Actions libres et isométriques sur les variétés à géodésiques toutes fermées de même longueur (*).

J. BREUNEVAL (Marseille, France) - F. PECAUT (Avignon, France) (**)

Résumé. – *Si un groupe de Lie connexe G (non nécessairement compact et de dimension non nulle) opère librement et isométriquement sur une variété riemannienne à géodésiques toutes fermées de même longueur, alors les orbites sont totalement géodésiques et $G = S^1$ ou S^3 ou $SO(3)$; sur une sphère riemannienne standard, les seules actions libres et isométriques de groupes de Lie connexes sont les actions standard de S^1 sur S^{2n+1} et S^3 sur S^{4n+3} dont les quotients riemanniens sont les espaces projectifs complexes et quaternioniens.*

1. – Introduction.

L'action standard à gauche de S^1 (resp. S^3), sous-groupe des éléments de norme 1 du groupe complexe $\boldsymbol{C}^*$ (resp. quaternionien $\boldsymbol{H}^*$) sur la sphère unité S^{2n+1} (resp. S^{4n+3}) de $\boldsymbol{C}^{n+1}$ (resp. $\boldsymbol{H}^{n+1}$) est donnée par ([BS], p. 72):

$$\big(z, (z_1, \ldots, z_{n+1})\big) \mapsto (zz_1, \ldots, zz_{n+1})\,.$$

Cette action est libre et isométrique; elle donne naissance aux fibrations principales de Hopf, de bases les espaces projectifs complexes et quaternioniens, riemannisés par submersion ([B.G.M.], p. 7):

$$S^1 \hookrightarrow S^{2n+1} \to \boldsymbol{C}P^n$$

$$S^3 \hookrightarrow S^{4n+3} \to \boldsymbol{H}P^n\,.$$

La question se pose de connaître toutes les actions libres et isométriques de groupes de Lie sur les sphères et plus généralement sur les variétés riemanniennes à géodésiques toutes fermées de même longueur (*les C-variétés*, suivant la terminologie de [BS]).

(*) Entrata in Redazione il 9 luglio 1983.
(**) JACQUES BREUNEVAL: U.E.R. de Mathématiques, Université de Provence, 3 place Victor Hugo, Marseille, France, Cedex 3; FRANCOISE PECAUT: Centre Universitaire Scientifique, 33 rue Louis Pasteur, Avignon, France.

Nous établissons les résultats suivants:

THÉORÈME 1. – Si un groupe de Lie connexe G (de dimension non nulle, non nécessairement compact) opère librement et isométriquement sur une C-variété M, alors:

$G = S^1$ ou $G = S^3$ ou $G = SO(3)$;

$G \hookrightarrow M \to M/G$ est un espace fibré principal à fibres totalement géodésiques;

G est canoniquement muni d'une métrique symétrique.

Toutes les fibres lui sont isométriques.

THÉORÈME 2. – Les seules actions libres et isométriques de groupes de Lie connexes (de dimension non nulle) sur les sphères riemanniennes standard sont les actions standard

$$S^1 \hookrightarrow S^{2n+1} \to \boldsymbol{CP}^n \quad \text{et} \quad S^3 \hookrightarrow S^{4n+3} \to \boldsymbol{HP}^n .$$

L'unicité s'entend à isométrie près: Soient $\mu_1, \mu_2 \colon G \to \operatorname{Diff} M$ deux actions à gauche de G sur M; si G opère par isométries, les actions μ_1 et μ_2 sont identifiables s'il existe une isométrie $\varphi \colon M \to M$ telle que:

$$\forall a \in G , \quad \mu_2(a) = \varphi^{-1} \circ \mu_1(a) \circ \varphi .$$

Les hypothèses du théorème 2 peuvent être affaiblies par le

THÉORÈME 3. – Une action isométrique de S^3 sur une sphère riemannienne standard est libre dès qu'un sous-groupe S^1 de S^3 opère librement.

Le deuxième paragraphe précise les notations et rassemble les résultats généraux utilisés dans la suite. La preuve du théorème 1 occupe le paragraphe 3, les théorèmes 2 et 3 sont démontrés dans le paragraphe 4.

REMARQUES ET QUESTIONS:

1) J. A. WOLF ([W]) a classé toutes les actions libres et isométriques de groupes finis sur les sphères standard. Dans ce cas, le quotient, canoniquement riemannisé par revêtement peut avoir plus d'une longueur de géodésiques (espaces lenticulaires). De même, dans les hypothèses du théorème 1, le quotient M/G est canoniquement riemannisé par submersion et à géodésiques toutes fermées. Sont-elles de même longueur? On ne connaît aucun exemple du contraire et même aucun exemple d'action libre et isométrique de S^1, S^3 ou $SO(3)$ sur une C-variété, autre que les actions standard sur certains espaces symétriques compacts de rang 1.

La question de l'égalité des longueurs des géodésiques est subordonnée à la suivante: Existe-t-il une C-variété, qui ne soit pas un espace symétrique compact de rang 1, sur laquelle S^1 opère librement et isométriquement?

2) Utilisant un résultat de J. ADEM (cf. remarque 3) et la caractérisation de M. BERGER ([BG,1]) des sphères et projectifs par le $\frac{1}{4}$-pincement, R. H. ESCOBALES ([ES]) a démontré que les seules fibrations de sphères riemanniennes standard S^m par des sphères S^p (avec $1 \leqslant p \leqslant m-1$), qui soient des submersions riemmaniennes à fibres totalement géodésiques sont (à isométrie près) les fibrations standard sur $\boldsymbol{CP}^n$ et $\boldsymbol{HP}^n$ et la fibration de Hopf sur le plan projectif de Cayley $S^7 \hookrightarrow S^{15} \to$ $\to S^8 = \boldsymbol{C}_a P^1$. On peut noter que ce résultat joint au théorème 1 fournit une preuve, assez détournée, du théorème 2.

3) Il est connu, par des arguments de topologie algébrique, que si un groupe de Lie compact connexe de dimension non nulle opère librement sur une sphère, ce ne peut être que S^1 ou S^3 ([BD], p. 153), S^1 opérant sur S^{2n+1} et S^3 sur S^{4n+3}. Ce dernier point résulte du fait établi par J. ADEM ([AD]) que les seules dimensions possibles de fibrations de sphères par des sphères sont $S^0 \hookrightarrow S^m$, $S^1 \hookrightarrow S^{2n+1}$, $S^3 \hookrightarrow S^{4n+3}$, et $S^{2^k-1} \hookrightarrow S^{2^{k+1}-1}$ avec $k \geqslant 3$.

2. - Groupes de transformations et isométries.

2.1. - Diff M désigne le groupe des difféomorphismes d'une variété M de classe C^∞. diff M désigne l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur M.

Soit G un groupe de Lie dont e est l'élément neutre et $\mathfrak{G} = T_e G$ l'espace tangent en e.

Une action à gauche du groupe G sur une variété M est un homomorphisme

$$\mu\colon G \to \operatorname{Diff} M$$
$$a \mapsto \mu(a)$$

tel que l'application $(a, x) \to \mu(a)(x)$ soit de classe C^∞.

Pour tout $x \in M$, l'application « orbite de x » est:

$$\mu_x\colon \begin{array}{l} G \to M \\ a \mapsto \mu_x(a) = \mu(a)(x) . \end{array}$$

On définit l'action infinitésimale:

$$\mu_*\colon \mathfrak{G} \to \operatorname{diff} M$$
$$z \to \mu_*(z)$$

par la relation:

$$\forall z \in \mathfrak{G},\ \forall x \in M\,, \qquad \mu_*(z)(x) = D\mu_*(e)(z)\,.$$

Soit $\gamma\colon G \to \operatorname{Diff} G$ l'action canonique *à gauche* de G sur lui-même:

$$\forall a \in G,\ \forall b \in G\,, \qquad \gamma(a)(b) = a\cdot b$$

γ_* applique $\mathfrak{G}$ sur l'algèbre de Lie des champs invariants *à droite.*

Dans la suite on posera: $z_* = \gamma_*(z)$ pour tout z.

On a $z = z_*(e)$ et par définition de la structure d'algèbre de Lie de $\mathfrak{G}$:

$$[z, z'] = [z_*, z'_*](e)\,.$$

Pour toute action à gauche μ, μ_* est un homomorphisme d'algèbre de Lie

PROPOSITION. – L'application-orbite de x, $\mu_x\colon G \to M$, applique le champ z_* sur le champ $\mu_*(z)$ restreint à l'orbite de x:

$$\forall x \in M,\ \forall z \in \mathfrak{G},\ \forall a \in G\,, \qquad \mu_*(z)\big(\mu_x(a)\big) = D\mu_x(a)\big(z_*(a)\big)\,.$$

2.2. – Si V est un champ complet sur M, $t \to \exp(tV)$ désigne le groupe à un paramètre dont V dérive.

Sur un groupe de Lie G, l'exponentielle $\operatorname{Exp}\colon \mathfrak{G} \to G$ est définie par $\operatorname{Exp}(z) = \exp(z_*)(e)$.

PROPOSITION. – Pour toute action (à gauche) μ de G sur M et pour tout $z \in \mathfrak{G}$, le champ $\mu_*(z)$ est complet et dérive du groupe à un paramètre défini par l'action sur M du sous-groupe à un paramètre d'éléments de G, $t \mapsto \operatorname{Exp}(tz)$. En d'autres termes:

$$\exp \circ \mu_* = \mu \circ \operatorname{Exp}$$

En particulier, pour $\mu = \gamma$:

$$\forall a \in G,\ \forall t \in \boldsymbol{R},\ \forall z \in \mathfrak{G}\,, \qquad \operatorname{Exp}(tz)\cdot a = \exp(tz_*)(a)\,.$$

2.3. – PROPOSITION. – Si l'action μ de G sur M est *libre* $\big(a \neq e \Rightarrow \mu(a)$ est sans point fixe$\big)$, alors:

1) Pour tout $z \in \mathfrak{G}$, $z \neq 0$, le champ $\mu_*(z)$ ne s'annule en aucun point.

2) Si une trajectoire de $\mu_*(z)$ est périodique, toutes les trajectoires de $\mu_*(z)$ sont périodiques de même plus petite période.

3) Pour tout $x \in M$, $\mu_x\colon G \to M$ est une immersion injective.

Tous les résultats de ce paragraphe sont classiques et peuvent être trouvsé dans [K.N.] ou [CH] ou [B.C.]. Nous démontrerons cependant la proposition ci-dessus:

Preuve de (1): [K.N.], p. 42, prop. 4.1.

Preuve de (2): Si la trajectoire de $\mu_*(z)$ passant par x est périodique (avec $z \neq 0$), il existe $\tau > 0$ tel que $\exp\big(\tau \cdot \mu_*(z)\big)(x) = x$, soit d'après (2,2): $\mu(\mathrm{Exp}\,(\tau z)(x) = x$; mais l'action est libre donc $\mathrm{Exp}\,(\tau z) = e$ et par conséquent $\exp\big(\tau \cdot \mu_*(z)\big) = id_M$. La plus petite période de chaque trajectoire est une période de toute autre trajectoire, nécessairement la plus petite.

Preuve de (3): Il est clair que si l'action μ est libre, μ_x est injective. $D\mu_x(a)\colon T_a G \to T_{\mu_x(a)} M$ est également injective. En effet si $z_a \in T_a G$, il existe un champ invariant à droite z_* tel que $z_*(a) = z_a$. Il résulte de (2,1) que $D_{\mu^x}(a) \cdot z_a = \mu_*(z_*(e))\big(\mu_x(a)\big)$; donc si $D\mu_x(a) \cdot z_a = 0$, $\mu_*\big(z_*(a)\big)$ s'annule et $z_*(e) = 0$ d'après (2.3.1) donc $z_* = 0$ et $z_a = 0$.

2.4. – Un champ de vecteurs V sur une variété riemannienne (M, g) est une isométrie infinitésimale lorsque la dérivée de Lie de g suivant V est nulle, ce qui équivaut à

$$\forall X \in \operatorname{diff} M\,, \quad \forall Y \in \operatorname{diff} M\,, \qquad g(X, \nabla_Y V) + g(Y, \nabla_X V) = 0$$

où ∇ est la connexion riemannienne sur (M, g).

PROPOSITION. – Soit V une isométrie infinitésimale sur (M, g); alors:

1) $g(V, V)$ reste constant sur chaque trajectoire connexe de V.

2) Si $g(V, V)$ est critique en x et $V(x) \neq 0$, la trajectoire de V passant par x est une géodésique.

3) Si V ne s'annule pas, $g(V, V)$ est localement constant si et seulement si les trajectoires de V sont des géodésiques.

La dérivée de la fonction $f = g(V, V)$ suivant $X \in \operatorname{diff} M$ est:

$$X(f) = 2g(V, \nabla_X V) = -2g(X, \nabla_V V)\,.$$

Alors $V(f) = 0$, ce qui implique 1).

f est de dérivée nulle si et seulement si $\nabla_V V = 0$, ce qui implique (3).

Si f est critique en x, f reste critique sur la trajectoire de x ([K.N.], p. 252, prop. 5.7) et $\nabla_V V = 0$ sur cette trajectoire.

Parmi les isométries infinitésimales, les champs complets constituent l'algèbre de Lie iso (M, g) du groupe des isométries Iso (M, g).

Un groupe de Lie G opère isométriquement sur (M, g) si pour tout $a \in G$, $\mu(a)^*(g) = g$, c'est-à-dire $\mu(G) \subset \mathrm{Iso}\,(M, g)$, auquel cas on a $\mu_*(\mathfrak{G}) \subset \mathrm{iso}\,(M, g)$.

3. – Actions libres et isométriques sur une C-variété.

Rappelons qu'une C-variété est une variété riemannienne à géodésiques toutes fermées de même longueur.

THÉORÈME 1. – Si un groupe de Lie connexe G, de dimension > 0, opère librement et isométriquement sur une C-variété (M, g), alors:

$G = S^1$ ou $G = S^3$ ou $G = SO(3)$.

$G = M \to M/G$ est un espace fibré principal à fibres totalement géodésiques.

G est canoniquement muni d'une métrique symétrique; toutes les fibres lui sont isométriques.

La preuve du théorème occupe le reste du paragraphe; les notations sont celles du paragraphe 2: En particulier l'action est notée μ et l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$.

1) *Pour tout $z \in \mathfrak{G}$, l'isométrie infinitésimale $\mu_*(z)$ est de module constant sur M. Pour $z \neq 0$, les trajectoires de $\mu_*(z)$ sont des géodésiques de M.*

Le cas $z = 0$ étant trivial, on suppose $z \neq 0$.

Une composante connexe de M est compacte car ses géodésiques sont toutes fermées de même longueur l. Sur une composante, la fonction $x \mapsto \|\mu_*(z)(x)\|$ atteint sa valeur maximum $\|\mu_*(z)\|_{\max}$ et sa valeur minimum $\|\mu_*(z)\|_{\min}$.

Il résulte des propositions (2,3) et (2,4) que:

La valeur $\|\mu_*(z)\|_{\max}$ (resp. $\|\mu_*(z)\|_{\min}$) est atteinte sur une trajectoire $T_{\max}$ (resp. $T_{\min}$) du champ $\mu_*(z)$. Ces trajectoires ne sont pas réduites à un point car $\mu_*(z)$ ne s'annule en aucun point. Ce sont des géodésiques car la fonction $x \mapsto \|\mu_*(z)(x)\|$ y est critique. $T_{\max}$ et $T_{\min}$ sont donc fermées de longueur l. Par ailleurs $\mu_*(z)$ a une même plus petite période $\tau > 0$ sur toutes ses trajectoires. On a donc

$$l = \int_{T_{\max}} ds = \int_0^\tau \|\mu_*(z)(T_{\max}(t))\|\, dt = \|\mu_*(z)\|_{\max} \cdot \tau \quad \text{et} \quad l = \|\mu_*(z)\|_{\min} \cdot \tau\,.$$

Par conséquent, sur la composante connexe de M, nous avons $\|\mu_*(z)\|_{\max} = \|\mu_*(z)\|_{\min} = l/\tau$ ce qui implique que $\|\mu_*(z)\|$ est une constante sur cette composante, et finalement sur M car l et τ restent les mêmes sur M.

De la proposition (2.4.3) on déduit que les trajectoires de $\mu_*(z)$ sont des géodésiques de (M, g).

2) *Pour le moment nous ne savons pas si les orbites $\mu_x(G)$ sont des sous-variétés; nous le déduirons de la preuve de la compacité de G.*

Pour tout $x \in M$, on munit G de la métrique $\mu_x^*(g)$ induite par l'application-orbite $\mu_x \colon G \to M$. Alors

a) $\mu_x^*(g)$ *est invariante à gauche.*

En effet, si $\gamma \colon G \to \operatorname{Diff} G$ est l'action à gauche de G sur G, on a $\forall a \in G$, $\mu_x \circ \gamma(a) = \mu(a) \circ \mu_x$ et $\mu(a)^* \cdot (g) = g$; par conséquent:

$$[\gamma(a)]^*\big(\mu_x^*(g)\big) = [\mu_x \circ \gamma(a)]^*(g) = [\mu(a) \circ \mu_x]^*(g) = \\ = \mu_x^*\big(\mu(a)^*(g)\big) = \mu_x^*(g) \,.$$

b) Pour tout $z \in \mathfrak{G}$, *le champ invariant à droite* z_* *est une isométrie infinitésimale, de module constant sur* $(G, \mu_x^*(g))$. *Pour* $z \neq 0$, *les trajectoires de* z_* *sont des géodésiques de* $(G, \mu_x^*(g))$.

L'action à gauche γ de G sur G étant isométrique, $z_* = \gamma_*(z)$ est une isométrie infinitésimale sur G. L'immersion isométrique $\mu_x \colon G \to M$ applique z_* sur $\mu_*(z)$ (proposition 2.1) qui est de module constant. On en déduit que z_* est de module constant sur G et par la proposition (2.4.3) que ses trajectoires sont des géodésiques de G.

c) L'isométrie injective $\mu_x \colon G \to M$ *applique les géodésiques de* $(G, \mu_x^*(g))$ *sur des géodésiques de* (M, g).

Soit c une déogésique de $(G, \mu_x^*(g))$ de conditions initiales $c(o) \in G$ et $\dot{c}(o) \in T_{c(o)}G$. Il existe sur G un unique champ invariant à droite z_* tel que $z_*(c(o)) = \dot{c}(o)$. La trajectoire de z_* passant par $c(o)$ est une géodésique de $(G, \mu_x^*(g))$ de mêmes conditions initiales que c; c'est donc c.

c est trajectoire de z_* et par conséquent $\mu_x \cdot c$ est une trajectoire de $\mu_*(z)$: c'est une géodésique de (M, g).

3) *G est compact; $G \to M \to M/G$ est un espace fibré principal à fibres totalement géodésiques.*

G est compact car connexe et muni d'une métrique à géodésiques toutes fermées de même longueur: toute géodésique c de $(G, \mu_x^*(g))$ est fermée de longueur l, comme son image $\mu_x \cdot c$.

G étant compact et l'action de G sur M libre, $G \hookrightarrow M \to M/G$ est un espace fibré principal ([GL]).

Les fibres sont les orbites, il résulte de 2) *c*) que ce sont des sous-variétés totalement géodésiques.

REMARQUE. – Si M est une sphère standard, on peut conclure ici que les orbites sont des sphères et que $G = S^1$ ou $G = S^3$, seuls groupes de Lie sphériques ([M.S.]).

4) *G est de rang* 1; *$G = S^1$ ou $G = S^3$ ou $G = SO(3)$.*

Tout sous-groupe de Lie H de G opère librement et isométriquement (à gauche) sur $(G, \mu_x^*(g))$, donc est totalement géodésique d'après 3) où la variété est G et le groupe H. H est donc muni d'une métrique invariante à gauche à géodésiques toutes fermées de même longueur.

Sur le tore T^2, qui est abélien, une métrique invariante à gauche est plate et possède donc des géodésiques non fermées (les géodésiques « de pente irrationnelle »).

G ne peut donc pas posséder T^2 comme sous-groupe: G est de rang 1.

Il résulte de la classification des groupes de Lie compacts connexes que les seuls de rang 1 sont S^1, S^3 ou $SO(3)$ ([BD], p. 30).

5) *La métrique $\mu_x^*(g)$ sur G ne dépend pas de $x \in M$; elle munit G d'une structure symétrique.*

Pour toute métrique sur G invariante à gauche, les géodésiques sont les trajectoires des champs invariants à droite; si elles sont fermées de longueur l, alors pour tout $z \in \mathfrak{G} = T_e G$, non nul, $t \mapsto \exp(tz_*)$ est périodique de plus petite période $\tau = l/\|z\|$.

τ ne dépend pas de la métrique; donc si l est fixée, deux telles métriques induisent la même norme $z \mapsto \|z\|$ sur $T_e G$, donc le même produit scalaire sur $T_e G$. Elles sont par conséquent identiques ([B.C.], p. 136).

$\mu_x^*(g)$ est, pour tout x, une métrique invariante à gauche à géodésiques toutes fermées de longueur l. Comme $G = S^1$ ou $G = S^3$ ou $G = SO(3)$, il existe sur G une métrique symétrique (invariante à gauche et à droite) à géodésiques toutes fermées de longueur l nécessairement identique à $\mu_x^*(g)$ pour tout x.

4. – Actions libres et isométriques sur les sphères standards.

L'action standard $\alpha\colon O(m+1) \to \mathrm{Diff}\,(S^m)$ du groupe orthogonal $O(m+1)$ sur la sphère $S^m = \{x \in \mathbf{R}^{m+1}/\|x\| = 1\}$ associe à toute matrice orthogonale U, l'isométrie de S^m $(x \mapsto U\cdot x,\ \forall x \in S^m \subset \mathbf{R}^{m+1})$.

L'action infinitésimale correspondante $\alpha_*\colon o(m+1) \to \mathrm{diff}\,(S^m)$ associe à toute matrice antisymétrique $A \in o(m+1)$ le champ d'isométries infinitésimales $(x \mapsto A\cdot x,\ \forall x \in S^m \subset \mathbf{R}^{m+1})$.

On montre facilement ([SA]) que $\alpha\colon O(m+1) \to \mathrm{Iso}\,(S^m)$ et $\alpha_*\colon o(m+1) \to \mathrm{iso}\,(S^m)$ sont des isomorphismes.

Une *action (à gauche) isométrique* d'un groupe de Lie G sur S^m induit, par composition avec α^{-1}:

Un homomorphisme de groupe $\mu\colon G \to O(m+1)$.

Un homomorphisme d'Algèbre de Lie $\mu_*\colon \mathfrak{G} \to o(m+1)$.

On peut montrer que μ est un homomorphisme de groupe de Lie mais c'est inutile, l'essentiel étant dans l'existence de μ_* et la proposition de commutation (prop. 2,2):

$$\forall z \in \mathfrak{G}\,, \qquad e^{\mu_*(z)} = \mu(\operatorname{Exp}(z)):$$

où $A \mapsto e^A$ est l'exponentielle matricielle de $o(m+1)$ dans $O(m+1)$.

Si G est un groupe connexe et si l'action isométrique de G sur S^m est libre alors $G = S^1$ ou $G = S^3$ (cf. § 3, 3), remarque; ou encore: § 1, remarque 3) Théorème d'Adem). On déduit également du théorème d'Adem que $S^m = S^{2n+1}$ si $G = S^1$ et $S^m = S^{4n+3}$ si $G = S^3$, mais nous le montrerons plus loin de façon élémentaire.

Pour démontrer le *théorème* 2, il reste à établir que l'action de S^1 (resp. S^3) sur S^{2n+1} (resp. S^{4n+3}) est, à isométrie près, l'action standard définie dans l'introduction.

LEMME 1 (cf. [SA]). Pour toute action isométrique libre de S^1 sur la sphère S^m plongée dans $\boldsymbol{R}^{m+1}$ euclidien, m est impair ($m = 2n+1$) et il existe une base orthonormée de $\boldsymbol{R}^{2n+2}$, identifiant $\boldsymbol{R}^{2n+2}$ à $\boldsymbol{C}^{n+1}$, telle que cette action est:

$$\big(z, (z_1, \ldots, z_{n+1})\big) \mapsto (zz_1, \ldots, zz_{n+1})\,.$$

Notons que la base orthonormée trouvée définit une isométrie $\varphi\colon S^{2n+1} \to S^{2n+1}$ telle que si μ_{st} est l'action standard, l'action donnée s'écrive:

$$a \mapsto \varphi^{-1} \circ \mu_{st}(a) \circ \varphi, \; \forall a \in S^1.$$

Ce qui démontre la partie du théorème 2 relative à S^1.

PREUVE DU LEMME. - $G = S^1 = \{z \in \boldsymbol{C}/|z| = 1\}$, sous-groupe de Lie de $\boldsymbol{C}^*$, a pour algèbre de Lie $= i\boldsymbol{R}$; en notant e^{it} l'exponentielle complexe, on a

$$\forall t \in \boldsymbol{R}\,, \qquad \mu(e^{it}) = e^{t\mu_*(i)}\,.$$

Pour toute valeur propre λ de la matrice antisymétrique $\mu_*(i)$, $e^{2\pi\lambda}$ est valeur propre de la matrice orthogonale $e^{2\pi\mu_*(i)} = \mu(e^{2i\pi}) = \mu(1) = 1_{m+1}$ (matrice unité de $O(m+1)$), donc égale à 1. Les valeurs propres de $A = \mu_*(i)$ sont donc dans $i\,\boldsymbol{Z}$.

Aucune valeur propre de A n'est nulle, sinon 1 serait valeur propre de $\mu(e^{it})$ pour tout t et en particulier pour $e^{it} \neq 1$, ce qui est exclu puisque l'action est libre: s'il existe $x \in S^m \subset R^{m+1}$ tel que $\mu(e^{it})x = x$ alors $e^{it} = 1$.

Par conséquent $\mu_*(i)$ est de rang maximum $m+1$, mais nécessairement pair (comme rang d'une matrice antisymétrique) donc *m est impair*. Posons $m = 2n+1$.

Si $ip \in i\boldsymbol{Z}$ est valeur propre de A ($p \neq 0$), e^{itp} est valeur propre de $\mu(e^{ti})$; en particulier pour $t = 2\pi/p$, 1 est valeur propre de $\mu\big(e(2i\pi/p)\big)$ ce qui implique $e^{2i\pi/p} = 1$ car l'action est libre, donc $1/p \in \boldsymbol{Z}$ et par conséquent $p = \pm 1$.

Les valeurs propres de $\mu_*(i)$ sont donc $\pm i$.

Comme $\mu_*(i)$ est une matrice réelle, i et $-i$ sont valeurs propres et ce sont les seules, ce qui équivaut à

$$[\mu^*(i)]^2 = -1_{2n+2}\,.$$

Il existe donc sur $\boldsymbol{R}^{2n+2}$ une structure complexe définie par la condition:

$$\forall x \in \boldsymbol{R}^{2n+2}\,, \qquad i\cdot x = \mu_*(i)x\,.$$

L'action de S^1 devient:

$$\mu(e^{it})(x) = e^{t\mu_*(i)}\cdot x = \big(\cos t + \mu_*(i)\sin t\big)\cdot x = e^{it}\cdot x\,.$$

On peut trouver une base orthonormée de $\boldsymbol{R}^{2n+2}$ qui vérifie

$$e_{2k} = i\cdot e_{2k-1} \qquad (k = 1, \ldots, n+1)$$

identifiant $\boldsymbol{R}^{2n+2}$ avec $\boldsymbol{C}^{n+1}$.

L'action de S^1 s'écrit:

$$\big(e^{it}, (z_1, \ldots, z_{n+1})\big) \mapsto (e^{it}z_1, \ldots, e^{it}z_{n+1})\,.$$

N.B. - Nous utiliserons plus loin que les éléments i et $-i$ de l'algèbre de Lie de S^1 sont les seuls de période 2π (période du groupe à un paramètre correspondant) et que: $\mu_*(i)$ est de carré -1.

LEMME 2. - Pour toute action isométrique de S^3 sur la sphère S^m plongée dans $\boldsymbol{R}^{m+1}$ euclidien, si un sous-groupe S^1 de S^3 opère librement, alors $m = 4n + 3$ (n entier $\geqslant 0$) et il existe une base orthonormée de $\boldsymbol{R}^{4n+4}$, identifiant $\boldsymbol{R}^{4n+4}$ à $\boldsymbol{H}^{n+1}$, telle que cette action est:

$$\big(z, (z_1, \ldots, z_{n+1})\big) \mapsto (zz_1, \ldots, zz_{n+1})\,.$$

Il est clair qu'on en déduit la partie du théorème 2 relative à S^3 et le théorème 3.

Il existe dans $O(4)$ des matrices I, J, K telles que:

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1_4\,, \qquad IJ = K,\ JK = I \text{ et } KI = J\,.$$

On montre facilement que $I, J,$ et K sont antisymétriques et que $1_4, I, J$ et K sont linéairement indépendantes.

Le groupe quaternionien à 8 éléments $Q = \{\pm 1_4, \pm I, \pm J, \pm K\}$ engendre l'algèbre des quaternions $\boldsymbol{H} = \{z = r1_4 + aI + bJ + cK/(r, a, b, c) \in \boldsymbol{R}^4\}$ considérée ici comme sous-algèbre de $L(4, \boldsymbol{R})$.

$\boldsymbol{H}$ est un corps; $\boldsymbol{H}^*$ désigne le groupe multiplicatif $\boldsymbol{H} - \{o\}$.

La norme sur $\boldsymbol{H}$ est $|z| = \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Trace}\,({}^t z \cdot z)} = \sqrt{r^2 + a^2 + b^2 + c^2}$.

Alors ${}^t z \cdot z = |z|^2 \cdot 1_4$ et par conséquent les quaternions de norme 1 sont ceux dont la matrice est orthogonale.

$S^3 = \{z \in \boldsymbol{H} / |z| = 1\}$ est donc un sous-groupe (de Lie) de $O(4)$ et un sous-groupe de Lie de $\boldsymbol{H}^*$.

L'algèbre de Lie sp (1) de S^3 est le sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{H}$ tangent en 1_4 à S^3. (notation: S^3 apparaît, dans cette présentation, comme étant le sous-groupe invariant Sp (1) de $O(4)$; cf. [BG,2], vol. 2, 8.9.10).

$\mathrm{sp}\,(1) = \{z = uI + vJ + wK / (u, v, w) \in R^3\}$ est une sous-algèbre de Lie de $o(4)$. Le crochet de Lie vérifie:

$$[I, J] = 2K\,, \quad [J, K] = 2I\,, \quad [K, I] = 2J\,.$$

L'exponentielle $\mathrm{Exp}\colon \mathrm{sp}\,(1) \to S^3$ est l'exponentielle matricielle de $o(4)$ dans $O(4)$.
$z \to e^z$

Sur S^3, qui est connexe, elle est surjective.

Pour toute matrice $z \in \mathrm{sp}\,(1)$, on a $z^2 = -|z|^2 \cdot 1_4$ et par conséquent

$$e^z = \cos|z| + z/|z| \sin|z|\,, \quad (e_0 = 1_4)\,.$$

Pour $z \in \mathrm{sp}\,(1)$ tel que $|z| = 1$, le groupe à un paramètre $t \mapsto e^{tz}$ est de période 2π; son image dans S^3 est un sous-groupe isomorphe à S^1. Tout sous-groupe S^1 de S^3 est ainsi décrit.

Si $\mu\colon S^3 \to O(n+1)$ est une action isométrique de S^3 sur S^m, d'action infinitésimale $\mu_*\colon \mathrm{sp}\,(1) \to o(m+1)$, la commutation de μ et des exponentielles s'écrit:

$$\forall z \in \mathrm{sp}\,(1)\,, \quad \mu(e^z) = e^{\mu_*(z)}\,.$$

Si un sous-groupe S^1 de S^3 opère librement et si z est l'élément de l'algèbre de Lie de S^3 de module 1 (donc de période 2π) qui l'engendre, alors $[\mu_*(z)]^2 = -1_{m+1}$ (cf. N.B. ci-dessus). Modulo un changement de base, on peut supposer que cet élément est I, donc que $[\mu_*(I)]^2 = -1_{m+1}$.

Or μ_* est un homomorphisme d'algèbre de Lie, alors compte tenu de l'expression du crochet dans $o(m+1)$ on a, en posant $L = \mu_*(I)$, $M = \mu_*(J)$ et $N = \mu_*(K)$:

$$\begin{cases} LM - ML = 2N\,, \quad MN - NM = 2L\,, \quad NL - LN = 2M \\ \text{et} \quad L^2 = -1_{m+1}\,. \end{cases}$$

On en déduit par un calcul simple:

$$\begin{cases} LM = -ML = N\,, \quad MN = -NM = L\,, \quad NL = -LN = M \\ \text{et} \quad N^2 = M^2 = L^2 = -1_{m+1} \end{cases}$$

et comme ce sont des matrices antisymétriques, elles sont aussi orthogonales

$$(L^2 = -\mathbf{1}_{m+1} \quad \text{et} \quad {}^tL = -L \Rightarrow {}^tLL = \mathbf{1}_{m+1}) .$$

Nous allons en déduire une structure quaternionienne sur $\boldsymbol{R}^{m+1}$: Soit $e_1 \in \boldsymbol{R}^{m+1}$ de norme 1.

e_1, $e_2 = Le_1$, $e_3 = Me_1$, $e_4 = Ne_1$ sont de norme 1, deux à deux orthogonaux et sous-tendent un espace E_1 de dimension réelle 4.

Puis dans l'orthogonal de $E_1 \oplus \ldots \oplus E_k$ on construit E_{k+1} nécessairement de dimension 0 ou 4.

$$m + 1 \text{ est donc un multiple de 4, soit } m = 4n + 3 \quad (n \in \boldsymbol{N}).$$

L'action d'un élément de S^3 sur $S^{4n+3} \subset R^{4n+4}$ est:

$$x \mapsto e^{\mu_*(z)} \cdot x = e^{uT+vM+wN} \cdot x = \left(\cos\omega \cdot \mathbf{1}_{4n+5} + \sin\omega \cdot \left(\frac{u}{\omega} L + \frac{v}{\omega} M + \frac{w}{\omega} N\right)\right) x$$

$$\text{avec} \quad \omega^2 = u^2 + v^2 + w^2$$

$$\text{donc:} \quad x \mapsto (r\mathbf{1}_{4n+4} + aL + bM + cN)x \quad \text{avec} \quad r^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 1 .$$

Chaque sous-espace E_k est invariant. Sur E_1 l'action sécrit:

$$(\varrho e_1 + \alpha e_2 + \beta e_3 + \gamma e_4) \mapsto (r\mathbf{1}_{4n+4} + aL + bM + cN)(\varrho \mathbf{1}_{4n+4} + \alpha L + \beta M + \gamma N)\, e_1 =$$
$$= (\varrho' \mathbf{1}_{4n+4} + \alpha' L + \beta' M + \gamma' N)\, e_1 = \varrho' e_1 + \alpha' e_2 + \beta' e_3 + \gamma' e_4$$

où $(\varrho', \alpha', \beta', \gamma')$ est le produit quaternionien $(r, a, b, c) \times (\varrho, \alpha, \beta, \gamma)$.

L'action de S^3, incluse dans $\boldsymbol{H}$, sur E_1, identifié à $\boldsymbol{H}$ par la bijection linéaire qui applique e_1, e_2, e_3 et e_4 respectivement sur $\mathbf{1}_4$, I, J et K devient donc $(z, z_1) \in S^3 \times \times E_1 \to z \cdot z_1 \in E_1$. Les bijections linéaires analogues entre E_k et $\boldsymbol{H}$ identifient $\boldsymbol{R}^{4n+4}$ à $\boldsymbol{H}^{n+1}$ et S^{4n+3} à la sphère unité de $\boldsymbol{H}^{n+1}$.

L'action donnée devient $\big(z, (z_1, \ldots, z_{n+1})\big) \to (zz_1, \ldots, zz_{n+1})$.

Ceci termine la preuve du lemme 2 et par conséquent des théorèmes 2 et 3.

BIBLIOGRAPHIE

[AD] J. ADEM, *Relations on integrated reduced powers*, Proc. Mat. Acad. Sci. U.S.A., **39** (1953), pp. 636-638.

[BG,1] M. BERGER, *Sur quelques variétés riemanniennes suffisamment pincées*, Bull. Soc. Math. France, **88** (1960), pp. 57-61.

[BG,2] M. BERGER, *Géométrie*, Cedic, Fernand Nathan, Paris, 1977.

[B.G.M.] M. BERGER - P. GAUDUCHON - E. MAZET, *Le spectre d'une variété riemannienne,* Lectures Notes, vol. 194, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

[B.C.] R. BISHOP - R. CRITTENDEN, *Geometry of manifolds,* Academic Press, New York and London, 1964.

[BD] G. E. BREDON, *Introduction to compact transformation groups,* Academic Press, New York and London, 1972.

[BS] A. L. BESSE, *Manifolds all of whose geodesics are closed,* Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1978.

[CH] C. CHEVALLEY, *Theory of Lie groups,* Princeton University Press, 1946.

[ES] R. ESCOBALES, *Riemannian submersions with totally geodesic fibers,* J. Diff. Geom., **10** (1975), pp. 253-276.

[GL] A. GLEASON, *Spaces with a compact Lie group of transformation,* Proc. Amer. Math. Soc., **1** (1950), pp. 35-43.

[K.N.] S. KOBAYASHI - K. NOMIZU, *Foundations of differential geometry,* vol. I, Interscience Publ., 1963.

[M.S.] J. MILNOR - J. STASHEFF, *Characteristic classes,* Princeton University Press, 1974.

[SA] M. SARIH, *Propriétés géométriques et topologiques du projectif complexe CP^n et de la variété de ses géodésiques,* Thèse doctorat 3- cycle, Université de Provence, Marseille.

[W] J. A. WOLF, *Spaces of constant curvature,* Mc Graw-Hill, New York, 1967.