Serie algebriche di divisori su una curva e su una superficie (*).

CIRO CILIBERTO - FRANCO GHIONE (Napoli) (**)

Summary. – *Let X be a complete variety over an algebraically closed field k. Γ is said to be an algebraic series of divisors on X, parametrized by a k-scheme T, if it is an effective Cartier divisor in $X \times T$, flat over T. If T is pure of dimension r, r is said to be the dimension of the series. In this paper, following classical ideas of Allen, Castelnuovo and Torelli, we study some properties of algebraic series of any dimension of divisors on an irreducible, non singular curve, and of 1-dimensional series of divisors on an irreducible, non singular surface.*

0. – Introduzione.

Sia X una varietà completa, cioè uno schema integro, separato, di tipo finito sopra un campo algebricamente chiuso k, e proprio su k. Diremo che Γ è una *serie algebrica* di divisori su X parametrizzata da un k-schema T, se Γ è un divisore di Cartier effettivo di $X \times T$ piatto su T. Se T è puro di dimensione r, r sarà detta la dimensione della serie Γ.

In questo lavoro si studiano alcune proprietà notevoli delle serie di ogni dimensione di divisori su una curva non singolare, richiamandosi ad alcuni classici lavori di ALLEN, CASTELNUOVO e TORELLI (cfr. [A], [C], [T_1], [T_2], [T_3]), e si affronta uno studio analogo, relativamente alle serie di dimensione uno, di divisori su una superficie non singolare.

Nel caso delle curve si introducono alcuni caratteri numerici legati a una serie di divisori di dimensione r, detti *difetti di equivalenza*. Questi caratteri, che non si trovano nella letteratura moderna, risalgono a Castelnuovo per $r = 1$ e, nel caso generale, ad Allen e Torelli. Utilizzando i difetti di equivalenza si può dimostrare in ogni caratteristica una notevole formula numerativa di Allen che dà il numero dei divisori della serie Γ dotati di n_1 punti p_1-pli, n_2 punti p_2-pli, ..., n_k punti p_k-pli, essendo $p_1 > p_2 > \dots > p_k \geq 1$, $p_1 n_1 + p_2 n_2 + \dots + p_k n_k = n$, $n_1 + \dots + n_k = n - r$, dove n è il grado dei divisori della serie e r ne è la dimensione (cfr. Teorema (1.4)). A partire da questa formula è facile dedurre il criterio di equivalenza di Castelnuovo-Torelli (cfr. Corollario (1.6)). Questo afferma che una serie Γ irriducibile di dimen-

(*) Entrata in Redazione il 16 luglio 1983.
(**) Gli Autori sono membri del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

sione r, ha sempre

$$d \leqslant \nu(r+1)(n-r+rg) \tag{0.1}$$

divisori dotati di un punto $(r+1)$-plo, dove n è, come dinanzi, il grado dei divisori della serie, ν ne è il cosiddetto *indice*, ossia il numero dei divisori di Γ contenenti un punto generico della curva, g è il genere della curva. Inoltre in (0.1) vale l'uguaglianza se e solo se i divisori di Γ sono tra loro linearmente equivalenti. Lo scarto tra i due membri di (0.1) è essenzialmente il primo difetto di equivalenza della serie Γ.

Una ulteriore utilizzazione dei suddetti caratteri numerici viene indicata nel § 2, provando la nota disuguaglianza di Castelnuovo-Severi relativa alle corrispondenze su una curva algebrica liscia irriducibile. Se X è una tale curva e $\Gamma \subset X \times X$ è una corrispondenza di indici n_1, n_2, allora per il numero di autointersezione del divisore Γ sulla superficie $X \times X$ vale la seguente limitazione

$$\int [\Gamma]^2 \leqslant 2n_1 n_2 \tag{0.2}$$

dove $[\Gamma]$ è la classe fondamentale del ciclo Γ su $X \times X$ e $\int$ indica il grado di un ciclo zero-dimensionale. Questa formula è stata utilizzata, come è noto, da A. WEIL per dimostrare l'ipotesi di Riemann per le curve algebriche su un campo di caratteristica positiva. Per tale motivo la disuguaglianza (0.2), originariamente dovuta a CASTELNUOVO e SEVERI (cfr. [C], [S]), è stata ridimostrata in ogni caratteristica prima dallo stesso A. WEIL, poi da MATTUCK e TATE e infine da GROTHENDIECK utilizzando il teorema dell'indice di Hodge sulle superficie (cfr. [W], [M], [G], [GH$_1$]). La dimostrazione qui riportata, vicina a quella di Severi, ci pare sia più geometrica e forse più semplice delle altre; nello stesso tempo essa dà anche una informazione in più, in quanto consente di interpretare in molti casi lo scarto tra i due membri di (0.2) come il difetto di equivalenza di Γ.

Nel § 3 vengono definiti alcuni caratteri numerici associati a una serie unidimensionale irriducibile Γ di divisori su una superficie liscia Y. Se $\Gamma = \{C_x\}_{x\in X}$ è la data serie, con X curva liscia irriducibile e C_x liscia per x generico in X, si introduce il carattere z, detto *difetto di equivalenza*, o *numero di Torelli*, della serie Γ, nel modo seguente

$$z = \nu\big(n + 4g - 4 + c_2(Y)\big) - \delta \tag{0.3}$$

dove n è il *grado* di Γ, ossia il numero di autointersezione della curva C_x su Y, g ne è il genere aritmetico, ν è l'*indice* di Γ, cioè il numero di curve di Γ passanti per un punto generico di Y, $c_2(Y)$ è il grado della seconda classe di Chern del fibrato tangente di Y, δ è il numero di nodi, contati con opportune molteplicità, che compaiono complessivamente nelle curve della serie Γ.

Nel § 4 si studiano le serie unidimensionali di grado $n=1$ e si dimostra che queste serie possono esistere solo su superficie di particolari tipi, che vengono classificati.

Nel § 5 si dimostra, in opportune ipotesi di generalità, il risultato principale di questo lavoro, già enunciato da TORELLI in [T₁]: se $\nu > 1$ allora z è sempre non negativo ed è nullo se e solo se le curve della serie Γ sono tra loro linearmente equivalenti. La dimostrazione di Torelli, dalla quale abbiamo tratto alcune idee essenziali, contiene tuttavia delle lacune. Intanto Torelli non chiarisce le ipotesi di generalità in cui la formula è valida. Inoltre egli sembra implicitamente riferirsi al caso in cui la superficie abbia genere geometrico positivo. Infine il calcolo, esplicitamente fornito da Torelli, di z è errato: in esso infatti non compare un carattere che noi invece troviamo e che gioca, nel corso della dimostrazione, un ruolo importante.

Alcuni problemi sono segnalati alla fine del § 5.

1. - Serie di divisori su una curva.

Sia X una curva liscia, irriducibile, completa, di genere g definita su un campo algebricamente chiuso k. Sia Γ una famiglia algebrica di divisori effettivi di grado n su X, parametrizzata da un k-schema T completo, ridotto, puro, di dimensione r. Γ è allora un divisore di Cartier di $X \times T$ piatto su T. Con abuso di notazione denoteremo ancora con Γ il sottoschema di $X \times T$ definito dal divisore Γ. Se p_1, p_2 sono le proiezioni di $X \times T$ su X e su T rispettivamente, porremo $\pi_i = p_i|_\Gamma$, $i = 1, 2$.

Γ sarà detta una *serie* di divisori di X di *grado* n.

Per la proprietà universale che definisce lo schema dei divisori effettivi di X, la serie Γ determina un morfismo

$$\alpha\colon T \to \mathrm{Div}_x^n = X(n)$$

essendo $X(n)$, il prodotto simmetrico n volte di X, la componente dello schema di Hilbert dei divisori di X che parametrizza i divisori effettivi di grado n di X. Inoltre se $\mathfrak{D}$ è il divisore universale in $X \times X(n)$, allora è

$$(i_X \times \alpha)^*(\mathfrak{D}) = \Gamma$$

i_X essendo l'identità di X. Denoteremo nel seguito con Z il sottoschema chiuso $\alpha(T)$ di $X(n)$ e ci riferiremo sempre al caso in cui Z è puro e $\dim Z = \dim T = r$; r sarà detta allora la *dimensione* della serie Γ.

Sia x un punto di X e consideriamo il divisore di $X(n)$ definito da

$$\mathfrak{D}_x = \mathfrak{D}|_{x \times X(n)} .$$

Insiemisticamente si ha

$$\mathfrak{D}_x = \{D \in X(n) \colon D = x + D',\ D' \in X(n-1)\} .$$

Denoteremo con ξ la classe del divisore $\mathfrak{D}_x$ nell'anello di Chow di $X(n)$; ovviamente la classe di equivalenza numerica di ξ non dipende da x.

Sia $E \in X(n)$ un fissato divisore effettivo di grado n su X, e consideriamo la mappa di Abel-Jacobi

$$\varphi\colon X(n) \to J(X) = \mathrm{Alb}\,(X)$$

tale che $\varphi(E) = 0$. Sia Θ un divisore theta su $J(X)$ e θ la classe, nell'anello di Chow di $X(n)$, del divisore $\varphi^*(\Theta)$. Ovviamente la classe di equivalenza numerica di θ non dipende nè da E nè dal particolare divisore theta fissato su $J(X)$.

È possibile ora definire gli interi

$$z_i = \int [Z]\cdot \theta^i \cdot \xi^{r-i}$$

per ogni $i = 0, \ldots, r$, dove $[Z]$ è la classe fondamentale del ciclo associato al sottoschema puro Z e $\int$ denota il grado di un ciclo di dimensione zero.

Si noti che

$$z_0 = \int [Z]\cdot \xi^r$$

detto *indice* della serie Γ, si interpreta geometricamente come il numero dei divisori della serie contenenti r punti generici di X. Esso è sempre un numero positivo, essendo $\mathfrak{D}_x$ un divisore ampio di $X(n)$ (cfr. [GH_2]). Se l'indice di Γ è uno, si dice che Γ è una *involuzione* su X.

L'intero z_1, introdotto da CASTELNUOVO in [C] per il caso $r = 1$, e da TORELLI in [T_2] per il caso $r = 2$, prende il nome di *difetto di equivalenza* della serie Γ. La definizione degli interi z_i da noi data risale essenzialmente ad ALLEN (cfr. [A]). Per analogia con z_1, chiameremo z_i l'*i-simo difetto di equivalenza* della serie Γ, per ogni $i = 1, \ldots, r$.

Una serie Γ di divisori di grado n, dimensione r, indice z_0, difetti di equivalenza $z_1, \ldots, z_r$, sarà denotata col simbolo $\Gamma(n, r, z_0, \ldots, z_r)$.

Vogliamo ora dimostrare il seguente

TEOREMA (1.1). – *Sia $\Gamma(n, r, z_0, z_1, \ldots, z_r)$ una serie di divisori su X. Si ha allora:*

(*a*) *$z_i \geq 0$ per ogni $i = 1, \ldots, r$;*

(*b*) *per ogni $i = 0, \ldots, r-1$ è $z_{i+1} = 0$ se e solo se $\dim \varphi(Z) \leq i$.*

DIMOSTRAZIONE. – La (*a*) è ovvia. Infatti è facile vedere che, se x non è contenuto in tutti i divisori di ogni componente irriducibile di Z, allora il ciclo di intersezione $Z\cdot\mathfrak{D}_x = Z_x$ è definito ed è effettivo, puro, di dimensione $r-1$. Induttivamente possiamo concludere che, per ogni $i \leq r$, il ciclo

$$Z_{x_1, \ldots, x_{r-i}} = Z\cdot \mathfrak{D}_{x_1}\cdot \ldots \cdot \mathfrak{D}_{x_{r-i}}$$

è definito, effettivo, puro, di dimensione i, se i punti $x_1, \ldots, x_{r-i}$ sono generici in X. Poichè si ha l'equivalenza algebrica $\mathfrak{D}_x \equiv \mathfrak{D}_y$ per ogni coppia $(x, y) \in X \times X$, otteniamo

$$z_i = \int [Z_{x_1, \ldots, x_{r-i}}] \cdot \theta^i .$$

Per l'ampiezza di Θ su $J(X)$ e per la formula di proiezione, ne segue che $z_i \geqslant 0$. Per dimostrare la (b) cominciamo col provare l'asserto nel caso $i = r - 1$, in cui si tratta di verificare che $z_r = 0$ se e solo se $\dim \varphi(Z) \leqslant r - 1$. Dalla formula di proiezione otteniamo

$$z_r = \int [Z] \cdot \varphi^*[\theta]^r = \int \varphi_*[Z] \cdot [\Theta]^r$$

e dunque, essendo Θ ampio, è $z_r = 0$ se e solo se $\varphi_*[Z] = 0$. D'altra parte, se Z' è una componente irriducibile di Z allora è $\varphi_*[Z'] = 0$ se e solo se $\dim \varphi(Z') < \dim Z$. Da ciò segue l'asserto, e la (b) risulta anche completamente provata per $r = 1$. Procediamo allora per induzione su r, supponendo $r > 1$ e $i < r - 1$. Sia x un punto generico di X, in modo che $Z_x = Z \cdot \mathfrak{D}_x$ sia puro di dimensione $r - 1$. La serie Γ_x definita da Z_x ha, com'è facile verificare, lo stesso h-simo difetto di equivalenza di Γ, per ogni $h = 1, \ldots, r - 1$. Quindi, in virtù dell'ipotesi induttiva, abbiamo che $z_{i+1} = 0$ se e solo se $\dim \varphi(Z_x) \leqslant i$. D'altra parte, se Z' è una componente irriducibile di Z allora la fibra generica del morfismo

$$\varphi|_{Z'} \colon Z' \to \varphi(Z')$$

ha la dimensione maggiore o uguale a uno. Infatti tale dimensione, pari a $r - \dim \varphi(Z')$, è maggiore o uguale della dimensione della fibra generica della restrizione di φ ad ogni componente irriducibile di Z'_x. Pertanto

$$r - \dim \varphi(Z') \geqslant r - 1 - \dim \varphi(Z'_x) \geqslant r - 1 - i \geqslant 1 .$$

Allora il divisore $\mathfrak{D}_x$, essendo ampio, interseca tutte le fibre di $\varphi|_{Z'}$ e da ciò segue che $\varphi(Z') \subseteq \varphi(Z_x)$. Ripetendo il ragionamento per tutte le componenti irriducibili di Z si trova che $\varphi(Z) = \varphi(Z_x)$, da cui l'asserto, essendo $\dim \varphi(Z_x) \leqslant i$.

COROLLARIO (1.2) (Allen). – *Data una serie $\Gamma(n, r, z_0, \ldots, z_r)$ di divisori su una curva X, $\varphi(Z)$ ha dimensione i se e solo se $z_{i+1} = 0$ e $z_i > 0$, con $i = 0, \ldots, r - 1$.*

Osserviamo esplicitamente che se T è irriducibile, allora $\varphi(Z)$ ha dimensione i se e solo se i divisori di Z linearmente equivalenti al generico divisore $D \in Z$ costituiscono una sottovarietà di Z di dimensione $r - i$. Inoltre se $z_{i+1} = 0$ allora anche $z_j = 0$ per ogni $j > i$. Possiamo allora enunciare, come conseguenza del corollario (1.2), il seguente risultato, che trovasi stabilito in [A], pag. 348.

COROLLARIO (1.3). – *Data una serie Γ di divisori di X, i divisori di ciascuna componente irriducibile di Z sono tra loro linearmente equivalenti se e solo se $z_1 = 0$ e quindi se e solo se $z_i = 0$ per ogni $i \geqslant 1$.*

I caratteri dianzi introdotti risultano importanti in quanto compaiono in una notevole formula numerativa che trovasi già in [A], pag. 349, e che generalizza quella ben nota di DE JONQUIÈRES (cfr. [DJ], [T_2]). Allo scopo di ritrovare la suddetta formula, introduciamo alcune notazioni. Siano $p_1, \ldots, p_k$ interi tali che $p_1 > \ldots > p_k > 0$ e $n_1, \ldots, n_k$ interi positivi tali che

$$\sum_{i=1}^{k} p_i n_i = n \,, \qquad \sum_{i=1}^{k} n_i = n - r \,.$$

Consideriamo il morfismo

$$j\colon X(n_1) \times \ldots \times X(n_k) \to X(n)$$

definito, sui punti chiusi, da

$$j(D_1, \ldots, D_k) = p_1 D_1 + \ldots + p_k D_k \,.$$

L'immagine di j è una sottovarietà chiusa di $X(n)$ di codimensione r, che denoteremo con il simbolo $\Delta_X(n_1^{p_1}, \ldots, n_k^{p_k})$ e chiameremo *diagonale di $X(n)$ di tipo* $(n_1^{p_1}, \ldots, n_k^{p_k})$. Data una serie Γ di grado n e dimensione r è definito l'intero

$$d_\Gamma(n_1^{p_1}, \ldots, n_k^{p_k}) = \int [Z] \cdot [\Delta_X(n_1^{p_1}, \ldots, n_k^{p_k})]$$

che, qualora l'intersezione dei cicli considerati sia definita, dà il numero dei divisori della serie Γ dotati di n_1 punti p_1-upli, ..., n_k punti p_k-upli, contati con opportuna molteplicità.

Vale il

TEOREMA (1.4) (Allen). – *Con le notazioni dianzi introdotte, vale la seguente formula*

$$d_\Gamma(n_1^{p_1}, \ldots, n_k^{p_k}) = \frac{p_1^{n_1} \ldots p_k^{n_k}}{n_1! \ldots n_k!} \sum_{i=1}^{n-r} (-1)^i z_i \sum_{l=1}^{n-r} y_l \binom{g-i}{l-i} l!\,(n-r-l)!$$

dove

$$y_l = \sum_L \binom{n_1}{l_1} \ldots \binom{n_k}{l_k} (p_1 - 1)^{l_1} \ldots (p_k - 1)^{l_k}$$

la somma essendo effettuata su tutti i multiindici $L = (l_1, \ldots, l_k)$ tali che $\sum_{i=1}^{k} l_i = l$ e che $l_i \leqslant n_i$ per ogni $i = 1, \ldots, k$. Inoltre se $p_k = 1$ e $l_k = 0$ si pone $(p_k - 1)^{l_k} = 1$.

Dimostrazione. – La formula segue, mediante calcoli semplici, ma tediosi, che non riportiamo, dalla definizione degli interi z_i e dal teorema (15.2) di [MD] che fornisce una formula per $[\Delta_X(n_1^{p_1}, \ldots, n_k^{p_k})]$ in termini di ξ e θ. Notiamo che le formule di Macdonald, dimostrate sul campo complesso, si estendono a ogni campo algebricamente chiuso in virtù dei risultati di [CO].

Interessante è l'applicazione della formula di Allen al caso $n_1 = 1$, $n_2 = n - r - 1$, $p_1 = r + 1$, $p_2 = 1$. Qui $d_\Gamma(1^{r+1}, (n - r - 1)^1)$ fornisce il numero dei divisori della serie Γ dotati di un punto $(r + 1)$-plo. Si ha precisamente

$$d_\Gamma(1^{r+1}, (n - r - 1)^1) = (r + 1)[z_0(n - r + gr) - rz_1] \tag{1.5}$$

formula dovuta a Castelnuovo per $r = 1$ e a Torelli per r qualunque (cfr. [C], [T_1]). Tenendo presente i corollari (1.2), (1.3) e la formula (1.5), si ha il

Corollario (1.6) (Castelnuovo-Torelli). – *Data su una curva X una serie Γ irriducibile di divisori di grado n e dimensione r, allora per il numero d dei divisori della serie dotati di un punto $(r + 1)$-plo si ha la limitazione*

$$d \leqslant (r + 1)(n - r + rg)z_0$$

valendo l'uguaglianza se e solo se $z_1 = 0$ ovvero se e solo se i divisori della serie Γ sono contenuti in una stessa serie lineare.

È ovvio che un enunciato analogo può formularsi anche per le serie riducibili ma su ciò non ci attardiamo.

Il corollario (1.6) chiarisce il senso della denominazione di difetto di equivalenza per l'intero z_1.

Come ulteriore applicazione del teorema (1.4), scriviamo esplicitamente la formula per $d_\Gamma(2^2, (n - r - 2)^1)$ che utilizzeremo nel seguito. Si ha

$$\begin{aligned} d(2^2, (n - r - 2)^1) = 2z_0[(n - r)(n - r - 1) + 2g(n - r - 1) + g(g - 1)] - \\ - 4z_1(n - r - 2 + g) + 4z_2 . \end{aligned} \tag{1.7}$$

2. – La disuguaglianza di Castelnuovo-Severi.

In questo paragrafo vogliamo applicare i risultati precedenti allo studio delle corrispondenze tra curve.

Siano X_1, X_2 curve liscie, irriducibili e complete, di genere g_1, g_2 rispettivamente. Una *corrispondenza* Γ tra X_1 e X_2 è un divisore effettivo Γ di $X_1 \times X_2$. Gli indici della corrispondenza sono definiti dai numeri di intersezione

$$n_i = \int [\Gamma] \cdot [p_i^*(x_i)] , \quad x_i \in X_i , \; i = 1, 2 \tag{2.1}$$

essendo $p_i\colon X_1\times X_2 \to X_i$ le proiezioni. Supponiamo che Γ sia piatta su X_1, il che equivale a dire che il divisore Γ non ha nessuna componente del tipo $p_1^*(x_1)$, con $x_1 \in X_1$. Allora Γ definisce una serie $\Gamma(n_1, 1, z_0^{(1)}, z_1^{(1)})$ su X_2. Analogamente, se Γ è piatto su X_2, esso definisce una serie $\Gamma(n_2, 1, z_0^{(2)}, z_1^{(2)})$ su X_1. Siano

$$\alpha_1\colon X_1 \to X_2(n_1)$$
$$\alpha_2\colon X_2 \to X_1(n_2)$$

i relativi morfismi (cfr. § 1) e denotiamone con a_1, a_2 i gradi sulle rispettive immagini Z_1 e Z_2. È del tutto evidente che

$$n_1 = a_2 z_0^{(2)}, \qquad n_2 = a_1 z_0^{(1)}. \tag{2.2}$$

Dimostriamo il seguente

TEOREMA (2.3). – *Sia $\Gamma \subset X_1\times X_2$ una curva completa, liscia, irriducibile di genere g, piatta su X_1 e X_2 e tale che $\pi_i = p_i|_\Gamma$ sia separabile per $i = 1, 2$. Risulta allora*

(*a*) $a_1 z_1^{(1)} = a_2 z_1^{(2)} = n_1 n_2 + n_1(g_1 - 1) + n_2(g_2 - 1) - (g-1)$;

(*b*) $\int [\Gamma]^2 = 2n_1 n_2 - 2a_1 z_1^{(1)}$.

DIMOSTRAZIONE. – Sia $\mathfrak{D}^{(2)}$ il divisore universale in $X_2\times X_2(n_1)$ e ne sia q_1 la proiezione su $X_2(n_1)$. Si ha il diagramma cartesiano

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathfrak{D}^{(2)} \arrow[d, "q_1"] \\ X_1 \arrow[r, "\alpha_1"] & X_2(n_1) \end{tikzcd}$$

dove, è bene osservarlo esplicitamente, β_1, al pari di α_1, ha grado a_1 sulla sua immagine. Siano R_1 il divisore di ramificazione di π_1 su Γ e $\Delta^{(2)}$ il divisore di ramificazione di q_1 su $\mathfrak{D}^{(2)}$. Si ha

$$R_1 = \beta_1^*(\Delta^{(2)})$$

(cfr. [H], pag. 175). Di qui ne segue

$$\int [R_1] = \int \alpha_{1*}\pi_{1*}[R_1] = \int q_{1*}\beta_{1*}\beta_1^*[\Delta^{(2)}] = a_1\int q_{1*}[\beta_1(\Gamma)]\cdot[\Delta^{(2)}] = a_1\int [Z_1]\cdot[q_{1*}(\Delta^{(2)})]\,.$$

Ma è chiaro che $q_{1*}(\Delta^{(2)})$, il divisore di diramazione di q_1 su $X_2(n_1)$, coincide con

$\Delta_{X_2}(1^2, (n_1-2)^1)$. Quindi, tenendo presente la (1.5) e la (2.2) si ha

$$\int[R_1] = 2n_2(n_1+g_2-1) - 2a_1 z_1^{(1)} . \tag{2.4}$$

Del tutto analogamente, se R_2 è il divisore di ramificazione di $\pi_2\colon \Gamma \to X_2$ su Γ si ha

$$\int[R_2] = 2n_1(n_2+g_1-1) - 2a_2 z_1^{(2)} . \tag{2.5}$$

D'altra parte, applicando la formula di Hurwitz al morfismo $\pi_i\colon \Gamma \to X_i$, $i=1,2$, si trova

$$2g-2 = n_i(2g_i-2) + \int[R_i] .$$

Di qui e dalle (2.4), (2.5), si trae facilmente la (a). Quanto alla (b), essa si deduce con semplici calcoli dalla (a), applicando la formula di aggiunzione sulla superficie $X_1 \times X_2$, e tenendo presente che un divisore canonico su $X_1\times X_2$ è $p_1^*(K_{X_1}) + p_2^*(K_{X_2})$, K_{X_i} essendo un divisore canonico di X_i, $i=1,2$.

Dato ora un qualunque divisore Γ su $X_1\times X_2$, possiamo sempre associare ad esso un carattere z_Γ, che diremo *difetto di equivalenza della corrispondenza* Γ, definito da

$$z_\Gamma = 2n_1n_2 - \int[\Gamma]^2$$

dove n_1, n_2 sono ancora definiti dalla (2.1). È chiaro che

(i) se $\Gamma_1 \equiv \Gamma_2$ allora è $z_{\Gamma_1} = z_{\Gamma_2}$;

(ii) se $\Gamma_1 = \Gamma + p_i^{-1}(x_i)$, $x_i \in X_i$, allora $z_{\Gamma_1} = z_\Gamma$;

(iii) se Γ verifica le ipotesi del teorema (2.2) allora $z_\Gamma \geqslant 0$, avendosi l'uguaglianza se e solo se i divisori della serie Γ su X_1 e su X_2 sono contenuti in una serie lineare; circostanza, questa ultima, che si verifica se e solo se Γ è linearmente equivalente a un divisore del tipo $p_1^*(D_1) + p_2^*(D_2)$, essendo D_i un opportuno divisore su X_i, $i=1,2$ (cfr. [E], pag. 97).

Dalle proprietà precedenti si ricava il

COROLLARIO (2.6) (Castelnuovo-Severi). – *Sia Γ un qualunque divisore di $X_1\times X_2$; allora*

$$z_\Gamma = 2n_1n_2 - \int[\Gamma]^2 \geqslant 0$$

valendo l'uguaglianza se e solo se Γ è linearmente equivalente a un divisore del tipo $p_1^*(D_1) + p_2^*(D_2)$, con D_i opportuno divisore su X_i, $i=1,2$.

DIMOSTRAZIONE. – È facile rendersi conto che è sempre possibile trovare divisori E_i su X_i, $i = 1, 2$, tali che il divisore $\Gamma' = \Gamma + p_1^*(E_1) + p_2^*(E_2)$ sia molto ampio. Esisterà dunque un divisore Γ_1 linearmente equivalente a Γ', verificante le ipotesi del teorema (2.2). L'asserto segue allora da (i), (ii) e (iii).

3. – Serie di divisori di dimensione uno su una superficie algebrica.

Sia Y una superficie algebrica liscia, irriducibile, completa, su un campo algebricamente chiuso k di caratteristica zero. Una *serie algebrica di divisori* su Y, parametrizzata da un k-schema X, è un divisore effettivo $\Gamma \subset Y \times X$ piatto su X. Per la proprietà universale che definisce lo schema Div_Y dei divisori effettivi di Y, la serie Γ induce un morfismo

$$\beta\colon X \to \mathrm{Div}_Y .$$

Noi supponemo nel seguito che β sia un morfismo birazionale sulla sua immagine, ossia che Γ sia *effettivamente parametrizzato* da X. A questo caso ci si può sempre ridurre con eventuali cambiamenti di base.

Con notazioni analoghe a quelle dei precedenti paragrafi, denoteremo con p_1, p_2 le proiezioni di $Y \times X$ su Y e X rispettivamente, e porremo $\pi_i = p_i|_\Gamma$, $i = 1, 2$. Nel seguito ci limiteremo a trattare il caso in cui X sia una curva liscia, irriducibile e completa di genere p. Si noti che l'ipotesi di birazionalità su β comporta che π_1 sia dominante, e quindi suriettiva. Diremo allora che Γ è una serie di dimensione uno.

Mediante l'identificazione di $Y \times \{x\}$ con Y, per ogni $x \in X$, la fibra geometrica $\pi_2^{-1}(x)$ si identificherà con un divisore C_x della superficie Y. Per indicare la serie Γ scriveremo anche $\Gamma = \{C_x\}_{x \in X}$. Se Γ, come sottoschema di $Y \times X$ è irriducibile (ridotto, non singolare, ecc.) diremo che la serie Γ è *irriducibile* (*ridotta, non singolare,* ecc.). Alla serie Γ sono sempre associati i seguenti caratteri numerici

$$n = \int [C_x]^2 , \qquad g = p_a(C_x)$$

dove p_a denota il genere aritmetico. Stante la piattezza di π_2, questi caratteri, detti rispettivamente *grado* e *genere* della serie, non dipendono dal punto $x \in X$.

Un punto $y \in Y$ si dice un *punto base* per la serie Γ se ogni divisore C_x contiene il punto y. L'insieme U_Γ di Y dei punti che non sono punti base per Γ è un aperto di Zariski non vuoto di Y e il morfismo $\pi_1\colon \Gamma \to Y$ risulta, su U_Γ, un morfismo finito. Il grado ν di questo morfismo prende il nome di *indice* della serie Γ: esso eguaglia il numero dei divisori di Γ passanti per il punto generico di Y.

Una curva C, cioè un divisore effettivo di Y, si dice *fissa* per Γ se ogni curva di Γ contiene C. Se ciò accade e C_0 è il supporto di C, allora $\pi_2^{-1}(C_0)$ è una componente irriducibile di Γ, e dunque Γ è riducibile. Noi supporremo nel seguito Γ *ridotta, irriducibile* e *liscia.* Ciò in particolare comporta che Γ sia privo di curve fisse e quindi che $\dim(Y - U_\Gamma) = 0$. Inoltre, applicando il criterio di liscità generica al morfismo $\pi_2\colon \Gamma \to X$ (cfr. [H], pag. 272) si ha che la sua fibra generica $\pi_2^{-1}(x)$ è non singolare. Se tale fibra non è connessa, cioè se C_x non è irriducibile per x generico in X, esiste allora un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} & \Gamma \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\pi_2"] \\ X' \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

dove X' è una curva liscia, irriducibile, completa, g è un morfismo finito ed f è a fibre connesse, e quindi genericamente liscie (cfr. [H], pag. 280): il grado μ del morfismo g uguaglia il numero di componenti connesse della fibra generica di π_2, e dunque delle componenti irriducibili della curva generica di Γ. Posto $\Gamma' = X' \times_X \Gamma$, si vede facilmente che Γ' individua una serie di dimensione uno di divisori su Y parametrizzata da X' il cui elemento generico è irriducibile non singolare; inoltre per ogni $x \in X$, C_x è somma delle curve di Γ' corrispondenti ai μ punti di $g^*(x)$ su X'. Si dice allora che *la serie Γ è composta con la serie Γ'*. Noi supporremo ancora nel seguito *Γ non composta* con altre serie e dunque non solo priva di curve fisse, ma anche a curva generica irriducibile, non singolare.

Per una serie liscia, ridotta, irriducibile e non composta si può introdurre, accanto ai precedenti, un ulteriore carattere numerico che dà, tenendo opportunamente conto delle molteplicità, il numero dei punti doppi che compaiono nelle curve della serie Γ. Per ogni $x \in X$ sia

$$C_x = \sum_i h_i C_x^{(i)}$$

$C_x^{(i)}$ essendo le componenti irriducibili del divisore C_x. Poniamo

$$e_x = \sum_i \left(2 - 2p_g(C_x^{(i)})\right) - \sum_{y \in C_x} \left(\left(\sum_i \beta_y(C_x^{(i)})\right) - 1\right)$$

dove $p_g(C_x^{(i)})$ è il genere geometrico di $C_x^{(i)}$, cioè il genere aritmetico della sua normalizzazione e $\beta_y(C_x^{(i)})$ è il numero dei rami di $C_x^{(i)}$ in y. Si noti che se C_x è irriducibile e non singolare, allora

$$e_x = 2 - 2p_g(C_x) = 2 - 2g\,.$$

Nelle nostre ipotesi su Γ ha quindi senso porre

$$\delta = \sum_{x \in X} (e_x + 2g - 2)\,.$$

Notiamo che se C_{x_0} è una curva, eventualmente riducibile, ma dotata di soli nodi, allora $e_{x_0} + 2g - 2$ è esattamente il numero dei nodi di C_{x_0}. Se dunque le curve singolari di Γ sono dotate di soli nodi, δ è proprio il numero totale dei nodi delle curve della serie Γ. Chiameremo in ogni caso δ *numero dei nodi* della serie Γ.

Così come nel caso delle serie di divisori su una curva, vogliamo ottenere per il numero δ una limitazione superiore, estendendo in tal modo il teorema di Castelnuovo-Torelli (Corollario (1.6)). Consideriamo, a questo scopo, il carattere z definito dalla relazione

$$\delta = \nu(n + 4g - 4 + c_2(Y)) - z$$

dove $c_2(Y)$ è il grado della seconda classe di Chern del fibrato tangente di Y. Chiameremo z il *numero di Torelli di* Γ o il *difetto di equivalenza di* Γ. Il nostro scopo sarà quello di dimostrare che, a parte alcune eccezioni ben classificate, è $z \geqslant 0$ e $z = 0$ se e solo se le curve di Γ sono fra loro linearmente equivalenti.

Consideriamo ora alcuni esempi il cui esame ci tornerà utile nel seguito.

ESEMPIO (3.1). - Sia $f\colon Y \to X$ un morfismo tra la superficie Y e la curva X. Il grafico Γ di f è liscio e irriducibile e determina la serie $\Gamma = \{f^*(x)\}_{x\in X}$. Noi supporremo Γ non composta, ossia f a fibre connesse, e con fibra generica non singolare. La serie Γ prende allora il nome di *fascio* su Y parametrizzato da X. In questo caso il numero δ è fornito da una formula classica di Zeuthen-Segre, estesa modernamente da IVERSEN (cfr. [I_2], pag. 223). Precisamente è

$$\delta = c_2(Y) - 4(1-g)(1-p)\,. \tag{3.2}$$

Poichè in questo caso è $n = 0$, $\nu = 1$ si ha

$$z = 4p(g-1)\,.$$

Si ottiene allora $z = 0$ se $p = 0$, caso in cui le curve del fascio sono tra loro linearmente equivalenti, oppure se $p > 0$ e $g = 1$, caso che senz'altro fa eccezione al risultato che abbiamo di mira. Un'altra eccezione si presenta se $g = 0$ e $p > 0$, avendosi allora $z < 0$. Osserviamo esplicitamente che, viceversa, ogni serie non composta Γ di grado zero su Y è un fascio. Infatti in tal caso è $\nu = 1$ e $\pi_1\colon \Gamma \to Y$ è un isomorfismo. Il fascio è determinato dal morfismo $\pi_2 \circ \pi_1^{-1}\colon Y \to X$. Analogamente si ha un fascio se $\nu = 1$ e Γ è non composta, priva di punti base. È ben noto invece che se $\nu = 1$ e Γ è dotato di punti base, allora Γ è un fascio lineare (cfr. [Z], pag. 25).

ESEMPIO (3.3). - Sia $Y = X(2)$, e, per ogni $x \in X$, sia $C_x = \mathfrak{D}_x$ (cfr. § 1). La serie Γ data da $\{C_x\}_{x\in X}$ è ancora liscia e irriducibile, essendo $\Gamma = \mathfrak{D} \subset X(2)\times X$, dove $\mathfrak{D}$ è il divisore universale. Inoltre Γ è ovviamente non composta. I caratteri della serie Γ sono: $n = 1$, $\nu = 2$, $\delta = 0$, $p = g$. Inoltre si ha $c_2(X(2)) = \binom{2p-2}{2}$ (cfr. [MD], pag. 322). Si ottiene allora

$$z = 2p(2p-1)$$

e quindi è sempre $z \geqslant 0$, essendo $z = 0$ se e solo se $p = 0$, caso in cui le curve di Γ sono fra loro linearmente equivalenti.

ESEMPIO (3.4). – Sia $Y = \boldsymbol{P}^2$, $X \subset \boldsymbol{P}^2$ una curva liscia di grado $m > 1$. Per ogni punto $x \in X$, sia C_x la retta tangente a X in x. $\Gamma = \{C_x\}_{x \in X}$ è una serie unidimensionale, e si verifica agevolmente che è liscia, irriducibile, non composta. In questo caso $\nu = m(m-1)$ è la classe di X, $n = 1$, $g = 0$, $\delta = 0$ e $c_2(\boldsymbol{P}^2) = 3$. Si ottiene quindi $z = 0$ e le rette sono ovviamente contenute in uno stesso sistema lineare. Osserviamo esplicitamente che ogni serie algebrica di dimensione uno di rette nel piano è sempre descrivibile come la chiusura di Zariski in $\boldsymbol{P}^2$ dell'insieme delle rette tangenti ad una curva X nei suoi punti semplici. Una serie siffatta però è liscia se e solo se lo è X, e ciò si verifica con facili calcoli.

4. – Serie di divisori di grado uno su una superficie algebrica.

In questo paragrafo studieremo le serie di grado uno e dimostreremo che esse si riducono essenzialmente agli esempi (3.3) e (3.4). Nel far ciò dimostreremo alcuni lemmi che ci saranno utili anche più tardi. Cominciamo col vedere come nello studio del numero di Torelli ci si possa ridurre al caso delle serie prive di punti base. A tale scopo, e supponendo, come di consueto, Γ irriducibile, ridotta, liscia, non composta, mettiamo in evidenza, col seguente lemma, una semplice, ma notevole conseguenza dell'ipotesi di regolarità su Γ.

LEMMA (4.1). – *Sia Γ una serie unidimensionale, non singolare, di indice ν sulla superficie Y. Allora:*

(*a*) *se $y_0 \in Y$ è un punto base di Γ, ogni curva di Γ è non singolare in y_0;*

(*b*) *se $y_0 \in Y$ è un punto singolare di qualche curva C_{x_0} di Γ, π_1 non è ramificato in (y_0, x_0).*

DIMOSTRAZIONE. – Sia y_0 un punto singolare per C_{x_0} e siano (u, v) parametri locali su Y intorno a y_0 e t un parametro locale su X intorno a x_0. Localmente allora Γ ha equazione del tipo $f(u, v, t) = 0$ e inoltre, essendo Γ non singolare il sistema $f = \partial f/\partial u = \partial f/\partial v = \partial f/\partial t = 0$ non ha soluzioni. Se (u_0, v_0) e t_0 sono i valori dei parametri corrispondenti a y_0 e x_0 rispettivamente, si ha che $f(u, v, t_0) = 0$ è localmente l'equazione di C_{x_0} e quindi $\partial f/\partial u = \partial f/\partial v = f = 0$ ha la soluzione (u_0, v_0, t_0). Ciò implica che $(\partial f/\partial t)(u_0, v_0, t_0) \neq 0$, e da ciò facilmente segue la (*a*). Quanto alla (*b*), si noti che le ν curve per y_0 corrispondono alle soluzioni in t dell'equazione $f(u_0, v_0, t) = 0$, che, per quanto precede, ha t_0 come radice semplice.

Sia ora $y \in Y$, sia ψ: $\tilde{Y} \to Y$ lo scoppiamento di Y in y e sia E il divisore eccezionale su $\tilde{Y}$. Si ha allora il morfismo ψ_1: $\tilde{Y} \times X \to Y \times X$ che è lo scoppiamento di $Y \times X$ lungo la sottovarietà $\{y\} \times X$. Se $\Gamma \subset Y \times X$ è una serie di divisori su Y, il trasformato proprio $\tilde{\Gamma}$ di Γ su $\tilde{Y} \times X$ definirà una serie di divisori su $\tilde{Y}$ che diremo la *serie trasformata* di Γ su $\tilde{Y}$ mediante ψ. È chiaro che $\tilde{\Gamma}$ è irriducibile, ridotta non composta se tale è Γ. Inoltre si verifica agevolmente che $\tilde{\Gamma}$ è liscia se tale è Γ e y è un punto base ovvero se $\{y\} \times X$ è trasversale a Γ, ossia se per y passano ν curve distinte di Γ. Inoltre per $x \in X$ generico, la curva $\tilde{C}_x$ di $\tilde{\Gamma}$ è la trasformata propria mediante ψ di C_x. Denoteremo con gli stessi simboli adoperati per Γ, ma con un soprascritto $\sim$, i caratteri relativi a $\tilde{\Gamma}$.

LEMMA (4.2). – *Sia Γ una serie irriducibile ridotta, liscia, non composta. Con le notazioni precedenti, se y è punto base di Γ, ovvero se per y passano ν curve distinte di Γ, allora è $z = \tilde{z}$.*

DIMOSTRAZIONE. – È ovvio che

$$g = \tilde{g}\,, \qquad \nu = \tilde{\nu}\,, \qquad c_2(\tilde{Y}) = c_2(Y) + 1\,.$$

Inoltre, se y non è punto base per Γ, si ha $\tilde{\Gamma} = \{\psi^*(C_x)\}_{x \in X}$. Quindi, se per y passano ν curve distinte di Γ si ha ovviamente

$$n = \tilde{n}\,, \qquad \tilde{\delta} = \delta + \nu$$

da cui $z = \tilde{z}$. Se invece y è un punto base, allora $\tilde{\Gamma} = \{\tilde{C}_x\}_{x \in X}$, essendo $\tilde{C}_x$ la trasformata propria di C_x. Pertanto, per la (a) del lemma (4.1) si ha

$$\tilde{n} = n - 1\,, \qquad \tilde{\delta} = \delta$$

da cui ancora $z = \tilde{z}$.

I precedenti lemmi assicurano che, nelle nostre ipotesi su Γ, ci possiamo ridurre, ai fini del calcolo del numero di Torelli, al caso in cui Γ sia privo di punti base. Se ciò si verifica, allora il morfismo π_1: $\Gamma \to Y$ risulta finito di grado ν e dunque piatto. Quindi la serie $\Gamma \subset Y \times X$ può anche essere riguardata come una serie di divisori sulla curva X, parametrizzata dalla superficie Y. Si ha allora (cfr. § 1) un morfismo naturale

$$\alpha\colon\ Y \to X(\nu)$$

tale che

$$(\alpha \times i_X)^*(\mathfrak{D}) = \Gamma$$

essendo, come al solito, $\mathfrak{D} \subset X(\nu) \times X$ il divisore universale e $\alpha \times i_X$ il morfismo, dedotto da α, di $Y \times X$ in $X(\nu) \times X$. Per cambiamento di base si ha

$$\alpha^*(\mathfrak{D}_x) = C_x \tag{4.3}$$

per ogni $x \in X$. Notiamo ancora che, nell'ipotesi che Γ sia irriducibile e non singolare e sia $\nu > 1$, si ha

$$\dim \alpha(Y) = 2 .$$

Si ha infatti $\alpha^{-1}(x_1 + \ldots + x_\nu) = C_{x_1} \cap \ldots \cap C_{x_\nu}$, sicchè, posto $Z = \alpha(Y)$, il morfismo

$$\alpha \colon Y \to Z$$

è genericamente finito. Denoteremo con m il grado di α. Se $m > 1$ diremo che la serie Γ è *composta con un'involuzione di grado m su Y*. In questo caso, se y è un punto generico di Y e $\alpha^{-1}(\alpha(y)) = \{y, y_1, \ldots, y_{m-1}\}$, le ν curve di Γ passanti per y passano anche per $y_1, \ldots, y_{m-1}$. È allora chiaro che n è divisibile per m; tenendo poi presente la (4.3) e la definizione, si ha che n/m è l'indice di Γ pensata come serie di divisori su X.

Passiamo ora a studiare le serie Γ irriducibili, ridotte, non singolari di grado $n = 1$ su una superficie Y. Se è $\nu = 1$ è chiaro che Γ ha un punto base e quindi è un fascio razionale (cfr. esempio (3.1)). Supporremo pertanto $\nu > 1$. In tal caso ovviamente Γ non ha punti base su Y ed, essendo $n = 1$, non è composto nè con altre serie nè con involuzioni. In particolare il morfismo $\alpha \colon Y \to X(\nu)$ è birazionale sulla sua immagine Z.

TEOREMA (4.4). - *Sia data sulla superficie Y una serie $\Gamma = \{C_x\}_{x \in X}$ irriducibile, ridotta, non singolare di grado uno e indice due. Allora Y è ottenuta da $X(2)$ mediante lo scoppiamento di punti non appartenenti alla diagonale $\Delta_X(1^2) \subset X(2)$, Γ è la trasformata propria della serie $\{\mathfrak{D}_x\}_{x \in X}$ e $z = 2p(2p-1)$, p essendo il genere di X.*

DIMOSTRAZIONE. - Dalle osservazioni precedenti segue che $\alpha \colon Y \to X(2)$ è un morfismo birazionale. Dunque Y è ottenuto da $X(2)$ scoppiando un certo numero di punti. Tenendo presente la (4.3) si ha che Γ è la serie trasformata di $\{\mathfrak{D}_x\}_{x \in X}$. Sia ora $y = x_1 + x_2$ un punto di $X(2)$ che è stato scoppiato e siano $\mathfrak{D}_{x_1}$, $\mathfrak{D}_{x_2}$ le curve per y in $X(2)$. Sarà allora $C_{x_1} = E + \widetilde{\mathfrak{D}}_{x_1}$, $C_{x_2} = E + \widetilde{\mathfrak{D}}_{x_2}$, dove $\sim$ denota la trasformata propria ed E il divisore eccezionale. Queste curve saranno singolari in $E \cap \widetilde{\mathfrak{D}}_{x_i}$, $i = 1, 2$. Quindi, essendo Γ non singolare, per il lemma (4.1), (*b*), deve essere $x_1 \neq x_2$. Quanto al calcolo del numero di Torelli, esso segue da quanto visto nell'esempio (3.3), ove si tenga conto del lemma (4.2).

Relativamente al caso $\nu > 2$ si ha invece il seguente

TEOREMA (4.5). – *Sia data sulla superficie Y una serie $\Gamma = \{C_x\}_{x\in X}$ irriducibile, ridotta, non singolare, di grado uno e indice $\nu > 2$. Y è allora ottenuta scoppiando un certo numero di punti di $\boldsymbol{P}^2$, Γ è la trasformata di una serie di rette del piano e $z = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. – Γ, considerata come serie di divisori su X è un'involuzione. Se x è un punto generico di X, il divisore $\pi_1^*(C_x)$ contiene $\pi_2^{-1}(x)$ e una parte residua che denotiamo con $\Gamma_x \subset C_x \times X$. Essendo Γ un'involuzione ne segue che il morfismo

$$\pi_2|_{\Gamma_x}\colon \Gamma_x \to X$$

è birazionale, e dunque è un isomorfismo. Pertanto Γ_x si interpreta come un'involuzione di grado $\nu - 1$ su X, e resta dunque definito un morfismo birazionale

$$\alpha_x\colon C_x \to X(\nu - 1)$$

di cui denoteremo con Z_x l'immagine. Ovviamente Z_x è l'intersezione di Z con $\mathfrak{D}_x \simeq X(\nu - 1)$. Se $x' \neq x$ è ancora un punto generico, si ha $Z_x \neq Z_{x'}$. Infatti sia $y \in Y$ l'unico punto a comune di C_x e $C_{x'}$. Allora si ha $\alpha(y) = x + x' + D$ con $D \in X(\nu - 2)$ e con $x' + D \in Z_x$, $x + D \in Z_{x'}$. Se fosse $Z_x = Z_{x'}$, i divisori $x + D$, $x' + D$ della stessa involuzione su X, avendo il divisore D in comune, coinciderebbero, e dovrebbe quindi essere $x = x'$, il che è assurdo. Dunque $\{\Gamma_x\}_{x\in X}$ è una famiglia non costante di involuzioni su X. Applicando il teorema di Painlevé-Castelnuovo-Humbert (cfr. [MA], pag. 796) si ha allora che, per ogni $x \in X$, la curva C_x che parametrizza l'involuzione Γ_x deve essere razionale, ossia è $g = 0$. È facile constatare che ciò comporta che la mappa di Abel-Jacobi

$$\varphi\colon X(\nu) \to J(X)$$

è costante su $Z = \alpha(Y)$. Pertanto, per il teorema di Abel, Z è contenuta nello spazio proiettivo $\boldsymbol{P} = \varphi^{-1}(\varphi(Z))$. Per ogni $x \in X$ si ha

$$C_x = \alpha^*(\mathfrak{D}_x) = \alpha^*(\mathfrak{D}_x \cdot \boldsymbol{P}) .$$

Poichè $\mathfrak{D}_x \cdot \boldsymbol{P}$ è un'iperpiano di $\boldsymbol{P}$, ne segue che i divisori di Γ sono tra loro equivalenti, appartenendo al sistema lineare $|\alpha^*(\mathcal{O}_{\boldsymbol{P}}(1))|$. Si noti infine che, essendo $n = 1$, è $h^0(Y, \mathcal{O}_Y(C_x)) \leqslant 3$. Ciò ovviamente implica che Z sia un piano in $\boldsymbol{P}$, il che, tenendo ancora presente l'esempio (3.4), completa la dimostrazione del teorema.

Concludiamo osservando esplicitamente che, nelle ipotesi dei teoremi (4.4) e (4.5), la non singolarità di Γ non è indispensabile. Se si consente a Γ di essere singolare può allora accadere che Y sia ottenuto scoppiando $X(2)$ anche in punti della diagonale, oppure che Γ sia ottenuto da una serie di rette di $\boldsymbol{P}^2$ tangenti ad una curva singolare. È ancora opportuno notare come i teoremi (4.4) e (4.5) si applichino, anche se con enunciato leggermente diverso, ancora al caso in cui sia $n > 1$, ma Γ sia dotato di punti base tali che la somma delle molteplicità di intersezione di due curve generiche di Γ nei punti base vale $n - 1$. In tali circostanze Y non sarà più ottenuto da $X(2)$ o da $\boldsymbol{P}^2$, rispettivamente se $\nu = 2$ e se $\nu > 2$, scoppiando dei punti, ma Y sarà birazionale a $X(2)$, se $\nu = 2$, e a $\boldsymbol{P}^2$, se $\nu > 2$.

5. – Il teorema di Torelli.

Consideriamo, su una superficie Y, una serie di divisori Γ di dimensione uno, irriducibile, ridotta, liscia, non composta, parametrizzata dalla curva X. Essendo poi interessati allo studio del numero di Torelli di Γ, potremo suppore Γ priva di punti base (cfr. § 4). In tal caso $\pi_1 \colon \Gamma \to Y$ è un morfismo finito di cui denoteremo con R il divisore di ramificazione su Γ e con B il divisore di diramazione su Y. Quest'ultimo, che prende il nome di *inviluppo* di Γ, può pensarsi come il luogo dei punti di Y per cui passano meno di ν curve di Γ, ν essendo, come di consueto, l'indice della serie, che supporremo maggiore di uno.

Nelle nostre ipotesi Γ può anche riguardarsi come una serie di dimensione due di divisori di grado ν sulla curva X, parametrizzata dalla superficie Y. Si ha allora un morfismo

$$\alpha \colon Y \to X(\nu)$$

che è genericamente finito su $Z = \alpha(Y)$, di grado m. L'indice di Γ, come serie di divisori su X è $z_0 = n/m$ (cfr. § 4). Denoteremo poi con z_1, z_2 i suoi difetti di equivalenza. Per alleggerire le notazioni, porremo nel seguito $\Delta = \Delta_X(1^2, (\nu - 2)^1)$, $\Delta' = \Delta_X(2^2, (\nu - 4)^1)$, $\Delta'' = \Delta_X(1^3, (\nu - 3)^1)$.

LEMMA (5.1). – *Con le ipotesi e notazioni di cui sopra si ha* $B = \alpha^*(\Delta)$.

DIMOSTRAZIONE. – Consideriamo il diagramma cartesiano

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathfrak{D} \arrow[d, "q_1"] \\ Y \arrow[r, "\alpha"'] & X(\nu) \end{tikzcd}$$

dove $\mathfrak{D}$ è il divisore universale. Essendo Δ il divisore di diramazione di q_1 su $X(\nu)$, per cambiamento di base si ha l'asserto.

Noi supporremo nel seguito sempre verificata la seguente *ipotesi di genericità* per Γ:

(G) B è ridotto e ha come singolarità al più nodi e cuspidi ordinarie.

Il lemma che ora dimostreremo chiarisce il significato dell'ipotesi (G) in relazione al morfismo α.

Lemma (5.2). – *Con le suddette ipotesi e notazioni, se Γ verifica la condizione* (G) *si ha:*

(*a*) *i nodi e le cuspidi di B sono dati rispettivamente dai punti $\alpha^{-1}(\Delta')$ e $\alpha^{-1}(\Delta'')$;*

(*b*) *Z è trasversale alle diagonali di $X(\nu)$;*

(*c*) *il morfismo α non è diramato nei punti di $Z \cap (\Delta' \cup \Delta'')$.*

Dimostrazione. – Per i risultati di $[I_1]$, n. 5, si ha:

1) per ogni punto semplice $y \in B$, $\pi_1^{-1}(y)$ è costituito di $\nu - 1$ punti distinti, esistendo un solo punto semplice di R su Γ la cui immagine è y;

2) per ogni nodo $y \in B$, $\pi_1^{-1}(y)$ è costituito di $\nu - 2$ punti distinti, ed esistono esattamente due punti semplici di R su Γ la cui immagine è y;

3) per ogni cuspide $y \in B$, $\pi_1^{-1}(y)$ è costituito di $\nu - 2$ punti distinti, ed esiste un solo punto semplice di R su Γ la cui immagine è y; in tale punto si annulla il differenziale di π_1.

Di qui segue facilmente la (*a*). Consideriamo ora il morfismo finito

$$j\colon (x, D) \in X \times X(\nu - 2) \to 2x + D \in \Delta \subset X(\nu)$$

che è birazionale ed è un'isomorfismo nell'aperto di Zariski $\Delta - (\Delta' \cup \Delta'')$ di Δ. Essendo $X \times X(\nu - 2)$ liscio, j è la normalizzazione di Δ. Scelto un punto $a = (x, x_1 + \ldots + x_{\nu-2}) \in X \times X(\nu - 2)$ e parametri locali $t, t_1, \ldots, t_{\nu-2}$ su X in opportuni intorni dei punti $x, x_1, \ldots, x_{\nu-2}$, dei parametri locali su $X \times X(\nu - 2)$ intorno ad a sono dati da $(t, \tau_1, \ldots, \tau_{\nu-2})$, dove

$$\tau_1 = \sum_{h=2}^{\nu-2} t_h\,, \qquad \tau_2 = \sum_{\substack{h,k=1\\ h<k}}^{\nu-2} t_h t_k, \ldots, \tau_{\nu-2} = t_1 \ldots t_{\nu-2}$$

sono i polinomi simmetrici elementari in $t_1, \ldots, t_{\nu-2}$ (cfr. [GRH], pag. 236). Similmente dei parametri locali su $X(\nu)$ intorno a $j(a) = 2x + x_1 + \ldots + x_{\nu-2}$ sono i ν polinomi simmetrici elementari in $t', t'', t_1, \ldots, t_{\nu-2}$, dove t', t'' sono valori del parametro t intorno ad x. Si verifica agevolmente che la j, in tale sistema di parametri, ha espressione

$$j(t, \tau_1, \ldots, \tau_{\nu-2}) = (\tau_{i-2} t^2 + 2t\tau_{i-1} + \tau_i)_{i=1,\ldots,\nu}$$

ove si è posto $\tau_0 = 1$, $\tau_{-1} = \tau_{\nu-1} = \tau_\nu = 0$. La matrice jacobiana di j, di tipo $\nu \times$ $\times (\nu - 1)$, è allora, a meno di un fattore costante 2, data da

$$J = \left\| \begin{array}{lllllllll} \tau_{-1}t + \tau_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & & & \\ \tau_0 t + \tau_1 & 2t & 1 & 0 & 0 & \cdots\cdots & & & \\ \tau_1 t + \tau_2 & t^2 & 2t & 1 & 0 & \cdots\cdots & & & \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & & & \\ \tau_{\nu-4}t + \tau_{\nu-3} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & t^2 & 2t & 1 \\ \tau_{\nu-3}t + \tau_{\nu-2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & t^2 & 2t \\ \tau_{\nu-2}t + \tau_{\nu-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & t^2 \end{array} \right\|$$

Con semplici calcoli, che qui per brevità non riportiamo, si verifica che il minore J_i di J individuando dalle righe di posto diverso dalla i-sima, è dato da

$$J_i = (-1)^{i+1} t^{\nu-i} \sum_{j=0}^{\nu-2} (-1)^j \tau_j t^{\nu-2-j} = (-1)^{i+1} t^{\nu-i} \prod_{j=1}^{\nu-2} (t - t_j)\,, \qquad i = 1, \ldots, \nu\,.$$

Vi è inoltre un minore di J d'ordine $\nu - 2$, quello individuato dalle ultime $\nu - 2$ colonne e dalle prime $\nu - 2$ righe, che vale 1. Di qui si deduce che il differenziale di j non ha rango massimo, ma rango $\nu - 2$, solo nei punti di $j^{-1}(\Delta'')$, che coincide con il divisore universale $\mathfrak{D}$ in $X \times X(\nu - 2)$. Sia ora Δ''' l'unione delle diagonali di $X(\nu)$ di codimensione almeno tre in $X(\nu)$. Se $D' = 2x_1 + 2x_2 + D \in \Delta' - \Delta'''$, si ha $x_1 \neq x_2$, $x_1 \notin D$, $x_2 \notin D$, $D \notin \Delta_X(1^2, (\nu - 6)^1)$. Allora $j^{-1}(D')$ contiene i punti $(x_1, 2x_2 + D)$, $(x_2, 2x_1 + D)$ e solo essi, e in ciascuno di tali punti il differenziale di j ha rango massimo. Se $D' = 3x + D \in \Delta'' - \Delta'''$, si ha $x \notin D$, $D \notin \Delta_X(1^2, (\nu - 5)^1)$. Allora $j^{-1}(D')$ contiene solo il punto $(x, x + D)$, e in esso il differenziale di j si annulla. Non è difficile dimostrare, ma ci asteniamo, per brevità, dal riportare qui le esplicite verifiche basate su ulteriori manipolazioni dell'espressione locale della applicazione j, che D' è punto cuspidale ordinario per Δ: con ciò intendiamo dire che esistono parametri locali $(\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu)$ su $X(\nu)$ intorno a D' tali che a D' corrisponda il valore $(0, \ldots, 0)$, Δ'' abbia in tale sistema di parametri equazione $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, e Δ abbia equazione $\sigma_1^2 = \sigma_2^3$. Similmente si verifica che i punti di Δ''' sono più che doppi per Δ. Riassumendo si ha che:

1) $\Delta' \cup \Delta''$ è il luogo singolare di Δ;

2) $\Delta' - \Delta'''$ è il luogo nodale, $\Delta'' - \Delta'''$ è il luogo cuspidale di Δ;

3) nei punti di Δ''' si hanno singolarità peggiori di nodi e cuspidi ordinarie.

Da questa descrizione delle singolarità di Δ, e dalla (a), segue la (b). Sia infine $D' \in Z \cap \Delta'$ e sia $y \in \alpha^{-1}(D')$. Siano ancora u, v parametri locali su Y intorno a y e

$(\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu)$ parametri locali su $X(\nu)$ intorno a D' tali che, in tali parametri, Δ abbia equazione $\sigma_1\sigma_2 = 0$. Se α ha, in tali sistemi di parametri, espressione

$$\sigma_i = \sigma_i(u, v)\,, \qquad i = 1, \ldots, \nu$$

dall'ipotesi che $\sigma_1(u, v)\sigma_2(u, v) = 0$ deve avere un nodo in y ne segue che $\sigma_1(u, v)$, $\sigma_2(u, v)$ sono un sistema di parametri locali su Y intorno a y. Ciò implica che α non è ramificato in y. Un argomento analogo vale se $D' \in Z \cap \Delta''$.

Siamo ora finalmente in grado di dimostrare il

TEOREMA (5.3) (Torelli). – *Sia Γ una serie irriducibile, ridotta, liscia, non composta, di dimensione uno, di divisori sulla superficie Y, parametrizzata dalla curva X di genere p, e ne sia n il grado, $\nu > 1$ l'indice, g il genere. Supponiamo ancora che Γ sia priva di punti base e verifichi l'ipotesi* (G). *Si ha allora*

$$z = \nu\big(n + 4g - 4 + c_2(Y)\big) - \delta \geqslant 0$$

valendo l'uguaglianza se e solo se la serie Γ è costituita di divisori fra loro linearmente equivalenti.

DIMOSTRAZIONE. – Consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd} & \Gamma \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ Y & & X \end{tikzcd}$$

L'idea della dimostrazione è di calcolare $c_2(\Gamma)$ utilizzando dapprima il morfismo π_2, poi quello π_1, per poi paragonare i risultati. Dalla formula di Zeuthen-Segre (3.2), ricaviamo

$$c_2(\Gamma) = 4(1 - g)(1 - p) + \delta\,. \tag{5.4}$$

Utilizzando ora il morfismo π_1, possiamo applicare la formula di corrispondenza di Severi, quale trovasi in [I$_1$], pag. 977. A tale proposito si noti che $B = \sum_i B_i$ dove i divisori B_i sono irriducibili, ridotti e distinti. Si ha allora, per la citata formula

$$c_2(\Gamma) = \nu c_2(Y) + \sum_i \big(2p_g(B_i) - 2\big) - \tau \tag{5.5}$$

dove τ è il numero delle cuspidi di B e, come di consueto, $p_g(B_i)$ è il genere geometrico di B_i. Sia ϱ il numero dei nodi di B e scriviamo $\varrho = \varrho' + \varrho''$ dove ϱ' è il numero degli incroci tra le componenti distinte di B e ϱ'' è il numero dei nodi delle componenti B_i. Si ha allora

$$\sum_i \big(2p_g(B_i) - 2\big) - \tau = \sum_i \big(2p_a(B_i) - 2\big) - 2\varrho'' - 3\tau = 2p_a(B) - 2 - 2\varrho - 3\tau$$

da cui, per la (5.5), si ha

$$c_2(\Gamma) = \nu c_2(Y) + 2p_a(B) - 2 - 2\varrho - 3\tau \tag{5.6}$$

Al fine di calcolare ϱ e τ applichiamo le formule (1.5), (1.7) alla serie $\Gamma(\nu, 2, n/m, z_1, z_2)$ su X, e teniamo conto del lemma (5.2). Si ha

$$\begin{aligned}\varrho = md_\Gamma\big(2^2, (\nu-4)^1\big) &= 2n[(\nu-2)(\nu-3) + 2p(\nu-3) + p(p-1)] - \\ &\qquad - 4mz_1(\nu + p - 4) + 4mz_2 \\ \tau = md_\Gamma\big(1^3, (\nu-3)^1\big) &= 3n(\nu + 2p - 2) - 6mz_1 .\end{aligned} \tag{5.7}$$

Resta ora da calcolare il genere aritmetico della curva B. Con le notazioni del § 1 e utilizzando la formula già citata di [MD] (cfr. th. (15.2)), si ha

$$\big[\Delta\big(1^2, (\nu-2)^1\big)\big] = 2(\nu + p - 1)\xi - 2\theta .$$

Di qui, e dal lemma (5.1), segue che su X è

$$[B] = 2(\nu + p - 1)\alpha^*(\xi) - 2\alpha^*(\theta) = 2(\nu + p - 1)[C_x] - 2[H] \tag{5.8}$$

essendo $H = \alpha^*\big(\varphi^*(\Theta)\big)$ e $\varphi\colon X(\nu) \to J(X)$ la mappa di Abel-Jacobi. Poniamo $P = p_a(H)$ e osserviamo che

$$\int [H \cdot C_t] = mz_1 , \qquad \int [H]^2 = mz_2 . \tag{5.9}$$

Da (5.8) e (5.9) si trae allora, utilizzando la formula per il genere aritmetico

$$\begin{aligned}p_a(B) = 2(\nu + p - 1)p + n(\nu + p - 1)[2(\nu + p - 1) - 1] - 2(\nu + p - 1) - \\ - 2P + 3 + 3mz_2 - 4m(\nu + p - 1)z_1 .\end{aligned} \tag{5.10}$$

Sostituendo (5.7) e (5.10) nella (5.6) e confrontando con (5.4) si trova

$$\delta = \nu\big(n + 4g - 4 + c_2(Y)\big) - 4(P-1) - 6mz_1 - 2mz_2$$

ossia

$$z = 4(P-1) + 6mz_1 + 2mz_2 . \tag{5.11}$$

Dal teorema (1.1) risulta che z_1, z_2 sono interi non negativi. Quanto a P si noti che:

(*a*) se $\varphi(\alpha(Y))$ è un punto, ossia se i divisori di $\alpha(Y)$ sono tra loro linearmente equivalenti, allora H è algebricamente equivalente a zero su Y e dunque è $P=1$;

(*b*) se $\varphi(\alpha(Y))$ è una curva, H è algebricamente equivalente all'unione di $a\geqslant 1$ curve, fibre del morfismo $\varphi\circ\alpha\colon Y\to J(X)$; se H' è una di tali curve e se

$$\int [H']\cdot[C_x] = b \tag{5.12}$$

per la prima delle (5.9) si ha

$$mz_1 = a\int [H']\cdot[C_x] = ab\ .$$

Si osservi anche che è $b>0$, in quanto $a\cdot b\geqslant 0$ e $b=0$ implicherebbe che C_x è contenuta in una fibra di $\varphi\circ\alpha$, il che è assurdo, essendo

$$\int [C_x]^2 = n > 0\ .$$

Si ha allora

$$P = p_a(aH') = a(p_a(H')-1)+1 = \frac{mz_1}{b}(p_a(H')-1)+1\ . \tag{5.13}$$

Per il teorema di fattorizzazione di Stein (cfr. [H], pag. 280), si ha

$$H' \equiv cH'' \tag{5.14}$$

dove H'' è la generica curva irriducibile, non singolare, di un fascio su Y e $c\geqslant 1$. Si ha quindi

$$p_a(H')\geqslant -c+1$$

e dalla (5.13) si trae

$$P-1\geqslant -ca = -\frac{cmz_1}{b}\ . \tag{5.15}$$

Da (5.12) e (5.14) si ricava ancora

$$b\geqslant c$$

e allora da (5.15) segue che

$$P-1\geqslant -mz_1; \tag{5.16}$$

(c) se $\varphi(\alpha(Y))$ è una superficie è $P \geqslant 1$; infatti, applicando il teorema di trasversalità di Kleiman (cfr. [H], pag. 273) e tenendo conto del fatto che Θ è ampio su $J(X)$ si verifica che H è una curva irriducibile, non singolare che ovviamente non è razionale.

Nel caso (a) è chiaro che, oltre ad aversi $P = 1$, si ha pure $z_1 = z_2 = 0$ e quindi, per (5.11), $z = 0$. Nel caso (b) è invece $z_2 = 0$ e $z_1 > 0$ (cfr. corollario (1.2)); dunque da (5.11) e (5.16) ricaviamo

$$z \geqslant 6mz_1 - 4mz_1 = 2mz_1 > 0 \,.$$

Nel caso (c) è $P \geqslant 1$ e $z_1 > 0$, $z_2 > 0$, per il corollario (1.2). Si è così provato che è sempre $z \geqslant 0$, valendo l'uguaglianza se e solo se i divisori di $\alpha(Y)$ sono tra loro linearmente equivalenti su X. La dimostrazione del teorema sarà conclusa provando che ciò accade se e solo se le curve di Γ sono tra loro linearmente equivalenti su Y. Siano infatti le curve di Γ tutte linearmente equivalenti ad una fissata curva C e si consideri lo spazio proiettivo $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(H^0(Y, \mathcal{O}_Y(C)))$. Dalla piattezza di Γ su X si deduce un morfismo naturale non costante $\beta\colon X \to \boldsymbol{P}$ che dà luogo ad una serie lineare $|\beta^* \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}}(1)|$ su X. Se $y \in Y$, l'insieme $H_y = \{s \in H^0(Y, \mathcal{O}_Y(C)) : s(y) = 0\}$ è un sottospazio di codimensione uno in $H^0(Y, \mathcal{O}_Y(C))$, poichè $|C|$ è privo di punti base al pari di Γ. Dunque $\boldsymbol{P}(H_y)$ è un iperpiano di $\boldsymbol{P}$. Se y è un punto generico di Y, è ovvio che $\beta^*(\boldsymbol{P}(H_y)) = \alpha(y)$. Ciò prova che tutti i divisori di $\alpha(Y)$ appartengono a $|\beta^* \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}}(1)|$. Se viceversa i divisori di $\alpha(Y)$ sono tra loro linearmente equivalenti, si prova, ragionando come nella dimostrazione del teorema (4.5), che le curve di Γ sono tra loro linearmente equivalenti.

OSSERVAZIONE (5.17). – L'ipotesi che Γ sia priva di punti base può essere sostituita, nell'enunciato del teorema (5.3), da quella, più generale, che, eliminando i punti base tramite scoppiamenti (cfr. § 4) si ottenga da Γ una serie $\tilde{\Gamma}$ priva di punti base che verifichi la ipotesi (G). Ciò in forza del lemma (4.2). Non è invece possibile rimuovere l'ipotesi di non singolarità di Γ, come prova il seguente esempio. Sia $X \subset \boldsymbol{P}^2$ una curva liscia di grado $m > 1$ e si consideri la serie Γ delle rette tangenti a X su $Y = \boldsymbol{P}^2$ (cfr. esempio (3.4)). Sia x un punto generico di X e si scoppi Y in x ottenendo una superficie $\tilde{Y}$ su cui si può considerare la serie $\tilde{\Gamma}$ trasformata di Γ (cfr. § 4). Per tale serie il grado, l'indice e il genere restano quelli di Γ e dunque rispettivamente 1, $m(m-1)$, 0. Varia invece il numero dei nodi, che per Γ è 0 mentre per $\tilde{\Gamma}$ è $m(m-1)-1$: infatti le uniche curve singolari di $\tilde{\Gamma}$ sono le trasformate totali delle $m(m-1)-1$ rette di Γ passanti per x. Essendo $c_2(\tilde{Y}) = 4$ si ha che il numero di Torelli di $\tilde{\Gamma}$ vale $z = 1$, mentre ovviamente le curve di $\tilde{\Gamma}$ sono tra loro linearmente equivalenti. Quindi per $\tilde{\Gamma}$ non vale il teorema (5.3) e ciò è dovuto al fatto che $\tilde{\Gamma}$ non è liscia: infatti per $\tilde{\Gamma}$ non vale la (b) del lemma (4.1). È probabile che per le serie non liscie si possa ancora dimostrare che il numero di Torelli è sempre non negativo, senza che però l'uguaglianza a zero sia equivalente all'essere le curve delle serie contenute in un sistema lineare. Sarebbe però interessante vedere se per le serie non liscie si possa ridefinire il numero di Torelli, aggiungendovi termini che tengano conto delle singolarità della serie, in modo che valga ancora il teorema (5.3). Contrariamente all'ipotesi di regolarità su Γ, può darsi invece che l'ipotesi (G) non sia indispensabile per la validità del teorema (5.3): essa è dettata da motivi di carattere tecnico ed è probabile che la si possa rimuovere mediante una dettagliata analisi delle singolarità di $\Delta_X(1^2, (\nu-2)^1)$ lungo le diagonali di codimensione almeno 3 in $X(\nu)$. Rileviamo tuttavia esplicitamente che se è noto che una data serie Γ si può deformare ad una per cui valgono le ipotesi del teorema (5.3), allora per Γ vale l'asserto del teorema. Concludiamo indicando alcune direzioni in cui sarebbe interessante proseguire le ricerche intraprese in questo lavoro. Una estensione dei risultati qui contenuti potrebbe farsi provando l'analogo del teorema (5.3) per i sistemi unidimensionali di divisori su una varietà di dimensione maggiore di due. Sorge qui intanto il problema di dare un'opportuna definizione del numero di Torelli e ci chiediamo, a tale proposito, se, come nel caso delle superficie, in esso non compaia il genere della curva che parametrizza la serie. Dal punto di vista tecnico vi sono poi alcuni problemi legati alla definizione del numero dei nodi e alle formule di corrispondenza di Severi che, nel caso di dimensione maggiore di due, non sempre sono state stabilite nella massima generalità. Ulteriori estensioni potrebbero essere fatte studiando serie di dimensione due, o più, di divisori, su una superficie. Ad esempio ci chiediamo se sia possibile provare un analogo del teorema di Torelli per il numero delle curve cuspidate, o per quello delle curve dotate di almeno due nodi, contenute in un sistema bidimensionale su una superficie. A differenza del problema dianzi prospettato, sembra che, per la risoluzione di questi ultimi, non sia possibile ricorrere a tecniche analoghe a quelle qui adoperate, ma si debba procedere ad uno studio accurato dello schema dei divisori su una superficie e di suoi sottoschemi notevoli, come quello descritto dalle curve nodate, cuspidate, ecc.

BIBLIOGRAFIA

[A] E. S. ALLEN, *Su alcuni caratteri di una serie algebrica, e la formula di De Jonquières per serie qualsiasi*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **37** (1919), pp. 345-370.

[C] G. CASTELNUOVO, *Sulle serie algebriche di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica*, Memorie Scelte, Zanichelli, Bologna, 1937.

[CO] A. COLLINO, *The rational equivalence ring of symmetric products of curves*, Illinois J. of Math., **19** (1975), pp. 567-583.

[DJ] E. DE JONQUIERES, *Mémoire sur les contacts multiples d'ordre quelconque des courbes de degré r, qui satisfant à des conditions données, avec une courbe fixe du degré m; suivi de quelques réflexions sur la solution d'un grand nombre de questions concernant les propriétés projectives des courbes et des surfaces algébriques*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, **46** (1866), pp. 289-321.

[E] F. ENRIQUES, *Le superficie algebriche*, Zanichelli, Bologna, 1949.

[G] A. GROTHENDIECK, *Sur une note de Mattuck-Tate*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, **200** (1958), pp. 208-215.

[GH_1] F. GHIONE, *La disuguaglianza di Castelnuovo-Severi in teoria dei numeri*, Atti del convegno « La teoria dei numeri nella Cina antica e di oggi », Ferrara, 1980.

[GH_2] F. GHIONE, *Quelques résultats de Corrado Segre sur les surfaces réglées*, Math. Ann., **255** (1981), pp. 77-95.

[GRH] P. A. GRIFFITHS - J. HARRIS, *Principles of algebraic geometry*, J. Wiley and Sons, New York, 1978.

[H] R. HARTSHORNE, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977.

[I_1] B. IVERSEN, *Numerical invariants and multiple planes*, Amer. J. of Math., **92** (1970), pp. 968-996.

[I_2] B. IVERSEN, *Critical points of an algebraic function*, Inventiones Math., **12** (1971), pp. 210-229.

[MA] T. MATSUSAKA, *On a theorem of Torelli*, Amer. J. of Math., **80** (1958), pp. 784-800.

[MD] I. G. MACDONALD, *Symmetric products of an algebraic curve*, Topology, **1** (1962), pp. 319-343.

[MT] A. MATTUCK - J. TATE, *On the inequality of Castelnuovo-Severi*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **22** (1958), pp. 295-299.

[S] F. SEVERI, *Trattato di geometria algebrica*, Zanichelli, Bologna, 1926.

[T_1] R. TORELLI, *Sui sistemi algebrici di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, Atti Accad. Sci. Torino, **42** (1906-1907), pp. 86-99.

[T_2] R. TORELLI, *Dimostrazione di una formula di De Jonquières e suo significato geometrico*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **21** (1906), pp. 58-65.

[T_3] R. TORELLI, *Sulle serie algebriche semplicemente infinite di gruppi di punti appartenenti a una curva algebrica*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **37** (1914), pp. 25-46.

[W] A. WEIL, *Courbes algébriques et variétes abéliennes*, Hermann, Paris, 1971.

[Z] O. ZARISKI, *Algebraic surfaces*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1971.