) e (1.12.9.) segue che per ogni $f \in \mathfrak{C}_0^\infty(S(x,R))$:

$$\mathfrak{a}_1(p_A + \xi_R, f) - m(A, f) = \int\limits_{S(x,R)} \left(\sum_{i=1}^n b_i\, \partial_i(p_A + \xi_R) + d(p_A + \xi_R) - h \right) f\, dy + \int\limits_{S(x,R)} \left[\sum_{i=1}^n \left(c_i(p_A + \xi_R) - h_i \right) \right] \partial_i f\, dy\,,$$

$$\text{con} \quad \begin{cases} b_i\, \partial_i(p_A + \xi_R) + d(p_A + \xi_R) - h \in L^{2n/(n+2)}(S(x,R)) \\ c_i(p_A + \xi_R) - h_i \in L^2(S(x,R)) \end{cases}$$

e:

$$\int\limits_{S(x,\varrho)} \left| \sum_{i=1}^n b_i\, \partial_i(p_A + \xi_R) + d(p_A + \xi_R) - h \right| dy \leqslant \left[C(n) \|p_A + \xi_R\|_{H^{1,2,\lambda_0}(S(x,R))} \sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L^r(S(x,R))} R^\tau + C(n, \lambda_0) \|p_A + \xi_R\|_{H^{1,2,\lambda_0}(S(x,R))} \|d\|_{L^{r/2}(S(x,R))} R^{2\tau} + C_2 \right] R^{n/2-1} (\varrho/R)^{n-2+\lambda}\,,$$

$$\int\limits_{S(x,\varrho)} \sum_{i=1}^n |c_i(p_A + \xi_R) - h_i|^2\, dy \leqslant 2 \left[\left(C(n, \lambda_0) \|p_A + \xi_R\|_{H^{1,2,\lambda_0}(S(x,R))} \sum_{i=1}^n \|c_i\|_{L^r(S(x,R))} \right)^2 + C_4^2 \right] (\varrho/R)^{n-2+2\lambda}\,, \qquad \text{dove } 0 \leqslant \varrho \leqslant R,\ \lambda \leqslant \min(\mu, \tau),\ \lambda \in (0,1)\,.$$

È possibile quindi applicare il teorema 1.8. ottenendo che $W_R \in H^{1,2,\alpha}(S(x,R))$ e il corollario 1.9. che dà:

$$W_R \in \mathfrak{C}^{0,\alpha}(S(x,R))\,, \quad \alpha < \min(\lambda_0, \lambda),\ \alpha > 0\,. \tag{1.12.10.}$$

Osserviamo ora che per ogni $f \in H_0^{1,2}(S(x,R))$:

$$\mathfrak{a}(V_R, f) = \mathfrak{a}(\xi_R, f) - \mathfrak{a}(W_R, f) = \mathfrak{a}(\xi_R, f) - \mathfrak{a}_0(W_R, f) - \mathfrak{a}_1(W_R, f) = -\,\mathfrak{a}_1(W_R, f)\,.$$

Perciò, per il lemma 4.6 e per il teorema 4.6 di [Mo II], $V_R \in H^{1,2,\alpha}(S(x,R))$, quindi, per il teorema 2.2 di [Mo II], $V_R \in \mathfrak{C}^{0,\alpha}(S(x,R))$.

Allora si ha che $\xi_R = W_R + V_R \in \mathfrak{C}^{0,\alpha}(S(x,R))$, ma, poichè $p_A + \xi_R \in \mathfrak{C}^{0,\lambda_0}(S(x,R))$, si ottiene che $p_A \in \mathfrak{C}^{0,\alpha}(S(x,R))$, essendo $\alpha < \lambda_0$, da cui la tesi.

1.13. Teorema. – Sia $A \in \mathcal{F}_0(\Omega)$, $(p_A, A) \in M_+$, $p_A \neq 0$, $p_A \in \mathfrak{C}^0(\Omega)$. Allora:

$$\mathring{A} = \overline{\{x \in \Omega\colon p_A(x) > 0\}}^{\circ} = \{x \in \Omega\colon p_A(x) > 0\}\,.$$

Dimostrazione. – Poichè $p_A \in \mathfrak{C}^0(\Omega)$ è ovvio che:

$$\{x \in \Omega\colon p_A(x) > 0\} \subset \overline{\{x \in \Omega\colon p_A(x) > 0\}}^{\circ}\,,$$

quindi per ottenere la tesi è sufficiente provare che:

$$\overset{\circ}{\overline{\{x \in \Omega : p_A(x) > 0\}}} \subset \mathring{A} \subset \{x \in \Omega : p_A(x) > 0\} .$$

La prima inclusione risulta dal fatto che $p_A \in M(\Omega, A, \Gamma_0, p_0)$ e che in effetti $p_A = 0$ in $\Omega \setminus A$ ovunque. Infatti, se esistesse $x \in \Omega \setminus A$ tale che $p_A(x) > 0$, poichè $p_A \in \mathfrak{C}^0(\Omega)$, esisterebbe $S(x, R) \subset \Omega \setminus A$ tale che $p_A > 0$ in $S(x, R)$, ma, poichè $\Omega \setminus A \subset \subset \overline{\Omega \setminus A} \cap \Omega$ e $|S(x, R)| > 0$, si contraddice il fatto che $p_A \in M(\Omega, A, \Gamma_0, p_0)$. Per quanto riguarda la seconda inclusione osserviamo che per ogni $\psi \in M^+(\Omega, A, \Gamma_0, 0)$ si ha:

$$\mathfrak{a}(p_A, \psi) = -\mathfrak{l}(A, \psi) \geqslant 0$$

e, poichè $\mathfrak{C}_0^1(A) \subset M(\Omega, A, \Gamma_0, 0)$, $p_A \neq 0$, per il corollario 1 di [C I], si ottiene l'inclusione voluta, in quanto p_A soddisfa un principio di minimo.

1.14. Osservazione. – Sia $A \in \mathcal{F}_0(\Omega)$, $(p_A, A) \in M_+$, $p_A \neq 0$, $p_A \in \mathfrak{C}^0(\Omega)$, $M(\Omega, \overline{\mathring{A}}, \Gamma_0, p_0) \neq \emptyset$. Inoltre se $A_1, A_2 \in \mathcal{F}(\overline{\Omega})$, $A_2 \subset A_1$ si abbia $\mathfrak{l}(A_1, f) = \mathfrak{l}(A_2, f)$ per ogni $f \in H^{1,2}(\Omega)$, $f = 0$ q.o. in $A_1 \setminus A_2$. Allora $p_A = p_{\overline{\mathring{A}}}$ q.o. in Ω.

Intanto dal teorema 1.13. segue che $p_A = 0$ in $\Omega \setminus \overline{\mathring{A}}$ e quindi in $\overline{\Omega \setminus \overline{\mathring{A}}} \cap \Omega$, in quanto $p_A \in \mathfrak{C}^0(\Omega)$.

Inoltre, da (1.3.1.), per ogni $f \in M(\Omega, \overline{\mathring{A}}, \Gamma_0, 0) \subset M(\Omega, A, \Gamma_0, 0)$ si ha che:

$$\mathfrak{a}(p_A, f) + \mathfrak{l}(A, f) = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathfrak{a}(p_{\overline{\mathring{A}}}, f) + \mathfrak{l}(\overline{\mathring{A}}, f) = 0 .$$

Allora per ogni $f \in M(\Omega, \overline{\mathring{A}}, \Gamma_0, 0)$ si ottiene che:

$$\mathfrak{a}(p_A - p_{\overline{\mathring{A}}}, f) = 0 .$$

Scegliendo ora $f = p_A - p_{\overline{\mathring{A}}} \in M(\Omega, \overline{\mathring{A}}, \Gamma_0, 0)$, segue, grazie alla debole coercività di $\mathfrak{a}$, che $p_A = p_{\overline{\mathring{A}}}$ q.o. in $\overline{\mathring{A}}$.

BIBLIOGRAFIA

[A] H. W. Alt, *A free boundary problem associated with the flow of ground water*, Arch. Rat. Mech. Anal., **64** (1977), pp. 111-126.

[An] A. Ancona, *Continuité des contractions dans les espaces de Dirichlet*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, **563** (1976), pp. 1-26.

[B] C. Baiocchi, *Problèmes à frontière libre et inéquations variationnelles*, C.R. Acad. Sci., Paris, **283** (1976), pp. 29-32.

[BC] C. BAIOCCHI - A. CAPELO, *Disequazioni variazionali e quasi-variazionali. Applicazioni a problemi di frontiera libera*, vol. I, Pitagora, 1978.

[C I] M. CHICCO, *Principio di massimo generalizzato e valutazione del primo autovalore per problemi ellittici del secondo ordine di tipo variazionale*, Ann. Mat. Pura Appl. (IV), vol. 87 (1970), pp. 1-10.

[C II] M. CHICCO, *Confronto tra due modi di definire le disuguaglianze per le funzioni di* $H^{1,p}(\Omega)$, Boll. Un. Mat. Ital., (4), **4** (1971), pp. 668-676.

[F] A. FRIEDMAN, *Variational Principles and Free-Boundary Problems*, Wiley-Interscience, 1982.

[Fe] H. FEDERER, *Geometric Measure Theory*, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1969.

[LS] J. L. LIONS - G. STAMPACCHIA, *Variational Inequalities*, Comm. Pure Appl. Math., **20** (1967), pp. 493-514.

[Mo I] C. B. MORREY, *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1966.

[Mo II] C. B. MORREY, *Second Order Elliptic Equations in Several Variables and Hölder Continuity*, Math. Z., **72** (1959), pp. 146-164.

[N] J. NEČAS, *Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques*, Masson, Paris et Academia, Prague, 1967.

[RS] A. M. ROSSI - P. SAMBUCETI, *Su un problema di frontiera libera*, (to appear).

[S] G. STAMPACCHIA, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **15**(1) (1965), pp. 189-258.

[V] J. VÄISÄLÄ, *Capacity and Measure*, Michigan Math. J., **22** (1975), pp. 1-3.