Annulation de la cohomologie pour des fibrés à courbure de signe variable sur une variété kählerienne (*) (**).

VINCENZO ANCONA - BERNARD GAVEAU

Summary. – *We prove a vanishing theorem for the cohomology of an holomorphic vector bundle over a kählerian compact manifold when the curvature form can change its sign. The technique is an adaptation of Malliavin's method in the riemannian case.*

1. – Introduction.

Soient X un variété kählérienne compacte, K_X son fibré canonique, E un fibré holomorphe hermitien sur X. Les théorèmes de Kodaira [3] et Nakano [7] assurent l'annulation des groupes de cohomologie $H^q(X, K_X \otimes E)$ pour $q > 0$, sous la condition de stricte positivité de la courbure de E; GRAUERT et RIEMENSCHNEIDER [2] ont montré que pour l'annulation il suffit que la courbure soit partout non négative, et strictement positive en un point. Les démonstrations de ces théorèmes reposent sur une inégalité, dûe à Bochner, Kodaira et Nakano, concernant les formes harmoniques à valeurs vectorielles.

Dans [4], [5], P. MALLIAVIN a introduit (dans le cas réel riemannien) une nouvelle technique pour démontrer des théorèmes d'annulation: elle consiste, très natu. rellement, à lire les formes différentielles comme fonctions sur un fibré de repères- Cette technique s'adapte très bien aussi au cas complexe (voir GAVEAU-VAUTHIER [1] et VAUTHIER [8]).

Ici nous poussons un peu plus loin les calculs de [1] et [4, 5], et généralisons les théorèmes d'annulation de Kodaira, Nakano et Grauert-Riemenschneider au cas d'un fibré tel que l'ensemble des points de X où la courbure est positive « prévale » sur celui des point où elle est négative en montrant comment la situation générale se réduit au cas considéré par MALLIAVIN dans [4] et [5].

(*) Entrata in Redazione il 30 aprile 1987.

Ce travail a été effectué lors d'une invitation du premier auteur par la SFB 170 « Geometrie und analysis » à Göttingen et lors de séjours du second auteur à l'Université de Florence.

Indirizzo degli AA.: V. ANCONA: Istituto Matematico « U. Dini », Viale Morgagni 67/A, I-50134 Firenze; B. GAVEAU: Départment de Mathématiques, Tour 45-46, 5ème étage, UA 761, Université P. et M. Curie, 4, Place Jussieu, 75252 Paris, France.

2. – Formule de Wietzenböck pour des fibrés de rang quelconque.

Soit X une variété kählérienne compacte connexe de dimension n. En coordonnées locales $z=(z_1, \ldots, z_n)$ notons $(g_{i\bar{j}})$ la matrice de la métrique sur X, et:

$$\begin{aligned} g &= \det(g_{i\bar{j}}), \\ \Gamma^i_{jk} &= g^{\bar{l}i}\partial_j g_{k\bar{l}} && \text{(coefficients de la connexion)}, \\ R_{\bar{i}j} &= \partial_{\bar{i}}\partial_j \log g && \text{(courbure de Ricci)}, \\ R^{\bar{k}}_{\bar{j}} &= g^{\bar{k}l} R_{\bar{j}l}. \end{aligned}$$

Soient en outre E un fibré holomorphe de rang r sur X, $s_1, \ldots, s_r$ des sections holomorphes locales de E formant en chaque point de X un repère de la fibre de E, $a=(a_{\varrho\bar{\sigma}})$ une métrique hermitienne sur E, avec $a_{\varrho\bar{\sigma}} = \langle s_\varrho, s_{\bar{\sigma}}\rangle$; notons:

$$\begin{aligned} \Theta^\mu_{i\nu} &= a^{\bar{\lambda}\mu}\partial_i a_{\nu\bar{\lambda}} && \text{(coefficients de la connexion associée à la métrique } a), \\ \Theta^\mu_{\nu i\bar{j}} &= -\partial_{\bar{j}}\Theta^\mu_{i\nu} && \text{(coefficients de la courbure)}. \end{aligned}$$

(Les indices correspondant aux coordonnées locales de la variété X sont désignés par des lettres latines; les indices correspondant aux coordonnées de la fibre de E dans le repère $(s_1, \ldots, s_r)$ par des lettres grecques.)

Une $(0, q)$-forme φ à valeurs dans E d'écrit localement

$$\varphi = \varphi^\alpha \otimes s_\alpha \tag{1}$$

les φ^α étant des $(0, q)$-formes scalaires:

$$\varphi^\alpha = \varphi^\alpha_{\bar{i}_1 \ldots \bar{i}_q} d\bar{z}^{i_1}\wedge \ldots \wedge d\bar{z}^{i_q} \equiv \varphi^\alpha_{\bar{I}_q}\, d\bar{z}^{\bar{I}_q}$$

où $\bar{I}_q = (\bar{i}_1, \ldots, \bar{i}_q)$ et la somme est faite sur tous les multiindices $\bar{I}_q$ tels que $\bar{i}_1 < \ldots < \bar{i}_q$. On peut aussi écrire

$$\varphi^\alpha = \frac{1}{q!}\varphi^\alpha_{\bar{I}_q}\, dz^{\bar{I}_q} \tag{2}$$

si on convient de sommer sur tous les multiindices $\bar{I}_q$.

Si $\bar{I}_q$ et $\bar{J}_q$ sont deux multiindices, on posera

$$\varepsilon^{\bar{I}_q}_{\bar{J}_q} = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{J}_q \text{ est une permutation paire de } \bar{I}_q, \\ -1 & \text{si } \bar{J}_q \text{ est une permutation impaire de } \bar{I}_q, \\ 0 & \text{sinon}. \end{cases}$$

Si $\square_{(a)}$ est l'opérateur de Laplace-Beltrami associé à la métrique a, agissant sur les $(0, q)$-formes à valeurs dans E, on a la formule de Weitzenböck:

$$(\square_{(a)}\varphi)^{\mu}_{\bar{I}_q} = - g^{\bar{k}s}[\nabla_k \overline{\nabla}_s \varphi^{\mu}_{\bar{I}_q} + \\ + \Theta^{\mu}_{s\nu} \overline{\nabla}_k \varphi^{\nu}_{\bar{I}_q}] - \sum_{k=1}^{q} R^{\bar{l}}_{\bar{i}_k} \varphi^{\mu}_{\bar{i}_1 \ldots, (\bar{l})_k \ldots \bar{i}_q} + \sum_{k=1}^{q} g^{\bar{l}i} \Theta^{\mu}_{\nu \bar{j} i_k} \varphi^{\nu}_{\bar{i}_1 \ldots (\bar{l})_k \ldots \bar{i}_q} \tag{3}$$

où

$$\bar{I}_q = (\bar{i}_1, \ldots, \bar{i}_q), \quad \bar{i}_1 < \ldots < \bar{i}_q$$

où $\bar{i}_1 \ldots (\bar{l})_k \ldots \bar{i}_q$ désigne le multiindice

$$(\bar{i}_k, \ldots, \bar{i}_{k-1}, \bar{l}, \bar{i}_{k+1}, \ldots, \bar{i}_q) .$$

(La démonstration de la formule (3) est esquissée dans l'Appendice).

3. – Relèvement de la formule de Weitzenböck au fibré des repères.

On note $\mathcal{R}(E^*)$ le fibré différentiable des repères complexes de E^*, et $\mathcal{U}(E^*)$ le sous-fibré des repères unitaires de E (par rapport à la métrique a), et on pose:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_E = \mathcal{R}(T_C X) \times_X \mathcal{R}(E^*) ,$$
$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_E = \mathcal{U}(T_C\, X) \times \mathcal{U}(E^*) ,$$

où $\mathcal{R}(T_C X)$ (resp. $\mathcal{U}(T_C X)$) est le fibré des repères complexes (resp. unitaires) par rapport à la métrique kählérienne sur X des $(1, 0)$ vecteurs tangents. Un point de $\mathcal{R}_E$ s'écrit

$$r_{x_0} = (e_1, \ldots, e_n, \varepsilon^{*1} \mathrm{i} \ldots, \varepsilon^{*r}) \tag{4}$$

où $x_0 \in X$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ est un repère de $(1, 0)$ vecteurs tangents en x_0, $(\varepsilon^{*1}, \ldots, \varepsilon^{*r})$ un repère complexe de E^* en x_0.

Suivant [1], [8] on définit des champs de vecteurs horizontaux $\mathcal{L}_{A_k}$, $\mathcal{L}_{\bar{A}_k}$ $(k = 1, \ldots, n)$ sur $\mathcal{R}_E$ de la manière suivante. Si $x_0 \in X$, et $r_{x_0} \in \mathcal{R}_E$ est donné par (4), on pose $e_k = \frac{1}{2}(\tilde{e}_k - i\tilde{e}_{k+n})$ pour les parties réelles et imaginaires. La connexion kählérienne de X et la connexion de E^* associée à la métrique duale de celle de E induisent une connexion sur $\mathcal{R}_E$, i.e. un relèvement horizontal des courbes de façon naturelle. Si $\tilde{e}_k(t)$ est un chemin sur X tangent à $\tilde{e}_k$ $(k = 1, \ldots, 2n)$ issu de x_0, et si $\gamma_k(t)$ est le relèvement horizontal à $\mathcal{R}_E$, et f une fonction complexe C^1 sur $\mathcal{R}_E$ au voisinage de r_{x_0}, on posera

$$\mathcal{L}_{B_k} f(r_{x_0}) = \left.\frac{df(\gamma_k(t))}{dt}\right|_{t=0}$$

te

$$\mathcal{L}_{A_k} = \tfrac{1}{2}(\mathcal{L}_{B_k} - i\mathcal{L}_{B_{k+n}}) , \qquad \mathcal{L}_{\bar{A}_k} = \tfrac{1}{2}(\mathcal{L}_{B_k} + i\mathcal{L}_{B_{k+n}}) , \qquad (k = 1, \ldots, n) .$$

On trouve ([1], Lemme 4):

PROPOSITION 1. – *Soient $z_1, \ldots, z_n$ des coordonnées locales sur X, $s^{*1}, \ldots, s^{*r}$ un repère holomorphe local de E^*, et notons u^i_j les coordonnées verticales de $\mathcal{R}(T_{\boldsymbol{C}}X)$, v^α_β les coordonnées verticales de $\mathcal{R}(E^*)$, i.e. si $r_x = (e_1, \ldots, e_n, \varepsilon^{*1}, \ldots, \varepsilon^{*r})$:*

$$e_i = u^j_i \frac{\partial}{\partial z^j} \, \varepsilon^{*\alpha} = v^\alpha_\beta s^{*\beta} .$$

Alors on a:

$$\mathcal{L}_{A_k} = \mathcal{L}_{e_k} - u^l_j u^r_k \Gamma^i_{lr} \frac{\partial}{\partial u^i_j} + u^r_k v^\gamma_\beta \Theta^\beta_{r\alpha} \frac{\partial}{\partial v^\gamma_\alpha} , \tag{5}$$

$$\mathcal{L}_{\bar{A}_k} = \mathcal{L}_{\bar{e}_k} - \bar{u}^l_j \bar{u}^r_k \bar{\Gamma}^i_{lr} \frac{\partial}{\partial \bar{u}^i_j} + \bar{u}^r_k \bar{v}^\gamma_\beta \bar{\Theta}^\beta_{r\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{v}^\gamma_\alpha} . \tag{5'}$$

Soit $\mathcal{R} = \mathcal{R}(T_{\boldsymbol{C}}X) \times_X \mathcal{R}(E^*)$. A toute $(0, q)$-forme φ à valeurs dans E, nous associons une fonction

$$\mathcal{R}(\varphi) \colon \mathcal{R} \to (\Lambda^q \boldsymbol{C}^n)^r$$

de la façon suivante: si x_0 est dans X et r_{x_0} est un repère de $\mathcal{R}$ donné par (4), $\mathcal{R}(\varphi)(r_{x_0})$ est l'expression de φ dans le repère r_{x_0}; ses composantes sont données par:

$$\mathcal{R}(\varphi)^\alpha_{\bar{i}_1 \ldots \bar{i}_q}(r_{x_0}) = \langle \varphi, \bar{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \bar{e}_{i_q} \otimes \varepsilon^{*\alpha} \rangle .$$

Nous noterons par le même symbole $\mathcal{R}(\varphi)$ sa restriction à

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(T_{\boldsymbol{C}}X) \times_X \mathcal{U}(E^*) .$$

En un point r_{x_0} de $\mathcal{R}$, posons

$$A^{\varrho \bar{i}}_{\sigma \bar{j}}(r_{x_0}) = g^{\bar{i}k} \Theta^\varrho_{\sigma k \bar{j}}$$

ayant exprimé les tenseurs $g^{\bar{i}k}$ et $\Theta^\varrho_{\sigma k \bar{j}}$ dans les repères naturels déterminés par r_{x_0}. On obtient ainsi une matrice carrée $(A^{\varrho \bar{i}}_{\sigma \bar{j}})$ d'ordre $r \cdot n$ formée de fonctions à valeurs complexes définies sur $\mathcal{R}$. Par restriction à $\mathcal{U}$, elle induit un opérateur borné

$$A^{(1)} \colon L^2(\mathcal{U}, (\Lambda^1 \boldsymbol{C}^n)^r) \to L^2(\mathcal{U}, (\Lambda^1 \boldsymbol{C}^n)^r)$$

dont on déduit pour tout q $(0 < q \leqq n)$ un opérateur borné

$$A^{(q)}\colon L^2(\mathcal{U}, (\Lambda^q \boldsymbol{C}^n)^r) \to L^2(\mathcal{U}, (\Lambda^q \boldsymbol{C}^n)^r)$$

par la formule:

$$(A^{(q)}\xi)^{\varrho}_{\bar{j}_1 \dots \bar{j}_q} = \sum_{k=1}^{n} A^{\varrho \bar{i}}_{\sigma \bar{j}_q}\, \xi^{\alpha}_{\bar{j}_1 \dots (\bar{i})_k \dots \bar{j}_q}$$

pour $\xi = (\xi^{\alpha}_{\bar{j}_1 \dots \bar{j}_q})$ de $L^2(\mathcal{U}, (\Lambda^q \boldsymbol{C}^n)^r)$.

De plus, on définit pour tout q, l'opérateur borné

$$R^{(q)}\colon L^2(\mathcal{U}, (\Lambda^q \boldsymbol{C}^n)^r) \to L^2(\mathcal{U}, (\Lambda^q \boldsymbol{C}^n)^r)\,.$$

par:

$$(R^{(q)}\xi)^{\varrho}_{\bar{j}_1 \dots \bar{j}_q} = \sum_{k=1}^{n} R^{\bar{i}}_{\bar{j}_k}\, \xi^{\varrho}_{\bar{j}_1 \dots (\bar{i})_k \dots \bar{j}_q}\quad .$$

PROPOSITION 2. – *Sur* $\mathcal{U} = \mathcal{U}_E$ *on a l'identité*:

$$\mathcal{R}(\square_a \varphi) = - g^{\bar{k}s} \mathfrak{L}_{A_s} \mathfrak{L}_{\bar{A}_k} \mathcal{R}(\varphi) + (A^{(q)} - R^{(q)}) \mathcal{R}(\varphi)\,. \tag{8}$$

Dans la formule, les opérateurs $\mathfrak{L}_{A_s}$, $\mathfrak{L}_{\bar{A}_k}$ opèrent composante par composante; et $g^{\bar{k}s} = \delta^{\bar{k}s}$.

Le reste de ce paragraphe démontre la Proposition 2. Nous allons d'abord calculer les deux membres de l'identité ur $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{X,E}$. Fixons donc un système de coordonnées locales $z = (z^1, \dots, z^n)$ sur X, et un repère local holomorphe $(s^1, \dots, s^r)$ de E au voisinage de $z = 0$. Soit $r_{x_0} = (e_1, \dots, e_n, \varepsilon^{*1}, \dots, \varepsilon^{*r}) \in \mathcal{R}$. Si φ est une $(0, q)$-forme à valeurs dans E, donnée par (1) et (2), on trouve

$$\mathcal{R}(\varphi)^{\alpha}_{\bar{I}_q} = \frac{1}{q!}\, \varepsilon^{\bar{B}_q}_{\bar{J}_q}\, u^{\bar{J}_q}_{\bar{I}_q}\, v^{\alpha}_{\mu}\, \varphi^{\mu}_{\bar{B}_q}\,.$$

Posons:

$$K_1 = \mathfrak{L}_{e_k}\,, \qquad K_2 = - \bar{u}^l_m \bar{u}^r_k \bar{\Gamma}^n_{lr} \frac{\partial}{\partial \bar{u}^n_m}\,, \qquad K_3 = \bar{u}^r_k \bar{v}^{\gamma}_{\beta} \bar{\theta}^{\beta}_{r\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{v}^{\gamma}_{\alpha}}\,,$$

$$H_1 = \mathfrak{L}_{e_s}\,, \qquad H_2 = - u^p_a u^e_s \Gamma^b_{pe} \frac{\partial}{\partial u^b_a}\,, \qquad H_3 = u^p_s v^{\varrho}_{\sigma} \theta^{\sigma}_{p\varepsilon} \frac{\partial}{\partial v^{\varrho}_{\varepsilon}}\,;$$

alors d'après (5), (5′) on a:

$$\mathfrak{L}_{\bar{A}_k} = K_1 + K_2 + K_3\,, \qquad \mathfrak{L}_{A_s} = H_1 + H_2 + H_3$$

d'où

$$\mathfrak{L}_{A_s}\mathfrak{L}_{\bar{A}_{\bar{k}}}\mathcal{R}(\varphi)^{\eta}_{\bar{I}_q} = (H_1 + H_2 + H_3)(K_1 + K_2 + K_3)\,\mathcal{R}(\varphi)^{\eta}_{\bar{I}_q} =$$
$$= (H_1K_1 + H_1K_2 + H_3K_1 + H_3K_2)\,\mathcal{R}(\varphi)^{\eta}_{\bar{I}_q}\,,$$

puisqu'il est clair que $H_2K_1\,\mathcal{R}(\varphi)^{\eta}_{\bar{I}_q} = H_3K_3\,\mathcal{R}(\varphi)^{\eta}_{\bar{I}_q} = 0$.

On trouve:

$$q!K_1\,\mathcal{R}(\varphi)^{\eta}_{\bar{I}_q} = \varepsilon^{\bar{B}_q}_{\bar{J}_q} u^{\bar{J}_q}_{\bar{I}_q} v^{\eta}_{\mu}\,\partial_{\bar{k}}\varphi^{\mu}_{\bar{B}_q}\,,$$

$$q!K_2\,\mathcal{R}(\varphi)^{\eta}_{\bar{I}_q} = -\sum_{h=1}^{q} \varepsilon^{\bar{B}_q}_{\bar{J}_q}\bar{u}^{l}_{i_k}\bar{u}^{r}_{k}\bar{\Gamma}^{j_h}_{lr}\bar{u}^{j_1}_{i_1}\dots\widehat{\bar{u}^{j_h}_{i_h}}\dots\bar{u}^{j_q}_{i_q}\times\varphi^{\mu}_{\bar{I}_q}v^{\eta}_{\mu}\,,$$

$$q!H_1K_1\,\mathcal{R}(\varphi)^{\eta}_{\bar{I}_q} = \varepsilon^{\bar{B}_q}_{\bar{J}_q} u^{\bar{J}_q}_{\bar{I}_q} v^{\eta}_{\mu}\,\partial_s\partial_{\bar{k}}\varphi^{\mu}_{\bar{B}_q}\,,$$

$$q!H_1K_2\,\mathcal{R}(\varphi)^{\eta}_{\bar{I}_q} = -\sum_{h=1}^{q} \varepsilon^{\bar{B}_q}_{\bar{J}_q}\bar{u}^{l}_{i_h}\bar{u}^{r}_{k}\bar{u}^{j_1}_{i_1}\dots\widehat{\bar{u}^{j_h}_{i_k}}\dots\bar{u}^{j_q}_{i_q}\times$$
$$\times\varphi^{\mu}_{\bar{I}_q}v^{\eta}_{\mu}\,\partial_s\bar{\Gamma}^{j_h}_{lr} - \sum_{h=1}^{q}\varepsilon^{\bar{B}_q}_{\bar{J}_q}\bar{u}^{l}_{i_h}\bar{u}^{r}_{k}\bar{\Gamma}^{j_h}_{lr}\bar{u}^{j_1}_{i_1}\dots\widehat{\bar{u}^{j_h}_{i_h}}\dots\bar{u}^{j_q}_{i_q}\times v^{\eta}_{\mu}\,\partial_s\varphi^{\mu}_{\bar{I}_q}\,,$$

$$q!H_3K_1\,\mathcal{R}(\varphi)^{\eta}_{\bar{I}_q} = \left(u^{p}_{s}v^{\varrho}_{\sigma}\theta^{\sigma}_{p\varepsilon}\frac{\partial}{\partial v^{\varrho}_{\varepsilon}}\varepsilon^{\bar{B}_q}_{\bar{J}_q}u^{\bar{J}_q}_{\bar{I}_q}v^{\eta}_{\mu}\,\bar{\partial}_k\varphi^{\mu}_{\bar{B}_q}\right) = \varepsilon^{\bar{B}_q}_{\bar{J}_q}u^{p}_{s}u^{\bar{J}_q}_{\bar{I}_q}v^{\eta}_{\sigma}\theta^{\sigma}_{p\mu}\,\partial_{\bar{k}}\varphi^{\mu}_{\bar{B}_q}\,,$$

$$q!H_3K_2\,\mathcal{R}(\varphi)^{\eta}_{\bar{I}_q} = -\sum_{h=1}^{q}\varepsilon^{\bar{B}_q}_{\bar{J}_q}u^{p}_{s}v^{\eta}_{\sigma}\theta^{\sigma}_{p\mu}\bar{u}^{l}_{i_h}\bar{u}^{r}_{k}\times\bar{\Gamma}^{j_h}_{lr}\bar{u}^{j_1}_{i_1}\dots\widehat{\bar{u}^{j_h}_{i_h}}\dots\bar{u}^{j_q}_{i_q}\varphi^{\mu}_{\bar{I}_q}\,.$$

Puisque l'on veut vérifier une identité entre fonctions définies sur $\mathfrak{U}$, il suffit de le faire point par point, pour n'importe quel système de coordonnées sur $\mathfrak{U}$. Choisissons donc un repère holomorphe (s_α) de E tel que $s^{*\alpha}(0) = \varepsilon^{*\alpha}(0)$, alors $v^{\alpha}_{\beta}(0) = \delta^{\alpha}_{\beta}$; d'autre part sur $\mathfrak{U}$ on a $u^{i}_{j} = \delta^{i}_{j}$, $g_{i\bar{j}} = \delta_{i\bar{j}}$. Donc au point

$$r_{x_0} = \big(e_1(0), \dots, e_n(0), \varepsilon^{*1}(0), \dots, \varepsilon^{*r}(0)\big)$$

on a

$$q!H_1K_1\,\mathcal{R}(\varphi)^{\eta}_{\bar{I}_q} = \varepsilon^{\bar{B}_q}_{\bar{I}_q}\partial_s\partial_{\bar{k}}\varphi^{\eta}_{\bar{B}_q} = q!\,\partial_s\partial_{\bar{k}}\varphi^{\eta}_{\bar{I}_q}\,,$$

$$q!H_1K_2\,\mathcal{R}(\varphi)^{\eta}_{\bar{I}_q} = -q!\sum_{h=1}^{q}\varphi^{\eta}_{\bar{i}_1\dots(l)_h\dots\bar{i}_q}\partial_s\bar{\Gamma}^{l}_{i_h k} - q!\sum_{h=1}^{q}\bar{\Gamma}^{l}_{i_h k}\partial_s\varphi^{\eta}_{\bar{i}_1\dots(l)_h\dots\bar{i}_q}\,,$$

$$q!H_3K_1\,\mathcal{R}(\varphi)^{\eta}_{\bar{I}_q} = q!\,\theta^{\eta}_{s\mu}\partial_{\bar{k}}\varphi^{\eta}_{\bar{I}_q}\,,$$

$$q!H_3K_2\,\mathcal{R}(\varphi)^{\eta}_{\bar{I}_q} = -q!\sum_{h=1}^{q}\bar{\Gamma}^{l}_{i_h k}\theta^{\eta}_{s\mu}\varphi^{\mu}_{\bar{i}_1\dots(l)_h\dots\bar{i}_q}\,.$$

En utilisant la formule (3) il est maintenant facile de vérfier l'identité cherchée au point r_{x_0}.

4. – Théorème d'annulation.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème qui fait l'objet de ce travail.

Pour q, fixé, et x point de X, soit $\delta^{(q)}(x) = \inf_{r_x \in \mathfrak{U}_E} \{\text{valeurs propres de } A^{(q)}(r_x)\}$ et posons

$$\delta^{(q)} = \delta^{(q)+} - \delta^{(q)-} .$$

REMARQUE. – La condition $\delta^{(1)-} \equiv 0$, i.e. $\delta^{(1)} \geqq 0$ signifie que E est semipositif au sens de Nakano [7]; en outre, $\delta^{(1)} \geqq 0$ implique $\delta^{(q)} \geqq 0$ pour tout q, $1 \leqq q \leqq n$. Soit λ_1 la plus petite valeur propre non nulle du Laplacien ordinaire Δ sur X (agissant sur les fonctions).

THÉORÈME. – *On suppose que la métrique sur X soit normalisée i.e.* vol $(X) = 1$, *et soit*

$$\gamma_q = \inf\left(1, \frac{\lambda_1}{4\|\delta^{(q)+}\|_\infty}\right);$$

Si

$$\|\delta^{(q)-}\|_\infty \leqq \max_{0 \leqq t \leqq \gamma_q} \left(t\|\delta^{(q)+}\|_{L^1} - \frac{4t^2}{\lambda_1}\|\delta^{(q)+}\|_\infty^2\right)$$

on a $H^q(X, K_X \otimes E) = 0$.

5. – Dans cette section, nous prouvons le théorème.

Soient $\tilde{E} = K_X \otimes E$, $\tilde{a} = g \otimes a$ (métrique sur $\tilde{E}$), φ une $(0, q)$-forme à valeurs dans $\tilde{E}$. L'identité (8) (Proposition 2) donne alors sur $\mathfrak{U}_{X,\tilde{E}}$:

$$\tilde{\mathfrak{R}}(\Box_{\tilde{a}}\varphi) = -\tilde{\mathfrak{L}}\tilde{\mathfrak{R}}(\varphi) + A^{(q)}\tilde{\mathfrak{R}}(\varphi)$$

avec $\tilde{\mathfrak{L}} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{\mathfrak{L}}_{A_k} \mathfrak{L}_{\bar{A}_k}$, puisque $\tilde{A}^{(q)} = A^{(q)} + R^{(q)}$.

On veut montrer que $\Box_{\tilde{a}}\varphi = 0$ implique $\varphi = 0$. Notons:

H = le sous-espace (fermé) de $L^2(\mathfrak{U}_{X\tilde{E}}, (\Lambda^q \boldsymbol{C}^n)^r)$ des fonctions $\mathfrak{R}(\varphi)$, pour $\varphi (0, q)$-forme L^2 à valeurs dans $\tilde{E}$,

$$H_1 = L^2(\mathfrak{U}_X, \boldsymbol{C}),\ \mathfrak{U}_X = \mathfrak{U}(T_{\boldsymbol{C}}X),$$

$$H_2 = L^2(X, \boldsymbol{C}).$$

Il suffit de montrer que si $f \in H$ et $-\tilde{\mathfrak{L}}f + A^{(q)}f = 0$, alors $f = 0$.

Comme $\tilde{\mathfrak{L}}_{A_k}$ et $\tilde{\mathfrak{L}}_{\bar{A}_k}$ sont adjoints l'un de l'autre, $\tilde{\mathfrak{L}}$ est un opérateur autoadjoint, positif, de H dans lui-même.

Comme $A^{(q)}$ est en tout point $r_{x_0} \in \mathfrak{U}_{X,\tilde{E}}$ une matrice hermitienne, on peut écrire $A^{(q)} = A^{(q)+} - A^{(q)-}$, $A^{(q)+}$ et $A^{(q)-}$ étant deux matrices hermitiennes semi-définies positives; $A^{(q)+}$ et $A^{(q)-}$ définissent des opérateurs bornés de H dans lui-même.

Posons

$$\mu = \inf_H \operatorname{Spec}(-\tilde{\mathfrak{L}} + A^{(q)+}),$$

$$\mu_1 = \inf_{H_1} \operatorname{Spec}(-\tilde{\mathfrak{L}} + \delta^{(q)+}),$$

$$\mu_2 = \inf_{H_2} \operatorname{Spec}(-\Box + \delta^{(q)+}),$$

où $\Box$ est l'opérateur de Laplace-Beltrami scalaire sur X. Alors

LEMME. - *On a* $\mu \geqq \mu_1 = \mu_2$.

L'inégalité $\mu \geqq \mu_1$ est évidente. Si $\pi\colon \mathfrak{U}_X \to X$ est la projection, et $h \in H_2$, alors $h\circ\pi \in H_1$ et $(\Box h)\circ\pi = \tilde{\mathfrak{L}}(h\circ\pi)$, d'où $\mu_1 \geqq \mu_2$. D'autre part, si $g \in H_1$ est une fonction propre de $-\tilde{\mathfrak{L}} + \delta^{(q)+}$, pour toute matrice unitaire $\sigma \in U(n)$, $g(\sigma.)$ est une fonction propre, donc aussi $h = \int_{U(n)} g(\sigma.)\, d\sigma$; mais cette dernière est une fonction sur X, fonction propre pour $-\Box + \delta^{(q)+}$; donc $\mu_1 = \mu_2$.

D'après MALLIAVIN [4], pp. 333-334, l'inégalité de l'hypothèse dans le théorème entraîne $\|\delta^{(q)-}\|_\infty < \mu_2$, donc le lemme donne $\|\delta^{(q)-}\|_\infty < \mu$. De cette dernière inégalité il s'ensuit qu'il n'existe pas de $f \in H$, non nul, avec $-\tilde{\mathfrak{L}}f + A^{(q)}f = 0$.

6. - Appendice. La formule de Weitzenböck.

Faute de référence pour le cas où le rang de E est > 1, nous esquissons ici la preuve de la formule (3); nous suivons [6], où elle est donnée pour le cas où E est de rang 1. Soient $\varphi, \psi \in A^{(0,q)}(E)$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$ un système local de coordonnées au voisinage d'un point de X, et $s_1, \ldots, s_r$ un repère holomorphe de E dans le même voisinage. Alors:

$$(\varphi, \psi)(z) = a_{\lambda\bar{\mu}}(\varphi^\lambda, \psi^\mu)(z)$$

où:

$$\varphi = \varphi^\lambda \otimes s_\lambda, \qquad \varphi^\lambda(z) = \frac{1}{q!}\varphi_{\bar{i}_1\ldots\bar{i}_q}\, d\bar{z}^{i_1}\wedge\ldots\wedge d\bar{z}^{i_q}$$

(et les formules analogues pour ψ^μ; la sommation est sur tous les multiindices)

$$(\varphi^\lambda, \psi^\mu)(z) = \frac{1}{q!} g^{\bar{i}_1 j_1} \ldots g^{\bar{i}_q j_q} \varphi^\lambda_{\bar{i}_1,\ldots,\bar{i}_q} \overline{\psi_{\bar{j}_1,\ldots,\bar{j}_q}} \qquad (\varphi, \psi) = \int_X (\varphi, \psi)(z)\frac{\omega^n}{n!}.$$

L'adjoint du $\bar\partial$ agissant sur les $(0, q)$ formes à valeurs dans E (par rapport à la métrique donnée sur E) est alors donné par

$$(1)\qquad (\bar\partial_a^*\varphi)^\mu = -a^{\bar\lambda\mu} * \partial\big(a_{\nu\bar\lambda}(*\varphi^\nu)\big) = -*\partial*\varphi^\mu - a^{\bar\lambda\mu} * \partial a_{\nu\bar\lambda}\wedge *\varphi^\nu = \\ = \bar\partial^*\varphi^\mu - *(a^{\bar\lambda\mu}\partial_i a_{\nu\bar\lambda}\, dz^i\wedge *\varphi^\nu)$$

où $\bar\partial^*$ est l'adjoint formel du $\bar\partial$ agissant sur les $(0, q)$-formes ordinaires ([6], p. 102), i.e.

$$\bar\partial^*\varphi^\mu = -*\Big(\sum_{i=1}^n \nabla_i\, dz^i\wedge *\varphi^\mu\Big)$$

d'où

$$(2)\qquad (\bar\partial^*\varphi^\mu)_{\bar j_1,\dots,\bar j_{q-1}} = -g^{\bar j i}\nabla_i\varphi^\mu_{\bar j,\bar j_1,\dots,\bar j_q}\,.$$

D'autre part, si l'on note $\nabla^{(a)}$ et $\overline{\nabla}^{-(a)}$ les dérivées covariantes agissantes sur les $(0, q)$-formes à valeurs dans E, on définira

$$\nabla^{(a)}\varphi = (\nabla^{(a)}\varphi)^\mu\otimes s_\mu$$

où

$$(\nabla^{(a)}\varphi)^\mu = \nabla\varphi^\mu + a^{\bar\lambda\mu}\partial_i a_{\nu\bar\lambda}\, dz^i\wedge\varphi^\nu$$

donc

$$(\nabla_i^{(a)}\varphi)^\mu_{\bar j_1\dots\bar j_q} = \nabla_i\varphi^\mu_{\bar j_1\dots\bar j_q} + a^{\bar\lambda\mu}\partial_i a_{\nu\bar\lambda}\varphi^\nu_{\bar j_1\dots\bar j_q}\,.$$

On a l'égalité:

$$(3)\qquad -*(a^{\bar\lambda\mu}\partial_i a_{\nu\bar\lambda}\, dz^i\wedge *\varphi^\nu)_{\bar j_1\dots\bar j_{q-1}} = -g^{\bar j i}a^{\bar\lambda\mu}\partial_i a_{\nu\bar\lambda}\varphi^\nu_{\bar j\bar j_1\dots\bar j_{q-1}}\,.$$

La démonstration est exactement la même de [6], p. 122, une fois qu'on a fixé les indices $\bar\lambda$ et ν.

On déduit de (1), (2), (3):

$$(\bar\partial_a^*\varphi)^\mu_{\bar j\dots\bar j_{q-1}} = -g^{\bar j i}(\nabla_i\varphi^\mu_{\bar j\bar j_1\dots\bar j_q} + a^{\bar\lambda\mu}\partial_i a_{\nu\bar\lambda}\varphi^\mu_{\bar j\bar j_1\dots\bar j_{q-1}})$$

c'est-à-dire:

$$(\partial_a^*\varphi)^\mu = \partial^*\varphi^\mu + \xi^\mu(\varphi)$$

où on a posé

$$\xi^\mu(\varphi)_{\bar j_1\dots\bar j_q} = -\xi_\nu^{\bar j\mu}\varphi^\nu_{\bar j\bar j_1\dots\bar j_q}$$

et

$$(4)\qquad \xi_\nu^{\bar j\mu} = g^{\bar j i}a^{\bar\lambda\mu}\partial_i a_{\nu\bar\lambda}\,.$$

L'opérateur de Laplace-Beltrami associé à la métrique $(a_{\lambda\bar{\mu}})$ est donné par

$$\square_a = \bar{\partial}\bar{\partial}_a^* + \bar{\partial}_a^*\bar{\partial}$$

donc on a:

$$(\square_a \varphi)^\mu = (\bar{\partial}\bar{\partial}_a^* \varphi)^\mu + (\bar{\partial}_a^* \bar{\partial}\varphi)^\mu .$$

D'une part, on a:

$$(\bar{\partial}\bar{\partial}_a \varphi)^\mu = \bar{\partial}[(\bar{\partial}_a^* \varphi)^\mu] = \bar{\partial}\bar{\partial}^* \varphi^\mu + \bar{\partial}\xi^\mu(\varphi)$$

et d'autre part

$$(\bar{\partial}_a^* \bar{\partial}\varphi)^\mu = \bar{\partial}^* \bar{\partial}\varphi^\mu + \xi^\mu(\bar{\partial}\varphi)$$

d'où

$$(\square_a \varphi)^\mu = \square\varphi + \bar{\partial}\xi^\mu(\varphi) + \xi^\mu(\bar{\partial}\varphi) .$$

Par des calculs analogues à [6] (p. 124) on trouve:

$$(\square_a \varphi)^\mu_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_q} = (\square\varphi^\mu)_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_q} - \xi^{\bar{i}\mu}_\nu \overline{\nabla}_i \varphi^\nu_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_q} - \sum_{k=1}^{n} \overline{\nabla}_{i_k} \xi^{\bar{i}\mu}_\nu \varphi^\nu_{\bar{i}_1 \dots (\bar{i})_k \dots \bar{i}_q}$$

d'où, en tenant compte de l'expression pour $(\square\varphi^\mu)_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_q}$ ([6], Théorème 6.1, p. 119), et de (4), et de la définition de la courbure Θ, on trouve:

$$(\square_a \varphi)^\mu_{\bar{I}_q} = - g^{\bar{k}s}(\nabla_s \overline{\nabla}_k \varphi^\mu_{\bar{I}_q} + \theta^\mu_{s\nu} \overline{\nabla}_k \varphi^\nu_{\bar{I}_q}] - \sum_{h=1}^{q} R^{\bar{l}}_{\bar{i}_h} \varphi^\mu_{\bar{i}_1 \dots (\bar{l})_r \dots \bar{i}_q} + \sum_{h=1}^{q} g^{\bar{l}j} \Theta^\mu_{\nu j i_h} \varphi^\nu_{\bar{i}_1 \dots (\bar{l}) \dots \bar{i}_q} .$$

Finalement, d'après les formules:

$$\overline{\nabla}_k \varphi^\mu_{\bar{I}_q} = \partial_{\bar{k}} \varphi^\mu_{\bar{I}_q} - \sum_{h=1}^{q} \bar{\Gamma}^l_{k i_h} \varphi^\mu_{\bar{i}_1 \dots (\bar{l})_\nu \dots \bar{i}_q} ,$$

$$\nabla_s \overline{\nabla}_k \varphi^\mu_{\bar{I}_q} = \partial_s \overline{\nabla}_k \varphi^\mu_{\bar{I}_q} .$$

On a le résultat.

REFERENCES

[1] B. GAVEAU - J. VAUTHIER, *Annulation et calculs infinitésimaux de Laplacien pour un fibré non intégrable*, Bull. Sc. Math., **100** (1976), pp. 353-368.

[2] H. GRAUERT - O. RIEMENSCHNEIDER, *Verschwindungssätze für analytische koomologiegruppen auf komplexen Räumen*, Inv. Math., **11** (1970), pp. 263-292.

[3] K. KODAIRA, *On a differential geometric method in the theory of analytic stacks*, Proc. Nat. Ac. USA, **39** (1953), pp. 1268-1273.

[4] P. MALLIAVIN, *Formule de la moyenne, calcul de perturbation et théorèmes d'annulation pour les formes harmoniques*, J. Funct. Anal., **17** (1974), pp. 274-291.

[5] P. MALLIAVIN, *Annulation de cohomologie et calcul des perturbations dans* L^2, Bull. Sc. Math., **100** (1976), pp. 331-336.

[6] J. MORROW - K. KODAIRA, *Complex manifolds*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1971.

[7] S. NAKANO, *On complex analytic vector bundles*, J. Math. Soc. Japan, **7** (1955), pp. 1-12.

[8] J. VAUTHIER, *Théorèmes d'annulation et de finitude d'espaces de* 1*-formes harmoniques sur une variété de Riemann ouverte*, Bull. Sc. Math., **103** (1979), pp. 129-177.