Equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo non variazionale in aperti non limitati (*).

MARIA TRANSIRICO - MARIO TROISI

Summary. – *In this paper we study the Dirichlet problem for second order, linear elliptic partial differential equations with discontinuous coefficients in unbounded domains. We obtain some results about existence and uniqueness of the solution in* $W^2(\Omega)$.

0. – Introduzione.

Assegniamo, in un aperto non limitato Ω di R^n, $n\geqslant 2$, l'operatore differenziale lineare uniformemente ellittico del second'ordine:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} + au \tag{1}$$

supponendo che:

$$a_{ij} = a_{ji}\,, \qquad a_{ij}\in L^\infty(\Omega)\,, \qquad i,j=1,\dots,n\,, \tag{2}$$

$$(a_{ij})_{x_k}\in L^s_{\text{loc}}(\bar\Omega)\,, \qquad \sup_{x\in\Omega}\|(a_{ij})_{x_k}\|_{L^s(\Omega\cap B(x,d))} < +\infty\,, \qquad i,j,k=1,\dots,n\,, \tag{3}$$

$$a_i\in L^s_{\text{loc}}(\bar\Omega)\,, \qquad \sup_{x\in\Omega}\|a_i\|_{L^s(\Omega\cap B(x,d))} < +\infty\,, \qquad i=1,\dots,n\,, \tag{4}$$

$$a\in L^t_{\text{loc}}(\bar\Omega)\,, \qquad \sup_{x\in\Omega}\|a\|_{L^t(\Omega\cap B(x,d))} < +\infty\,, \tag{5}$$

dove d è un fissato numero reale positivo, $B(x,d)=\{y\in R^n\colon |y-x|<d\}$, s e t sono due numeri reali tali che:

$$s>2 \quad \text{se } n=2\,, \qquad s=n \quad \text{se } n>2\,,$$

$$t=2 \quad \text{se } 2\leqslant n<4\,, \qquad t>2 \quad \text{se } n=4\,, \qquad t=\frac{n}{2} \quad \text{se } n>4\,.$$

Osserviamo che tali condizioni risultano indipendenti da d (cfr. il n. 1).

(*) Entrata in Redazione il 4 giugno 1987.

Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. del C.N.R.

Indirizzo degli AA.: Istituto di Matematica, Facoltà di Scienze, Università di Salerno, 84100 Salerno (Italy).

In questo lavoro ci occupiamo dello studio del problema di Dirichlet:

$$u \in W^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^1(\Omega)\,, \qquad Lu + \lambda u = f\,, \qquad f \in L^2(\Omega)\,, \tag{6}$$

dove $\lambda \in R$.

Rileviamo che nel caso di un aperto Ω limitato, lo stesso problema a coefficienti discontinui è stato ampiamente studiato da diversi Autori, tra i quali ricordiamo, ad es., C. MIRANDA [8], O. A. LADYZHENSKAJA-N. N. URAL'TSEVA [6], M. CHICCO [4], G. VIOLA [15] e, per $n = 2$, G. TALENTI [11].

Noi studiamo il problema in ipotesi che estendono ad un aperto non limitato quelle di [8] e [6].

La trattazione si basa su alcune proprietà di certe classi di spazi funzionali che sono l'ambiente dei coefficienti dell'operatore. Tali spazi nel corso del lavoro vengono indicati con $M^p(\Omega)$ e $M_0^p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$:

$M^p(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni $f\colon \Omega \to R$ tali che:

$$f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega})\,, \qquad \sup_{x\in\Omega} \|f\|_{L^p(\Omega\cap B(x,d))} < +\infty\,; \tag{7}$$

$M_0^p(\Omega)$ è il sottospazio di $M^p(\Omega)$ costituito dalle funzioni f tali che:

$$\lim_{|x|\to+\infty} \|f\|_{L^p(\Omega\cap B(x,d))} = 0\,. \tag{8}$$

La prima parte del lavoro è perciò dedicata allo studio di tali spazi. Alcuni dei risultati ottenuti riguardano dei teoremi di limitatezza e di compattezza per l'operatore

$$u \in W^m(\Omega) \to \beta u \in L^2(\Omega) \tag{9}$$

quando β appartiene a $M^p(\Omega)$ oppure a $M_0^p(\Omega)$ per un opportuno p.

La restante parte è dedicata allo studio del problema (6), per il quale otteniamo dei teoremi di esistenza ed unicità.

Precisamente, supponendo Ω «sufficientemente regolare», proviamo che:

1) se si ha per un $s_0 \in\,]s, +\infty]$ e per un $t_0 \in\,]t, +\infty]$:

$$(a_{ij})_{x_k}\,, \quad a_i \in M_0^s(\Omega) + M^{s_0}(\Omega)\,, \quad i, j, k = 1, \dots, n\,, \tag{10}$$

$$a \in M_0^t(\Omega) + M^{t_0}(\Omega)\,, \tag{11}$$

allora il problema (6) è univocamente risolubile per λ sufficientemente grande;

2) se è verificata la (11) ed inoltre si ha:

$$(a_{ij})_{x_k}\,, \quad a_i \in M_0^s(\Omega)\,, \quad i, j, k = 1, \dots, n\,, \tag{12}$$

$$a = a' + a''\,, \quad a' \in M_0^t(\Omega)\,, \quad \operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} a'' > 0\,, \tag{13}$$

allora il problema (6) con $\lambda = 0$ è un problema ad indice di indice zero;

3) se sono verificate le (11) e (12) e la condizione:

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} a > -\infty\,, \tag{14}$$

allora il problema (6) è univocamente risolubile per ogni $\lambda \in R$ tale che

$$\lambda + \operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} a > 0\,.$$

Tali risultati vengono stabiliti utilizzando alcuni teoremi relativi alle soluzioni del problema in forma variazionale stabiliti in [12], un teorema di regolarizzazione per il problema

$$u \in W^2_{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega}) \cap \mathring{W}^1(\Omega)\,, \qquad Lu + \lambda u = f\,, \qquad f \in L^2(\Omega)\,, \tag{15}$$

ed alcune limitazioni a priori preliminarmente stabilite.

I nn. 1 e 2 sono dedicati allo studio degli spazi $M^p(\Omega)$ e $M^p_0(\Omega)$.

Il n. 3 riguarda lo studio dell'operatore (9).

Nel n. 4 viene stabilito il citato teorema di regolarizzazione per il problema (15) e vengono stabilite le limitazioni a priori che sono alla base dei teoremi di esistenza ed unicità.

Nel n. 5 vengono infine provati i teoremi di esistenza ed unicità per il problema (6).

1. - Gli spazi $M^p(A)$ e $M^p_0(A)$.

Nel seguito useremo le notazioni:

$$|f|_{p,E} = \|f\|_{L^p(E)}\,, \qquad u_x = \left(\sum_{i=1}^n u^2_{x_i}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad u_{xx} = \left(\sum_{i,j=1}^n u^2_{x_i x_j}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Se E è un sottoinsieme di R^n misurabile secondo Lebesgue, denoteremo con $\Sigma(E)$ la σ-algebra dei sottoinsiemi di E misurabili secondo Lebesgue.

Per ogni $A \in \Sigma(E)$ indicheremo con $|A|$ la misura di Lebesgue di A.

Per ogni $x \in R^n$ e per ogni $r \in R_+$ porremo:

$$B(x, r) = \{y \in R^n\colon |y - x| < r\}\,.$$

Se $p \in [1, +\infty]$ e $A \in \Sigma(R^n)$, indicheremo con $L^p_{\mathrm{loc}}(\bar{A})$ la classe delle funzioni $f\colon A \to R$ tali che $\zeta f \in L^p(A)$ per ogni $\zeta \in \mathfrak{D}(R^n)$.

Inoltre, per ogni $r \in R_+$, indicheremo con $M^p(A, r)$ lo spazio delle funzioni $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\bar{A})$ tali che:

$$\|f\|_{M^p(A,r)} = \sup_{x \in A} |f|_{p, A \cap B(x,r)} < +\infty, \tag{1.1}$$

munito della norma definita dalla (1.1).

Se A è non limitato, indicheremo con $M^p_0(A, r)$ il sottospazio di $M^p(A, r)$ costituito dalle $f \in M^p(A, r)$ tali che:

$$\lim_{|x| \to +\infty} |f|_{p, A \cap B(x,r)} = 0 .$$

Si verifica facilmente che qualunque siano r, $r_0 \in R_+$ si ha:

$$f \in M^p(A, r) \Leftrightarrow f \in M^p(A, r_0), \qquad f \in M^p_0(A, r) \Leftrightarrow f \in M^p_0(A, r_0);$$

inoltre esistono $c_1, c_2 \in R_+$ tali che

$$c_1 \|f\|_{M^p(A,r)} \leq \|f\|_{M^p(A,r_0)} \leq c_2 \|f\|_{M^p(A,r)} \qquad \forall f \in M^p(A, r). \tag{1.2}$$

Indicheremo con d un fissato numero reale positivo; porremo:

$$A(x) = A \cap B(x, d), \qquad M^p(A) = M^p(A, d), \qquad M^p_0(A) = M^p_0(A, d).$$

Osserviamo che si hanno le inclusioni (algebriche e topologiche):

$$M^q(A) \subset M^p(A), \qquad M^q_0(A) \subset M^p_0(A), \qquad 1 \leq p < q \leq +\infty, \tag{1.3}$$

$$L^q(A) \subset M^q(A), \qquad 1 \leq q \leq +\infty, \tag{1.4}$$

$$L^p(A) \subset M^p_0(A), \qquad 1 \leq p < +\infty. \tag{1.5}$$

Osserviamo inoltre che la (1.5) è un'inclusione stretta. Infatti

$$\frac{1}{1 + |x|^\alpha} \in M^q_0(A) \qquad \forall q \in [1, +\infty] \text{ e } \forall \alpha \in R_+$$

mentre per $p \in [1, +\infty[$ e $\alpha \in]0, n/p[$ risulta:

$$\frac{1}{1 + |x|^\alpha} \notin L^p(A).$$

Osserviamo anche che per $1 \leqslant q \leqslant +\infty$ si ha:

$$f \in L^q_{\text{loc}}(\bar{A}) , \quad \lim_{|x| \to +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow f \in M^q_0(A) \tag{1.6}$$

e che:

$$f \in L^\infty(A) , \quad \lim_{|x| \to +\infty} |f|_{1,A(x)} = 0 \Rightarrow f \in M^p_0(A) \qquad \forall p \in [1, +\infty[. \tag{1.7}$$

2. – Alcune proprietà degli spazi $M^p_0(\Omega)$.

Nel seguito indicheremo: con Ω un sottoinsieme aperto e non limitato di R^n; con p un numero reale tale che $1 \leqslant p < +\infty$.

Consideriamo gli spazi $M^p(\Omega)$ e $M^p_0(\Omega)$ definiti al n. 1.

Si verifica facilmente che, qualunque sia $r \in R_+$, esiste una costante $c = c(r, d)$ tale che:

$$E \in \Sigma(\Omega) , \quad \operatorname{diam} E \leqslant r \Rightarrow |f|_{p,E} \leqslant c \|f\|_{M^p(E)} \qquad \forall f \in M^p(\Omega) . \tag{2.1}$$

Per ogni $r \in R_+$ porremo $B_r = B(0, r)$ e indicheremo con ζ_r una funzione di classe $\mathcal{D}(R^n)$ tale che:

$$0 \leqslant \zeta_r \leqslant 1 , \quad \zeta_r|_{B_r} = 1 , \quad \operatorname{supp} \zeta_r \subset B_{2r} .$$

Osserviamo che per ogni $f \in M^p_0(\Omega)$ si ha:

$$\lim_{r \to +\infty} \|(1 - \zeta_r) f\|_{M^p(\Omega)} = 0 . \tag{2.2}$$

Proviamo che:

LEMMA 2.1. – *Se $f \in M^p(\Omega)$, le seguenti proprietà sono equivalenti:*

1) *esistono $\lambda_\varepsilon, \sigma_\varepsilon \in R_+$ tali che:*

$$E \in \Sigma(\Omega) , \quad |E \cap B_{\lambda_\varepsilon}| \leqslant \sigma_\varepsilon \Rightarrow \|f\|_{M^p(E)} \leqslant \varepsilon ; \tag{2.3}$$

2) *esistono $s_\varepsilon, t_\varepsilon \in R_+$ tali che:*

$$E \in \Sigma(\Omega) , \quad \sup_{x \in E \cap B_{s_\varepsilon}} |E \cap B(x, d)| \leqslant t_\varepsilon \Rightarrow \|f\|_{M^p(E)} \leqslant \varepsilon ; \tag{2.4}$$

3) *esistono $h_\varepsilon, k_\varepsilon \in R_+$ tali che:*

$$\|(1 - \zeta_{h_\varepsilon}) f\|_{M^p(\Omega)} \leqslant \varepsilon , \tag{2.5}$$

$$E \in \Sigma(\Omega) , \quad \sup_{x \in E} |E \cap B(x, d)| \leqslant k_\varepsilon \Rightarrow \|f\|_{M^p(E)} \leqslant \varepsilon . \tag{2.6}$$

Inoltre, tali proprietà sono verificate se $f \in M_0^p(\Omega)$.

DIM. – Nell'ipotesi che sia verificata la 1), fissiamo $k_\varepsilon \in N$ e $x_1, \dots, x_{k_\varepsilon} \in B_{\lambda_\varepsilon}$ tali che:

$$B_{\lambda_\varepsilon} \subset \bigcup_{i=1}^{k_\varepsilon} B\left(x_i, \frac{d}{2}\right).$$

Osservando che risulta:

$$|E \cap B_{\lambda_\varepsilon}| \leqslant \sum_{i=1}^{k_\varepsilon} \left|E \cap B\left(x_i, \frac{d}{2}\right)\right| \leqslant k_\varepsilon \sup_{x \in E \cap B_{\lambda_\varepsilon}} |E \cap B(x, d)|,$$

si ottiene evidentemente la 2) con $s_\varepsilon = \lambda_\varepsilon$ e $t_\varepsilon = \sigma_\varepsilon / k_\varepsilon$.

Supponiamo ora vera la 2) ed osserviamo che risulta:

$$\sup_{x \in E \cap B_{s_\varepsilon}} |E \cap B(x, d)| \leqslant |E \cap B_{s_\varepsilon + d}|;$$

ne segue che si ha la 1) con $\lambda_\varepsilon = s_\varepsilon + d$ e $\sigma_\varepsilon = t_\varepsilon$.

Osserviamo ancora che, se è vera la 2), si ha la (2.6) con $k_\varepsilon = t_\varepsilon$. Inoltre dalla relazione

$$\|(1 - \zeta_{s_\varepsilon + d}) f\|_{M^p(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega \setminus B_{s_\varepsilon}} |(1 - \zeta_{s_\varepsilon + d}) f|_{p, (\Omega \setminus B_{s_\varepsilon + d}) \cap B(x, d)} \leqslant \|f\|_{M^p(\Omega \setminus B_{s_\varepsilon})}$$

segue la (2.5) con $h_\varepsilon = s_\varepsilon + d$. Resta perciò provato che la 2) implica la 3).

Viceversa, se è verificata la 3), per ogni $E \in \Sigma(\Omega)$ si ha:

$$\|f\|_{M^p(E)} \leqslant \|(1 - \zeta_{h_{\varepsilon/2}}) f\|_{M^p(E)} + \|\zeta_{h_{\varepsilon/2}} f\|_{M^p(E)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sup_{x \in E \cap B_{2h_{\varepsilon/2} + d}} |\zeta_{h_{\varepsilon/2}} f|_{p, (E \cap B_{2h_{\varepsilon/2}}) \cap B(x, d)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \|f\|_{M^p(E \cap B_{2h_{\varepsilon/2} + d})}.$$

Si ottiene allora la 2) con $s_\varepsilon = 2h_{\varepsilon/2} + d$ e $t_\varepsilon = k_{\varepsilon/2}$.

Proviamo, infine, che, se $f \in M_0^p(\Omega)$, è vera la 1).

Per la (2.2) esiste $\lambda_\varepsilon \in R_+$ tale che:

$$\|(1 - \zeta_{\lambda_\varepsilon / 2}) f\|_{M^p(\Omega)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si ha allora:

$$\|f\|_{M^p(E)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \|\zeta_{\lambda_\varepsilon / 2} f\|_{M^p(E)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + |f|_{p, E \cap B_{\lambda_\varepsilon}}. \tag{2.7}$$

D'altra parte, siccome $f \in L^p(\Omega \cap B_{\lambda_\varepsilon})$, esiste $\sigma_\varepsilon \in R_+$ tale che:

$$E \in \Sigma(\Omega), \quad |E \cap B_{\lambda_\varepsilon}| \leqslant \sigma_\varepsilon \Rightarrow |f|_{p, E \cap B_{\lambda_\varepsilon}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.8}$$

Dalle (2.7) e (2.8) segue la (2.3) e quindi si ha la tesi.
Come ovvia conseguenza della (1.2) e del lemma 2.1 si ha:

LEMMA 2.2. – *Se* $f \in M_0^p(\Omega)$, *la funzione*:

$$\sigma_{p,f}\colon t \in [0,1] \to \sup_{\substack{E \in \Sigma(\Omega)\\ |E| \leqslant t}} \|f\|_{M^p(E,\, 2d)} \tag{2.9}$$

è continua in 0.

Per ogni $f \in M^p(\Omega)$ e per ogni $x \in \Omega$ indicheremo con $\sigma_{p,f,x}$ un'assegnata funzione reale definita in $[0,1]$, continua in 0 e tale che:

$$\sup_{\substack{E \in \Sigma(\Omega(x))\\ |E| \leqslant t}} |f|_{p,E} \leqslant \sigma_{p,f,x}(t) \qquad \forall t \in [0,1]\,. \tag{2.10}$$

Chiameremo *modulo di continuità* in $L^p(\Omega(x))$ di una funzione $f \in M^p(\Omega)$, il modulo di continuità in 0 di $\sigma_{p,f,x}$.

OSSERVAZIONE 2.1. – Se $f \in M_0^p(\Omega)$, si possono scegliere le $\sigma_{p,f,x}$ costanti rispetto ad x e tali che:

$$\sigma_{p,f,x} = \sigma_{p,f} \qquad \forall x \in \Omega\,;$$

pertanto si ha che: *se* $f \in M_0^p(\Omega)$, *il modulo di continuità di* f *in* $L^p(\Omega(x))$ *risulta indipendente da* x *e dipende solo dal modulo di continuità di* $\sigma_{p,f}$ *in* 0.

OSSERVAZIONE 2.2. – Rileviamo anche che, se $f \in M^q(\Omega)$, con $p < q \leqslant +\infty$, si possono scegliere le $\sigma_{p,f,x}$ tali che

$$\sigma_{p,f,x}(t) = \|f\|_{M^q(\Omega)} t^{1/p - 1/q} \qquad \forall x \in \Omega \text{ e } \forall t \in [0,1]\,;$$

pertanto si ha che: *se* $f \in M^q(\Omega)$, $p < q \leqslant +\infty$, *il modulo di continuità di* f *in* $L^p(\Omega(x))$ *risulta indipendente da* x *e dipende solo da* p, q *e dalla norma di* f *in* $M^q(\Omega)$.

3. – Lemmi di immersione.

Assegnata $f \in M_0^p(\Omega)$, indichiamo con r_ε e δ_ε due numeri positivi tali che (cfr. il lemma 2.1 e la (1.2)):

$$\|(1 - \zeta_{r_\varepsilon}) f\|_{M^p(\Omega)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,, \tag{3.1}$$

$$E \in \Sigma(\Omega)\,, \qquad \sup_{x \in E} |E \cap B(x,d)| \leqslant \delta_\varepsilon \Rightarrow \|f\|_{M^p(E,\,2d)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{3.2}$$

LEMMA 3.1. – *Per ogni* $f \in M_0^p(\Omega)$ *e per ogni* $\varepsilon \in R_+$ *esiste* $f_\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ *tale che*:

$$\operatorname{supp} f_\varepsilon \subset B_{2r_\varepsilon}, \qquad \|f - f_\varepsilon\|_{M^p(\Omega)} \leqslant \varepsilon, \tag{3.3}$$

$$|f_\varepsilon|_{\infty,\Omega} \leqslant \left(\frac{\|f\|^p_{M^p(\Omega)}}{\delta_\varepsilon}\right)^{1/p}, \tag{3.4}$$

dove r_ε *è definito dalla* (3.1) *e* δ_ε *è definito dalla* (3.2).

DIM. – Poniamo per ogni $k \in R_+$:

$$\Omega_k = \{x \in \Omega : |f(x)| \geqslant k\}.$$

Si verifica facilmente che:

$$\sup_{x\in\Omega} |\Omega_k \cap B(x, d)| \leqslant \left(\frac{\|f\|_{M^p(\Omega)}}{k}\right)^p.$$

Posto pertanto

$$k_\varepsilon = \left(\frac{\|f\|^p_{M^p(\Omega)}}{\delta_\varepsilon}\right)^{1/p},$$

dove δ_ε è definito dalla (3.2), si ha

$$\sup_{x\in\Omega} |\Omega_{k_\varepsilon} \cap B(x, d)| \leqslant \delta_\varepsilon$$

e perciò:

$$\|f\|_{M^p(\Omega_{k_\varepsilon}, 2d)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Poniamo:

$$f_\varepsilon = (1 - \chi_{k_\varepsilon})\zeta_{r_\varepsilon} f,$$

dove χ_{k_ε} è la funzione caratteristica di Ω_{k_ε} e r_ε è definito dalla (3.1).

Evidentemente tale f_ε verifica la prima delle (3.3) e la (3.4). Inoltre si ha la seconda delle (3.3) osservando che risulta:

$$\|f - f_\varepsilon\|_{M^p(\Omega)} \leqslant \|(1 - \zeta_{r_\varepsilon}) f\|_{M^p(\Omega)} + \|\chi_{k_\varepsilon}\zeta_{r_\varepsilon} f\|_{M^p(\Omega)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \|f\|_{M^p(\Omega_{k_\varepsilon}, 2d)}.$$

Nel seguito indicheremo con $W^m(\Omega)$, $m \in N$, l'usuale spazio di Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$ e con $\mathring{W}^m(\Omega)$ la chiusura di $\mathcal{D}(\Omega)$ in $W^m(\Omega)$.

Indicheremo inoltre con $U^m(\Omega)$: lo spazio $W^m(\Omega)$ se Ω è dotato della proprietà di cono; lo spazio $\mathring{W}^m(\Omega)$ se Ω non è dotato della proprietà di cono.

Proviamo il seguente

LEMMA 3.2. – *Assegniamo* $m \in N$ *e* $p \in [2, +\infty[$ *tali che*:

$$p = 2 \quad \text{se } n < 2m\,, \qquad p > 2 \quad \text{se } n = 2m\,, \qquad p = \frac{n}{m} \text{ se } n > 2m\,. \tag{3.5}$$

Se $u \in U^m(\Omega)$ *e* $f \in M^p(\Omega)$, *allora* $fu \in L^2(\Omega)$ *e*:

$$|fu|_{2,\Omega} \leqslant c \|f\|_{M^p(\Omega)} \|u\|_{W^m(\Omega)}\,, \tag{3.6}$$

dove c *è una costante indipendente da* f *e da* u.

DIM. – Se $n \geqslant 2m$ la tesi si deduce dal teorema 3.1 di [13]. Se $n < 2m$ la tesi si ottiene ragionando come nella dimostrazione del teorema 3.1 di [13], osservando che ora in luogo delle (3.8) e (3.9) di [13] si hanno le relazioni:

$$|u|_{\infty,\Omega_i} \leqslant c_0 \|u\|_{W^m(\Omega_i)} \qquad \forall i \in I\,,$$

$$|fu|_{2,\Omega_i} \leqslant |f|_{2,\Omega_i} |u|_{\infty,\Omega_i} \qquad \forall i \in I\,.$$

Dai lemmi 3.1 e 3.2 si deduce in modo ovvio il seguente

LEMMA 3.3. – *Se* m, p *soddisfano la* (3.5) *e se* $f \in M_0^p(\Omega)$, *allora per ogni* $\varepsilon \in R_+$ *esistono* $c(\varepsilon) \in R_+$ *e un insieme aperto e limitato* $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ *tali che*:

$$|fu|_{2,\Omega} \leqslant \varepsilon \|u\|_{W^m(\Omega)} + c(\varepsilon) |u|_{2,\Omega_\varepsilon} \qquad \forall u \in U^m(\Omega)\,. \tag{3.7}$$

Per ogni funzione misurabile $\gamma\colon \Omega \to \bar{R}_+$, indicheremo con $L^2(\Omega, \gamma)$ lo spazio delle funzioni $f\colon \Omega \to R$ tali che $\gamma^{\frac{1}{2}} f \in L^2(\Omega)$, munito della seminorma:

$$\|f\|_{L^2(\Omega,\gamma)} = \|\gamma^{\frac{1}{2}} f\|_{L^2(\Omega)}\,. \tag{3.8}$$

LEMMA 3.4. – *Se* m *e* p *soddisfano la* (3.5), *allora per ogni funzione* $\gamma\colon \Omega \to \bar{R}_+$ *di classe* $M^{p/2}(\Omega)$ *si ha*:

$$U^m(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega, \gamma)\,; \tag{3.9}$$

se in più $\gamma \in M_0^{p/2}(\Omega)$ *si ha*:

$$U^m(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega, \gamma)\,. \tag{3.10}$$

DIM. – La (3.9) è un'ovvia conseguenza del lemma 3.2.

La (3.10) segue dal lemma 3.3 osservando che, fissato un insieme aperto e limitato $\Omega_0 \subset \Omega$, per ben noti risultati l'operatore:

$$u \in U^m(\Omega) \to u|_{\Omega_0} \in L^2(\Omega_0)$$

risulta compatto.

4. – Formule di maggiorazione.

Poniamo:

$$B = B(0, 1)\,, \qquad B_+ = B \cap \{x \in R^n\colon x_n > 0\}\,, \qquad B_0 = B \cap \{x \in R^n\colon x_n = 0\}\,.$$

Consideriamo ancora un sottoinsieme aperto e non limitato Ω di R^n, supponendo ora che sia verificata la seguente ipotesi:

i$_1$) Esiste $r_0 \in R_+$ e, per ogni $z \in \partial\Omega$, esiste un diffeomorfismo $\varphi^z\colon B \to B(z, r_0)$ di classe C^2 tali che:

$$\varphi^z(B_+) = \Omega \cap B(z, r_0)\,, \qquad \varphi^z(B_0) = \partial\Omega \cap B(z, r_0);$$

inoltre le componenti di φ^z e di $(\varphi^z)^{-1}$ sono limitate insieme con le loro derivate prime e seconde da una costante indipendente da z.

OSSERVAZIONE 4.1. – Rileviamo che la condizione i$_1$) è soddisfatta se Ω è *uniformemente regolare* di classe C^2 nel senso del n. 4.6 di R. A. ADAMS [1].

Indicheremo con s e t due numeri reali tali che:

$$s > 2 \quad \text{se } n = 2\,, \qquad s = n \quad \text{se } n > 2\,,$$

$$t = 2 \quad \text{se } 2 \leqslant n < 4\,, \qquad t > 2 \quad \text{se } n = 4\,, \qquad t = \frac{n}{2} \quad \text{se } n > 4\,.$$

Assegniamo in Ω l'operatore differenziale lineare del second'ordine:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} + au \tag{4.1}$$

supponendo che:

i$_2$) Risulta:

$$a_{ij} = a_{ji}\,, \qquad a_{ij} \in L^\infty(\Omega)\,, \qquad i, j = 1, \ldots, n\,, \tag{4.2}$$

ed è verificata la condizione di uniforme ellitticità:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \nu|\xi|^2 \quad \text{q.o. in } \Omega\,, \quad \forall \xi \in R^n\,, \tag{4.3}$$

dove ν è una costante positiva indipendente da x e da ξ; inoltre si ha per un $s_0 \in]s, +\infty]$ e per un $t_0 \in]t, +\infty]$:

$$(a_{ij})_{x_k}\,, \quad a_i \in M_0^s(\Omega) + M^{s_0}(\Omega)\,, \quad i, j, k = 1, \ldots, n\,, \tag{4.4}$$

$$a \in M_0^t(\Omega) + M^{t_0}(\Omega)\,. \tag{4.5}$$

Per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $r \in R_+$ poniamo:

$$\Omega(x, r) = \Omega \cap B(x, r)\,,$$

$$\alpha_r = \inf_{x\in\Omega} |\Omega(x, r)|\,, \qquad \beta_r = \sup_{x\in\Omega} |\Omega(x, r)|\,.$$

Osserviamo che l'ipotesi i_1) implica:

$$\alpha_r > 0 \qquad \forall r \in R_+\,.$$

Si prova facilmente che:

LEMMA 4.1. – *Fissato* $r \in R_+$, *si ha* $f \in L^1(\Omega)$ *se e solo se* $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega})$ *e*

$$\big(x \in \Omega \to |f|_{1,\,\Omega(x,r)}\big) \in L^1(\Omega)\,;$$

inoltre:

$$\alpha_r \int_\Omega |f(x)|\,dx \leqslant \int_\Omega |f|_{1,\,\Omega(x,r)}\,dx \leqslant \beta_r \int_\Omega |f(x)|\,dx \qquad \forall f \in L^1(\Omega)\,. \tag{4.6}$$

Passiamo a stabilire il seguente:

TEOREMA 4.1. – *Se sono verificate le condizioni* i_1) *e* i_2), *allora per ogni* $u \in W^2_{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega}) \cap \cap \overset{\circ}{W}{}^1(\Omega)$ *e tale che* $Lu \in L^2(\Omega)$ *si ha* $u \in W^2(\Omega)$; *inoltre, fissato* $\lambda_1 \in R$, *sussiste la limitazione*:

$$|u_{xx}|_{2,\Omega} \leqslant c\big(|Lu + \lambda u|_{2,\Omega} + |u|_{2,\Omega}\big) \qquad \forall \lambda \in [\lambda_1, +\infty[\,, \tag{4.7}$$

dove c *è una costante indipendente da* u *e da* λ.

DIM. – Fissiamo: $u \in W^2_{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega}) \cap \overset{\circ}{W}{}^1(\Omega)$ tale che $Lu \in L^2(\Omega)$, $\lambda_1 \in R$, $d_0 = d/2$.

Indichiamo con ζ una funzione di classe $\mathfrak{D}(R^n)$ tale che:

$$0 \leq \zeta \leq 1 , \quad \zeta = 1 \text{ in } B(0, d_0) , \quad \operatorname{supp} \zeta \subset B(0, d) .$$

Fissato inoltre $y \in \Omega$, poniamo:

$$\psi = \psi_y : x \in \Omega \to \zeta(x - y) .$$

In conseguenza di noti risultati (cfr., ad es., [15]) si ha la limitazione:

$$|(\psi u)_{xx}|_{2,\Omega(y)} \leq c_0(|L(\psi u) + \lambda\psi u)|_{2,\Omega(y)} + |\psi u|_{2,\Omega(y)}) \quad \forall \lambda \in [\lambda_1, +\infty[, \tag{4.8}$$

dove c_0 è una costante dipendente: da n; da d; da λ_1; dalla costante di ellitticità ν; dalle norme in $L^\infty(\Omega(y))$ delle componenti delle funzioni φ^z e $(\varphi^z)^{-1}$, che definiscono la porzione di $\partial\Omega$ contenuta in $\overline{\Omega(y)}$, e delle loro derivate prime e seconde; dalle norme in $L^\infty(\Omega(y))$ dei coefficienti a_{ij}; dai moduli di continuità in $L^s(\Omega(y))$ delle derivate $(a_{ij})_{x_k}$; dai moduli di continuità in $L^s(\Omega(y))$ di a_i; dal modulo di continuità in $L^t(\Omega(y))$ di a.

Dall'ipotesi i_1), dalle condizioni (4.2), (4.4), (4.5) e dalle osservazioni 2.1 e 2.2 si deduce, evidentemente, che è possibile scegliere c_0 in (4.8) indipendente da y.

Osserviamo che si ha:

$$L(\psi u) = \psi L u - 2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} \psi_{x_j} + u\Big(- \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \psi_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i \psi_{x_i}\Big) . \tag{4.9}$$

Dalle (4.8) e (4.9) si deduce, con note considerazioni, la limitazione:

$$|u_{xx}|_{2,\Omega(y,d_0)} \leq c_1(|Lu + \lambda u|_{2,\Omega(y)} + |u_x|_{2,\Omega(y)} + |u|_{2,\Omega(y)}) \quad \forall \lambda \in [\lambda_1, +\infty[, \tag{4.10}$$

dove c_1 è una costante indipendente da u, λ e y.

Dalla (4.10), usando il lemma 4.1, segue che $u \in W^2(\Omega)$ e che:

$$|u_{xx}|_{2,\Omega} \leq c_2(|Lu + \lambda u|_{2,\Omega} + |u_x|_{2,\Omega} + |u|_{2,\Omega}) \quad \forall \lambda \in [\lambda_1, +\infty[, \tag{4.11}$$

dove c_2 è una costante indipendente da u e da λ.

Dalla (4.11) si deduce la (3.7) e quindi si ha la tesi.

COROLLARIO 4.1. – *Nelle stesse ipotesi del teorema* 4.1, *esistono* λ_0, $c \in R_+$ *tali che*:

$$\|u\|_{W^2(\Omega)} \leq c|Lu + \lambda u|_{2,\Omega} \quad \forall u \in W^2(\Omega) \cap \mathring{W}^1(\Omega) \quad e \quad \forall \lambda \in [\lambda_0, +\infty[. \tag{4.12}$$

DIM. – Procedendo come in [15], proposizione 5, osserviamo che in conseguenza del teorema 4.1 si ha:

$$(4.13)\qquad \lambda|u|_{2,\Omega} \leqslant |Lu + \lambda u|_{2,\Omega} + |Lu|_{2,\Omega} \leqslant |Lu + \lambda u|_{2,\Omega} + c_1\|u\|_{W^2(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant c_2|Lu + \lambda u|_{2,\Omega} + c_3|u|_{2,\Omega} \qquad \forall u \in W^2(\Omega) \cap \mathring{W}^1(\Omega) \quad \text{e} \quad \forall \lambda \in R_+ ,$$

dove c_1, c_2 e c_3 sono costanti indipendenti da u e da λ.

Dalle (4.13) e (4.7) si deduce con ovvie considerazioni la (4.12).

Consideriamo ora la seguente ulteriore condizione:

i$_3$) a_i, $(a_{ij})_{x_k} \in M_0^s(\Omega)$, $i, j, k = 1, \ldots, n$.

TEOREMA 4.2. – *Siano verificate le* i$_1$), i$_2$), i$_3$) *e la condizione* $\operatorname*{ess\,inf}_\Omega a > -\infty$. *Allora, fissato* $\lambda_0 > -\operatorname*{ess\,inf}_\Omega a$, *esiste* $c \in R_+$ *tale che*:

$$(4.14)\qquad \|u\|_{W^2(\Omega)} \leqslant c|Lu + \lambda u|_{2,\Omega} \qquad \forall u \in W^2(\Omega) \cap \mathring{W}^1(\Omega) \quad e \quad \forall \lambda \in [\lambda_0, +\infty[\,.$$

DIM. – Posto $\mu = \lambda_0 + \operatorname*{ess\,inf}_\Omega a$, per ogni $\lambda \in [\lambda_0, +\infty[$ risulta:

$$\lambda + a \geqslant \mu > 0 \qquad \text{q.o. in } \Omega ,$$

e quindi dal teorema 4.3 di [12] segue:

$$(4.15)\qquad |u|_{2,\Omega} \leqslant c_0|Lu + \lambda u|_{2,\Omega} \qquad \forall u \in W^2(\Omega) \cap \mathring{W}^1(\Omega) ,$$

dove c_0 è una costante indipendente da u e da λ.

Da (4.7) e (4.15) si deduce la (4.14).

Nel seguito porremo:

$$(4.16)\qquad L_0 u = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} .$$

TEOREMA 4.3. – *Siano verificate le* i$_1$), i$_2$), i$_3$) *e la condizione*:

$$(4.17)\qquad a = a' + a'' , \qquad a' \in M_0^t(\Omega) , \qquad \operatorname*{ess\,inf}_\Omega a'' > -\infty .$$

Allora, fissato $\lambda_0 > -\operatorname*{ess\,inf}_\Omega a''$, *esistono* $c \in R_+$ *ed un aperto limitato* $\Omega_0 \subset \Omega$ *tali che*:

$$(4.18)\qquad \|u\|_{W^2(\Omega)} \leqslant c\big(|Lu + \lambda u|_{2,\Omega} + |u|_{2,\Omega_0}\big)$$
$$\forall u \in W^2(\Omega) \cap \mathring{W}^1(\Omega) \quad e \quad \forall \lambda \in [\lambda_0, +\infty[\,.$$

DIM. – Assegnati $\lambda \in [\lambda_0, +\infty[$ e $u \in W^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^1(\Omega)$, in conseguenza del teorema 4.2 si ha:

$$\|u\|_{W^2(\Omega)} \leqslant c_1 |L_0 u + a'' u + \lambda u|_{2,\Omega} ,$$

dove c_1 è una costante indipendente da λ e da u.

Da quest'ultima relazione e dal lemma 3.3 si deduce con note considerazioni la (4.18).

Assegniamo una funzione $\beta\colon \Omega \to R_+$ tale che:

$$\beta \in M^t(\Omega) \qquad \text{ed } \exists \delta \in M_0^s(\Omega) \ni' \beta_x \leqslant \delta\beta . \tag{4.19}$$

Ad esempio:

$$\beta = 1 \qquad \text{oppure } \beta(x) = \frac{1}{(1 + |x|)^\alpha}, \qquad \alpha > 0 .$$

TEOREMA 4.4. – *Se sono verificate le* i_1), i_2), i_3), (4.17), (4.19) *e la condizione*:

$$\operatorname*{essinf}_{\Omega} a'' > 0 , \tag{4.20}$$

allora esistono $c \in R_+$ *e un aperto limitato* $\Omega_0 \subset \Omega$ *tali che*:

$$\|u\|_{W^2(\Omega)} \leqslant c\big(|Lu + \lambda\beta u|_{2,\Omega} + |u|_{2,\Omega_0}\big) \qquad \forall u \in W^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^1(\Omega) \quad e \quad \forall \lambda \in R_+ . \tag{4.21}$$

DIM. – Fissiamo $u \in W^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^1(\Omega)$ e $\lambda \in R_+$.

Dal teorema 4.2 si ha:

$$\|u\|_{W^2(\Omega)} \leqslant c_1 |L_0 u + a'' u|_{2,\Omega} , \tag{4.22}$$

con c_1 costante indipendente da u.

D'altra parte risulta:

$$\begin{aligned} \int_\Omega (L_0 u + a'' u)^2 \, dx &= \int_\Omega (L_0 u + a'' u + \lambda\beta u)^2 \, dx - \\ &\quad - \lambda^2 \int_\Omega \beta^2 u^2 \, dx - 2\lambda \int_\Omega \beta\Big(a'' u^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j}\Big) \, dx - 2\lambda I(u) , \end{aligned} \tag{4.23}$$

dove:

$$I(u) = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \big(\beta_{x_j} a_{ij} + \beta (a_{ij})_{x_j}\big) u u_{x_i} \, dx .$$

Osserviamo che dalle i_3) e (4.19) segue che:

$$\gamma = \sum_{i,j=1}^n \big(|a_{ij}|\, \delta + |(a_{ij})_{x_j}|\big) \in M_0^s(\Omega);$$

quindi, per il lemma 3.3, si ha:

$$(4.24)\qquad |I(u)|\leqslant\int_\Omega \beta\gamma|u|u_x\,dx\leqslant\frac{\lambda}{4}\int_\Omega \beta^2u^2\,dx+\frac{1}{\lambda}\int_\Omega \gamma^2u_x^2\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\lambda}{4}\int_\Omega \beta^2u^2\,dx+\frac{1}{\lambda}\left(\varepsilon|u_{xx}|^2_{2,\Omega}+c_1(\varepsilon)|u_x|^2_{2,\Omega_\varepsilon}\right),$$

dove $c_1(\varepsilon)$ e Ω_ε sono indipendenti da u e da λ.

Dalle (4.22), (4.23), (4.24) ed ancora dal lemma 3.3, con note considerazioni, si deduce la (4.21).

COROLLARIO 4.2. – *Nelle stesse ipotesi del teorema* 4.4 *e se, inoltre,* $\beta^{-1}\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\bar\Omega)$, *esiste* $\lambda_0\in R_+$ *tale che:*

$$(4.25)\qquad \|u\|_{W^2(\Omega)}\leqslant c|Lu+\lambda\beta u|_{2,\Omega}\qquad \forall u\in W^2(\Omega)\cap \mathring{W}^1(\Omega)\quad e\quad \forall\lambda\in[\lambda_0,+\infty[\,,$$

dove c *è una costante indipendente da* u *e da* λ.

DIM. – Ragionando come nella dimostrazione del corollario 4.1, osserviamo che per il teorema 4.4 si ha:

$$(4.26)\qquad \lambda|u|_{2,\Omega_0}\leqslant c_1|\lambda\beta u|_{2,\Omega}\leqslant c_1|Lu+\lambda\beta u|_{2,\Omega}+c_1|Lu|_{2,\Omega}\leqslant$$
$$\leqslant c_1|Lu+\lambda\beta u|_{2,\Omega}+c_2\|u\|_{W^2(\Omega)}\leqslant c_3|Lu+\lambda\beta u|_{2,\Omega}+c_4|u|_{2,\Omega_0},$$
$$\forall u\in W^2(\Omega)\cap\mathring{W}^1(\Omega)\quad \text{e}\quad \forall\lambda\in R_+,$$

dove $c_1,\dots,c_4$ sono costanti indipendenti da u e da λ.

Da (4.21) e (4.26) si deduce la (4.25).

5. – Teoremi di esistenza.

TEOREMA 5.1. – *Se sono verificate le condizioni* i$_1$) *e* i$_2$), *allora esiste* $\lambda_0\in R_+$ *tale che per ogni* $\lambda\geqslant\lambda_0$ *il problema*

$$(5.1)\qquad u\in W^2(\Omega)\cap\mathring{W}^1(\Omega)\,,\qquad Lu+\lambda u=f\,,\qquad f\in L^2(\Omega)\,,$$

è univocamente risolubile.

DIM. – Cominciamo con l'osservare che, qualunque sia $\lambda\in R_+$, esiste un'unica soluzione $u\in W^2(\Omega)\cap\mathring{W}^1(\Omega)$ dell'equazione

$$(5.2)\qquad -\Delta u+\lambda u=f\,,\qquad f\in L^2(\Omega)\,.$$

Infatti, in conseguenza del corollario 4.1 di [12] applicato all'operatore $L = -\Delta + \lambda$ si ha che esiste un'unica $u \in \mathring{W}^1(\Omega)$ soluzione debole della (5.2). Da noti risultati di regolarizzazione locale dei problemi ellittici (cfr., ad es., il cap. 8 di [5]) si deduce che la suddetta soluzione $u \in W^2_{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega})$ e quindi, per il teorema 4.1, si ha che $u \in W^2(\Omega)$.

Per ogni $\tau \in [0, 1]$, consideriamo l'operatore

$$L_\tau = (1-\tau)(-\Delta + \lambda) + \tau(L + \lambda) = -(1-\tau)\Delta + \tau L + \lambda .$$

Evidentemente per L_τ sono soddisfatte le ipotesi del corollario 4.1 uniformemente rispetto a $\tau \in [0, 1]$, e quindi si ha per λ sufficientemente grande

$$\|u\|_{W^2(\Omega)} \leqslant c|L_\tau u|_{2,\Omega} \qquad \forall u \in W^2(\Omega) \cap \mathring{W}^1(\Omega) ,$$

dove c è una costante indipendente da u e τ.

Applicando pertanto il metodo di prolungamento per continuità lungo un parametro, si ottiene la tesi.

TEOREMA 5.2. – *Se sono verificate le ipotesi* i$_1$), i$_2$), i$_3$), (4.17), (4.19), (4.20) *e la condizione* $\beta^{-1} \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega})$, *allora esiste* $\lambda_0 \in R_+$ *tale che per ogni* $\lambda \geqslant \lambda_0$ *il problema*

$$u \in W^2(\Omega) \cap \mathring{W}^1(\Omega) , \quad Lu + \lambda\beta u = f , \quad f \in L^2(\Omega) , \tag{5.3}$$

è univocamente risolubile.

DIM. – Dal teorema 4.1 di [12] si ha che per λ sufficientemente grande esiste un'unica $u_0 \in \mathring{W}^1(\Omega)$ soluzione debole dell'equazione

$$-\Delta u + a'' u + \lambda\beta u = f , \quad f \in L^2(\Omega) . \tag{5.4}$$

Ragionando come nella dimostrazione del teorema 5.1, si ha che $u_0 \in W^2_{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega})$ e quindi, per il teorema 4.1, segue che $u_0 \in W^2(\Omega)$.

Per ogni $\tau \in [0, 1]$, poniamo:

$$L_\tau = (1-\tau)(-\Delta + a'' + \lambda\beta) + \tau(L + \lambda\beta) = -(1-\tau)\Delta + \tau(L - a'') + a'' + \lambda\beta .$$

Poichè per L_τ sono soddisfatte le ipotesi del corollario 4.2 uniformemente rispetto a $\tau \in [0, 1]$, per λ sufficientemente grande si ha:

$$\|u\|_{W^2(\Omega)} \leqslant c|L_\tau u|_{2,\Omega} \qquad \forall u \in W^2(\Omega) \cap \mathring{W}^1(\Omega) ,$$

dove c è una costante indipendente da u e τ.

Facendo uso del metodo di prolungamento per continuità lungo un parametro, si ottiene la tesi.

TEOREMA 5.3. – *Se sono verificate le condizioni* $i_1), i_2), i_3)$, (4.17) *e* (4.20), *l'operatore* $u \in W^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^1(\Omega) \to Lu \in L^2(\Omega)$ *è un operatore di Fredholm ad indice zero.*

DIM. – Fissiamo $\alpha > 0$ e poniamo

$$\beta(x) = \frac{1}{(1 + |x|)^\alpha}.$$

Poichè $\beta \in M_0^t(\Omega)$, in conseguenza del lemma 3.4 l'operatore

$$u \in W^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^1(\Omega) \to \beta u \in L^2(\Omega)$$

è compatto.

La tesi segue allora da noti risultati ponendo

$$L = (L + \lambda_0 \beta) - \lambda_0 \beta ,$$

dove λ_0 è il numero definito nel teorema 5.2.

TEOREMA 5.4. – *Se sono verificate le condizioni* $i_1), i_2), i_3)$ *e la condizione* $\operatorname{ess\,inf}_\Omega a > -\infty$, *allora per ogni* $\lambda > -\operatorname{ess\,inf}_\Omega a$ *il problema*

$$u \in W^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^1(\Omega) , \quad Lu + \lambda u = f , \quad f \in L^2(\Omega) , \tag{5.5}$$

è univocamente risolubile.

DIM. – Se $\lambda + \operatorname{ess\,inf}_\Omega a > 0$, in conseguenza del teorema 5.3 si ha che:

$$u \in W^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^1(\Omega) \to Lu + \lambda u \in L^2(\Omega)$$

è un operatore di Fredholm ad indice zero. La tesi segue allora dal teorema 4.2.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. A. ADAMS, *Sobolev spaces*, Academic Press, 1971.

[2] G. F. BOTTARO - M. E. MARINA, *Problema di Dirichlet per equazioni ellittiche di tipo variazionale su insiemi non limitati*, Boll. Un. Mat. Ital., (4) **8** (1973), pp. 46-56.

[3] M. CHICCO, *Solvability of the Dirichlet problem in* $H^{2,p}(\Omega)$ *for a class of linear second order elliptic partial differential equations*, Boll. Un. Mat. Ital., (4) **4** (1971), pp. 374-387.

[4] M. CHICCO, *Su una classe di equazioni ellittiche del secondo ordine in forma non variazionale*, Boll. Un. Mat. Ital., (6) **4** (1985), pp. 487-495.

[5] D. GILBARG - N. S. TRUDINGER, *Elliptic partial differential equations of second order*, Second Edition, Springer, Berlin, 1983.

[6] O. A. LADYZHENSKAJA - N. N. URAL'TSEVA, *Equations aux derivées partielles de type elliptique*, Dunod, Paris, 1966.

[7] P. L. LIONS, *Remarques sur les équations linéaires elliptiques du second ordre sous forme divergence dans les domaines non bornès I e II*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Fis. - S. VIII: (5) **78** (1985), pp. 205-212; (6) **79** (1985), pp. 178-183.

[8] C. MIRANDA, *Sulle equazioni ellittiche di tipo non variazionale a coefficienti discontinui*, Ann. Mat. Pura Appl., (4) **63** (1963), pp. 353-386.

[9] A. A. SHAROVSKII, *On a second order elliptic equation with discontinuous coefficients*, Moscow Univ. Math. Bull., **24** (1969), pp. 56-62.

[10] G. STAMPACCHIA, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Ann. Inst. Fourier, **15** (1965), pp. 189-258.

[11] G. TALENTI, *Equazioni lineari ellittiche in due variabili*, Le Matematiche, **21** (1966), pp. 339-376.

[12] M. TRANSIRICO - M. TROISI, *Equazioni ellittiche del secondo ordine a coefficienti discontinui e di tipo variazionale in aperti non limitati*, in corso di stampa su Boll. Un. Mat. Ital.

[13] M. TROISI, *Su una classe di spazi di Sobolev con peso*, Rend. Accad. Naz. Scienze, **104** (1986), Vol. X, pp. 177-189.

[14] N. S. TRUDINGER, *Linear elliptic operators with measurable coefficients*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (3) **27** (1973), pp. 265-308.

[15] G. VIOLA, *Sulle equazioni ellittiche del secondo ordine a coefficienti non regolari*, Rend. Mat. - S. VII, (4) **4** (1984), pp. 617-632.