Sistemi lineari completi su superficie di Enriques (*).

MAURIZIO LETIZIA (Trento)

Sunto. - *Vedi Introduzione.*

La presente ricerca è articolata in 4 sezioni. Nella prima vengono esposti in modo più preciso risultati che si trovano in ENRIQUES [1]. Tra l'altro viene provato che un sistema lineare completo senza parti fisse e con autointersezione positiva su una superficie di Enriques è irriducibile e o non ha punti base o ne ha esattamente due nel qual caso la curva generica del sistema è iperellittica e non singolare. Nella seconda sezione viene provato che se $|D|$ è un sistema lineare completo senza parti fisse o punti base con $D^2 > 0$ su una superficie di Enriques X il morfismo $\varphi_D\colon X \to \boldsymbol{P}^{h^0(D)-1}$ ad esso associato o è birazionale sulla sua immagine o è di grado 2 su una superficie cubica con 4 punti doppi di $\boldsymbol{P}^3$ (cubica di Cayley) o è di grado 4 su $\boldsymbol{P}^2$. Nella terza sezione viene provato che se invece D ha due punti base — pur soddisfacendo le altre ipotesi appena elencate — la mappa razionale φ_D ad esso associata è di grado 2 o su $\boldsymbol{P}^2$ o su una superficie proiettivamente equivalente a una superficie $F_{n,r}$ con $n \leqslant 2$. Vengono inoltre determinate, in quest'ultimo caso, la classe di equivalenza lineare e le singolarità della curva di ramificazione di φ_D. (Il caso in cui l'immagine di φ_D sia $\boldsymbol{P}^2$ è completamente trattato in ENRIQUES [1]).

Infine nella quarta sezione viene calcolata la dimensione dello spazio dei moduli delle superficie birazionalmente equivalenti a superficie di Enriques ottenibili come rivestimenti doppi di superficie F_n.

Le curve e superficie che considereremo saranno tutte definite su $\boldsymbol{C}$. Se X è uno schema proiettivo complesso e $\mathcal{F}$ un o_X-modulo indicheremo con $h^i(\mathcal{F})$ la dimensione di $H^i(X, \mathcal{F})$ come spazio vettoriale su $\boldsymbol{C}$ e porremo $\chi(\mathcal{F}) = \sum_{i\geqslant 0} (-1)^i h^i(\mathcal{F})$; se D è un divisore su X scriveremo anche $h^i(D)$ e $\chi(D)$ in luogo di $h^i(o_X(D))$ e $\chi(o_X(D))$ rispettivamente; $|D|$ sarà l'insieme dei divisori effettivi linearmente equivalenti a D munito, se $|D| \neq \emptyset$, della consueta struttura di spazio proiettivo complesso; $\dim |D| = h^0(D) - 1$ sarà la dimensione di tale spazio; con $\equiv$ denoteremo l'equivalenza lineare tra divisori. Se X è una varietà complessa proiettiva non singolare indicheremo con K_X un suo divisore canonico. Se D è un divisore effettivo su una superficie X il genere aritmetico di D, denotato con $P_a(D)$, sarà l'intero $h^1(o_D)$. Converremo inoltre

---

(*) Entrata in Redazione il 21 dicembre 1979.

di dire che una trasformazione razionale è birazionale o di grado n se lo è sulla sua immagine.

Per superficie di Enriques intenderemo ogni superficie proiettiva irriducibile non singolare X tale che $h^2(o_X) = h^1(o_X) = 0$ e $2K_X \equiv 0$.

Ricordiamo che su una tale superficie l'equivalenza algebrica di divisori coincide con l'equivalenza lineare. In particolare un sistema lineare senza parti fisse su una superficie di Enriques o è irriducibile o è composto con un fascio lineare.

Vorrei ringraziare il prof. A. BEAUVILLE con il quale ho discusso questa ricerca.

1. – In questa sezione X sarà sempre una fissata superficie di Enriques e scriveremo K in luogo di K_X. Sia D un divisore su X; il Riemann-Roch assume la forma:

$$\chi(D) = \frac{D^2}{2} + 1$$

Se $D \geqslant 0$ da $h^2(D) = h^0(K_X - D)$ si ricava $h^2(D) = 0$ e se $D = C$ curva irriducibile dalla successione esatta di cosmologia associata a $0 \to o_X(-C) \to o_X \to o_C \to 0$ si ricava

$$h^1(-C) = h^1(K + C) = 0 \quad \text{e} \quad P_a(C) = \frac{C^2}{2} + 1 .$$

Se $D \geqslant 0$ e D è isolato — ossia $h^0(D) = 1$ — dovrà aversi $D^2 \leqslant 0$ e in particolare se C è una curva irriducibile isolata su X dovrà essere o $C^2 = -2$ e quindi C è una curva razionale non singolare, o $C^2 = 0$ e C è o una curva ellittica non singolare o una curva razionale con un punto doppio. Viceversa se C è una curva irriducibile di X la successione di coomologia associata a $0 \to o_X \to o_X(C) \to o_C(C) \to 0$ mostra che se $C^2 = -2$ C è isolata e $h^1(C) = 1$ mentre se $C^2 = 0$ C è isolata o varia in un fascio a seconda che $h^0(o_C(C))\big(= h^1(o_C(C)) = h^1(C)\big)$ sia 0 o 1 ossia a seconda che $o_C(C)$ non sia o sia il fibrato triviale su C. In entrambi i casi si ha $o_C(C + K) \approx o_C$ dato che $h^0(o_C(C + K)) = h^1(o_C) = 1$ e $(C + K)\cdot C = 0$. Se è $C^2 = 0$ e $h^0(C) = 2$ l'elemento generico di $|C|$ è una curva ellittica non singolare; inoltre la successione di coomologia associata a $0 \to o_X(nC) \to o_X((n + 1)C) \to o_C \to 0$ mostra che $h^0((n + 1)) \leqslant h^0(nC) + 1$ e quindi che $h^0(nC) = n + 1$, $h^1(nC) = n$, $\forall n \geqslant 0$ e che ogni $D \in |nC|$ si scrive $D = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$ con $C_i \in |C|$. Se invece è $C^2 = 0$ e $h^0(C) = 1$ la successione di coomologia associata a $0 \to o_X(C) \to o_X(2C) \to o_C(2C) \to 0$, tenuto conto del fatto che $o_C(2C) \approx o_C(2C + 2K) \approx o_C$, ci dice che $|2C|$ è un fascio ovviamente irriducibile il cui elemento generico è una curva ellittica non singolare.

Sia ancora C irriducibile, $C^2 = 0$, $h^0(C) = 2$; poichè $h^1(K + C) = h^1(-C) = 0$ si ha $h^0(K + C) = 1$. Sia $D \in |K + C|$; poichè $2D \equiv 2K + 2C \equiv 2C$ si può scrivere $2D = C_1 + C_2$ con $C_i \in |C|$ e $C_1 \neq C_2$ (altrimenti $D \in |C|$). Essendo i supporti di C_1 e C_2 disgiunti tra loro (è $C^2 = 0$ e se C_1 e C_2 avessero una componente in comune questa sarebbe una componente fissa di $|C|$) si può scrivere $D = D_1 + D_2$ con $2D_1 = C_1$ e $2D_2 = C_2$; D_1 e D_2 sono connessi al pari di C_1 e C_2.

In particolare $E\cdot C = 2EC_i$ è un numero pari qualunque sia il divisore E di X.

PROPOSIZIONE 1.1. – Sia D un divisore effettivo su X tale che $|D|$ non abbia componenti fisse. Si ha:

a) se $D^2 > 0$ $\quad |D|$ è irriducibile ed è $h^1(D) = 0$,

b) se $D^2 = 0$ $\quad$ esistono un intero $r \geqslant 1$ e un fascio irriducibile $|C|$ tali che $|D| = rC$.

PROVA. – Se $|D|$ non è irriducibile è composto con un fascio (lineare) irriducibile $|C|$; se $|D| = rC$ con $r > 1$ si ha $h^0(D) = r + 1 \geqslant r^2C^2/2 + 1$ il che è possibile solo se $C^2 = 0$, essendo C^2 un numero non negativo pari. Supponiamo che sia $D^2 > 0$ e che $\varepsilon\colon \tilde{X} \to X$ sia il ricoprimento doppio non ramificato di X tale che $\varepsilon^*K \equiv 0$. Se $\tilde{D} = \varepsilon^*D$, $|\tilde{D}|$ non ha parti fisse ed è $\tilde{D}^2 > 0$: come prima se ne deduce che $|\tilde{D}|$ è irriducibile e quindi che $h^1(\tilde{D}) = h^1(-\tilde{D}) = 0$. Il fatto che $H^1(X, o_X(D))$ possa essere identificato al sottospazio di $H^1(\tilde{X} o_{\tilde{X}}(\tilde{D}))$ lasciato fisso dalla trasformazione lineare indotta su di esso dall'automorfismo di X che scambia i fogli del ricoprimento implica che anche $h^1(D) = 0$.

Sia ora D un divisore effettivo e tale che $D^2 > 0$ e sia F la parte fissa di $|D|$ per cui $|D| = |D'| + F$ con $|D'|$ senza parte fissa. Si ha ancora $D'^2 > 0$ a meno che D' sia un fascio irriducibile. In effetti se $D'^2 = 0$ si può scrivere $|D'| = rC$ con $|C|$ fascio irriducibile e dato che $F^2 \leqslant 0$ esisterà una componente irriducibile G di F tale che $C\cdot G > 0$.

Essendo $h^0(D' + C) = h^0(D') = r + 1$, $(rC + G)^2/2 + 1 = rC\cdot G + G^2/2 + 1$ e tenuto conto che CG è un numero pari e che $G^2/2 + 1 = P_a(G) \geqslant 0$ si dovrà avere $r = 1$, $G^2 = -2$ $CG = 2$.

Se G' è un'altra componente di F distinta da G per il Riemann Roch deve essere $2 \geqslant (C + G + G')^2 = 2 + G'^2 + 2CG' + 2GG'$. Se fosse $G'^2 = 0$ s'avrebbe $G'(C + G) = 0$ il che contraddirebbe il teorema dell'indice dunque è $G'^2 = -2$ ed essendo CG' pari è anche $CG' = 0$ ossia G' è una componente di un elemento di C.

Osserviamo che se $|C|$ è un fascio irriducibile con $C^2 = 0$ e G è una curva irriducibile tale che $G^2 = -2$ $C\cdot G = 2$ si ha $|C + G| = |C| + G$. Ciò risulta dalla considerazione della successione di coomologia associata a $0 \to o_X(C) \to o_X(C + G) \to o_G \to 0$ e dal fatto che se $C + G$ fosse irriducibile si avrebbe $h^1(C + G) = 0$. Sia ora D un sistema lineare privo di componenti fisse con $D^2 > 0$ e sia C una curva irriducibile: si ha $|D + C| = |D| + C$ se e solo se $C^2 = -2$ e $CD \leqslant 1$. In effetti la successione di coomologia associata a $0 \to o_X(D) \to o_X(D + C) \to o_C(D + C) \to 0$ mostra che se $C^2 = -2$ si ha $h^0(D) = h^0(D + C)$ se e solo se $CD \leqslant 1$ e che se $C^2 = 0$ è $h^0(D) = h^0(D + C)$ solo se $CD = 0$ ciò che però è impossibile per il teorema dell'indice.

Sia infine $|D|$ un sistema lineare completo senza componenti fisse e con $D^2 > 0$ su $X = X^{(0)}$. Possiamo considerare una successione di scoppiamenti

$$\alpha_1\circ\alpha_2\circ\ldots\circ\alpha_r\colon X = X^{(r)} \to X^{(r-1)} \to \ldots \to X^{(2)} \to X^{(1)} \to X^{(0)} = X$$

tale che, se

$$|D^{(0)}| = |D| \quad \text{e} \quad |D^{(i)}| = \alpha_i^{-1}(|D^{(i-1)}|)\,, \qquad \alpha_{i+1}\colon X^{(i+1)} \to X^{(i)}$$

è lo scoppiamento di un punto P_i che è un punto base di molteplicità $n_i \geqslant 1$ di $|D^{(i)}|$ e tale che $|D^{(r)}| = |\tilde{D}|$ è privo di punti base e quindi ha come elemento generico una curva irriducibile non singolare.

Ricordiamo che se E_{i+1} è la curva di $X^{(i+1)}$ che si contrae a P_i si ha:

$$\alpha_{i+1}^{-1}(|D^{(i)}|) = \{\alpha_{i+1}^{*} S - n_i E_{i+1} | S \in |D^{(i)}|\} = |\alpha_{i+1}^{*} D^{(i)} - n_i E_{i+1}|\,.$$

Abbiamo:

$$\tilde{D}^2 = D^2 - \sum_{i=0}^{r-1} n_i^2 \qquad P_a(\tilde{D}) = P_a(D) - \sum_{i=0}^{r-1} \frac{n_i(n_i-1)}{2}$$

e dalla successione di coomologia associata a $0 \to o_{\tilde{X}} \to o_{\tilde{X}}(\tilde{D}) \to o_{\tilde{D}}(\tilde{D}) \to 0$ dato che $h^1(o_{\tilde{X}}) = h^1(o_X) = 0$ si ricava:

$$h^0(o_{\tilde{D}}(\tilde{D})) = h^0(\tilde{D}) - 1 = h^0(D) - 1 = \frac{D^2}{2}\,.$$

Poichè si ha: $2P_a(\tilde{D}) - 2 = D^2 - \sum_{i=0}^{r-1} n_i(n_i - 1) \geqslant \tilde{D}^2$ il teorema di Clifford è applicabile e da esso segue che

$$\frac{D^2}{2} \leqslant \frac{1}{2}\left(D^2 - \sum_{i=0}^{r-1} n_i^2\right) + 1 \qquad \text{ossia che} \sum_{i=0}^{r-1} n_i^2 \leqslant 2\,.$$

Risulta dunque che la curva generica di $|D|$ è non singolare e che $|D|$ ha al più due punti base eventualmente «infinitamente vicini».

Supponiamo che $|D|$ abbia almeno un punto base P; la serie lineare segata da $|D|$ su un suo membro irriducibile non singolare C è una serie completa (come si vede dalla successione di coomologia associata e $0 \to o_X \to o_X(D) \to o_C(D) \to 0$) di grado $2g-2$ e dimensione $g-2$, se $g = D^2/2 + 1$ è il genere di C, che ha P come punto fisso. Sia $|A|$ tale serie; per il Riemann-Roch su C $|A-P|$ è speciale e possiamo scrivere $K_C - A + P \equiv Q$ con $Q \in C$ e $Q \neq P$ (altrimenti $|A| = |K_C|$). Poichè è $2K_C \equiv 2A$ abbiamo $2P \equiv 2Q$. Dunque C possiede una g_2^1, è cioè iperellittica, e P e Q sono punti doppi di tale g_2^1. Essendo $|K_C| = |(2g-2)Q|$ possiamo scrivere

$$|A - P| = |K_C - Q| = |(g-2)\,2Q + Q| = (g-2)\,2Q + Q\,.$$

Dunque Q è un'altro punto fisso di A — e quindi di $|D|$ — e $|A - P - Q|$ è composta dalla g_2^1 di C.

Abbiamo così dimostrato la seguente

PROPOSIZIONE 1.2. – Sia $|D|$ senza parti fisse e con $D^2 > 0$; o $|D|$ non ha punti base o ne ha esattamente 2 nel qual caso il suo elemento generico è una curva non singolare iperellittica, i punti base sono punti doppi della g_2^1 appartenente a tale curva e la serie lineare completa segata da D sulla curva, tolti i punti fissi, è composta dalla g_2^1.

2. – In questa sezione proveremo la seguente

PROPOSIZIONE 2. – Sia X una superficie di Enriques e sia $|D|$ un sistema lineare completo su X privo di parti fisse e di punti base e con $D^2 > 0$. Sia $\varphi_D\colon X \to \boldsymbol{P}^{D^2/2}$ il morfismo associato a $|D|$. Si ha che o φ_D è birazionale o $D^2 = 6$ e φ_D è un morfismo di grado 2 la cui immagine è la cubica di Cayley — una cubica di $\boldsymbol{P}^3$ con 4 punti doppi — o $D^2 = 4$ e φ_D è un morfismo di grado 4 la cui immagine è $\boldsymbol{P}^2$.

PROVA. – Sia $F = \varphi_D(X)$. Dovendo essere $\deg F \cdot \deg \varphi_D = D^2$ e $\deg F \geqslant \operatorname{codim} F + 1 = D^2/2 - 1$ a priori sono possibili soltanto i seguenti 4 casi: *a*) φ_D è birazionale *b*) $\deg \varphi_D = 2$ e $\deg F = D^2/2$ *c*) $\deg \varphi_D = 3$, $D^2 = 6$, $\deg F = 2$ *d*) $\deg \varphi_D = 4$ $D^2 = 4$ $F = \boldsymbol{P}^2$. Sia C un elemento irriducibile non singolare di $|D|$ e sia $\Gamma = \varphi_D(C)$. Se $\deg \varphi_D \geqslant 2$ Γ è una curva di un $\boldsymbol{P}^{D^2/2-1}$ di grado $\leqslant D^2/2$ che non giace in alcun $\boldsymbol{P}^{D^2/2-1}$ per cui è o una curva ellittica non singolare o una curva razionale.

La serie lineare segata da $|D|$ su C è completa e senza punti fissi: denotiamola con $|A|$. Se $g = P_a(C) = D^2/2 + 1$ è $\deg A = 2g - 2$ e $\dim |A| = g - 2$. Ora se $\deg \varphi_D = 2$ e Γ fosse razionale C sarebbe iperellittica e $|A|$ sarebbe composta con la g_2^1 di C il che è impossibile visto che $|A|$ non ha punti fissi e $\dim |A| = g - 2$.

Se invece fosse $\deg \varphi_D = 3$ $\big($e quindi $D^2 = 6$ e $P_a(C) = 4\big)$ Γ sarebbe una conica piana e potremmo scrivere $|A| = |2A'|$ con $|A'|$ una g_3^1 senza punti fissi. Per il Riemann-Roch si potrebbe anche scrivere $K_C \equiv A' + A''$ con $|A''|$ una g_3^1 diversa da $|A'|$ — dato che $|K_C| \neq |A|$ —.

Da $2K_C \equiv 2A \equiv 4A' \equiv 2A' + 2A''$ ricaveremmo $2A' \equiv 2A'' \equiv A$ e quindi $A' \equiv A''$.

Abbiamo così mostrato che il caso *c*) non si verifica e che nel caso *b*) la sezione iperpiana generica di F è una curva ellittica non singolare.

Supponiamo che sia $\deg \varphi_D = 2$. La trasformazione birazionale $\sigma\colon X \dashrightarrow X$ distinta dall'identità che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, dashed, "\sigma"] \arrow[dr, "\varphi_D"'] & & X \arrow[dl, "\varphi_D"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

essendo X non rigata e minimale è un automorfismo.

Sia $\pi: X \to X/\sigma$ il quoziente di X per l'azione di $\{\sigma, 1\}$; X/σ è una superficie normale la cui singolarità sono punti doppi ordinari immagini, tramite π, dei punti fissi isolati dall'azione di $\{\sigma, 1\}$ su X. Siano $P_1 \dots P_r$ tali punti e sia $\alpha: \tilde{X} \to X$ la superficie ottenuta da X scoppiando $P_1 \dots P_r$. Se $\tilde{\sigma}: \tilde{X} \to \tilde{X}$ è l'automorfismo di $\tilde{X}$ indotto da σ e $\tilde{\pi}: \tilde{X} \to \tilde{X}/\tilde{\sigma} = \tilde{S}$ il quoziente di $\tilde{X}$ per l'azione di $\{\tilde{\sigma}, 1\}$, $\tilde{S}$ è non singolare. Siano $E_1 \dots E_r$ le curve di X che si contraggono a $P_1 \dots P_r$ rispettivamente; poniamo $C_i = \tilde{\pi}_*(E_i)$ cosicchè $\tilde{\pi}^*(C_i) = 2E_i$. Dato che $E_i^2 = -1$ si ha $C_i^2 = -2$ e dato che le C_i sono razionali non singolari è $C_i K_{\tilde{S}} = 0$. Sia Δ la curva luogo di ramificazione di $\tilde{\pi}$ e sia δ il divisore di $\tilde{S}$ canonicamente associato al rivestimento doppio $\tilde{\pi}: \tilde{X} \to \tilde{S}$ tale che $\Delta \in |2\delta|$.

Abbiamo:

$$K_{\tilde{X}} \equiv \tilde{\pi}^*(K_{\tilde{S}} + \delta) \equiv \alpha^* K_X + \sum_{i=1}^{r} E_i$$

da cui si ricava

$$2\tilde{\pi}^*(K_{\tilde{S}} + \delta) \equiv 2 \sum_{i=1}^{r} E_i \equiv \tilde{\pi}^*\Big(\sum_{i=1} C_i \Big)$$

Poichè $\tilde{\pi}^*: \tilde{X} \to \tilde{S}$ è un rivestimento doppio ramificato $\tilde{\pi}^*: \operatorname{Pic} \tilde{S} \to \operatorname{Pic} \tilde{X}$ è iniettivo e si ha: $2(K_{\tilde{S}} + \delta) \equiv \sum_{i=1}^{r} C_i$

Da

$$\chi(o_{\tilde{X}}) = 1 = 2\chi(o_{\tilde{S}}) + \frac{1}{2}\delta(\delta + K_{\tilde{S}}) = 2 + \frac{1}{8}\Big(\sum_{i=1}^{r} C_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{r} C_i - 2K_{\tilde{S}}\Big) = 2 - \frac{r}{4}$$

ricaviamo infine $r = 4$.

Poniamo $D^2/2 = d$. F, essendo una superficie di grado d in $\boldsymbol{P}^d$ che non giace in alcun $\boldsymbol{P}^{d-1}$, è a priori, come noto (NAGATA [1]), proiettivamente equivalente a uno dei seguenti tipi di superficie:

1) proiezioni di $\boldsymbol{P}^d$ di superficie di grado d in $\boldsymbol{P}^{d+1}$ non giacenti in alcun $\boldsymbol{P}^d$ da un punto esterno ad esse,

2) immagini birazionali di $\boldsymbol{P}^2$ tramite un sistema lineare di cubiche, genericamente non singolari, con al più 6 punti base,

3) trasformate di Veronese in $\boldsymbol{P}^8$ in quadriche anche singolari in $\boldsymbol{P}^3$,

4) coni su curve ellittiche non singolari.

F non può essere di tipo 4) dato che non esistono morfismi suriettivi di X su superficie irregolari nè di tipo 1) dato che le sezioni iperpiane di superficie di questo tipo sono curve razionali. Abbiamo appena visto che X/σ ha esattamente 4 punti doppi ordinari: ciò implica che F ha almeno 4 punti singolari ed esclude che F possa essere di tipo 3).

Possiamo perciò supporre che F sia di tipo 2). Sia L il sistema lineare di cubiche piane tale che, se φ_L è la trasformazione razionale di $\boldsymbol{P}^2$ ad esso associato, sia $\varphi_L(\boldsymbol{P}^2) = F$. Sia $\alpha\colon Z \to \boldsymbol{P}^2$ ottenuta scoppiando i punti fissi di L (anche quelli «infinitamente vicini», come nella prova della Proposizione 1.2) per modo che $\alpha^{-1}L$ sia senza punti fissi e si abbia un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, "\varphi\alpha^{-1}L"] & \\ \boldsymbol{P}^2 \arrow[r, dashed, "\varphi_L"'] & F \end{tikzcd}$$

Poichè F ha almeno 4 punti singolari esistono 4 curve irriducibili $C_1 C_2 C_3$ e C_4 di Z tali che $C_i^2 \leqslant -2$ e che vengono contratte a un punto da $\varphi_{\alpha^{-1}L}$. $\alpha(C_i)$, dovendo essere una componente fissa degli elementi di un iperpiano di L, è o una retta o una conica non singolare. Se $\alpha(C_i)$ fosse una conica non singolare, per essere $C_i^2 \leqslant -2$, L dovrebbe avere 6 punti base (contando anche quelli «infinitamente vicini») e $\alpha(C_i)$ dovrebbe passare per essi. È facile convincersi che in tal caso si avrebbe $C_j^2 \geqslant -1$ $\forall j \neq i$. Dunque $\alpha(C_i)$ è una retta $\forall i$ e passa per 3 punti base del fascio (a priori anche «infinitamente vicini»). Ciò implica evidentemente che L ha 6 punti base distinti che sono i vertici di un quadrilatero completo.

La prova della proposizione 2 è così terminata.

Vogliamo ora mostrare, usando una costruzione dovuta a A. BEAUVILLE, che esistono superfici di Enriques X muniti di un sistema lineare completo $|D|$ senza componenti fisse o punti base tale che $\varphi_D(X)$ sia la cubica di Cayley.

Siano $F \subseteq \boldsymbol{P}^3$, $\alpha\colon Z \to \boldsymbol{P}^2$ e C_i $(i = 1, \ldots, 4)$ come sopra con L sistema lineare di tutte le cubiche passanti per i vertici di un quadrilatero completo. Sia H una sezione iperpiana di F: si ha $K_Z \equiv -\varphi^*_{\alpha^{-1}L}(H)$. Sia Q una sezione di F con una quadrica di $\boldsymbol{P}^3$ tale che $\varphi^*_{\alpha^{-1}L}(Q)$ sia irriducibile e non singolare e sia $\tilde{\varrho}\colon \tilde{X} \to Z$ il rivestimento doppio di Z ramificato lungo $\Delta = \varphi^*_{\alpha^{-1}L}(Q) + \sum_{i=1}^{4} C_i$ (si noti che se $E_1 \ldots E_6$ sono le curve eccezionali di Z e l è una retta di $\boldsymbol{P}^2$ si ha $\sum_{i=1}^{4} C_i \equiv 2\left(\alpha^*(2l) - \sum_{i=1}^{6} E_i\right)$ per cui $\Delta \in |2\delta|$ con $\delta \equiv \varphi^*_{\alpha^{-1}L}(H) + \left(\alpha^*(2l) - \sum_{i=1}^{6} E_i\right)$.

Essendo $\varphi^*_{\alpha^{-1}L}(Q) \cdot C_i = Q \cdot \varphi_{\alpha^{-1}L*}(C_i) = 0$, Δ è non singolare per cui anche $\tilde{X}$ lo è e si ha:

$$\chi(o_{\tilde{X}}) = 2\chi(o_Z) + \tfrac{1}{2}\delta(\delta + Z_Z) = 2 + \tfrac{1}{8}\Delta(\Delta + 2K_Z) = 1$$

$$2K_{\tilde{X}} \equiv \tilde{\varrho}^*(2K_Z + \Delta) \equiv \tilde{\varrho}^*\left(\sum_{i=1}^{4} C_i\right).$$

Essendo le C_i componenti del luogo di ramificazione si può scrivere $\tilde{\varrho}^* C_i = 2G$ ed è $G_i^2 = -1$. Sia $\varepsilon\colon \tilde{X} \to X$ la superficie ottenuta da $\tilde{X}$ contraendo $G_1 \ldots G_4$:

Poichè $2K_{\tilde{X}} \equiv \varepsilon^*(2K_X) + \sum_{i=1}^{4} 2G_i \equiv \tilde{\varrho}\left(\sum_{i=1}^{4} C_i\right) \equiv \sum_{i=1}^{4} 2G_i$ ne segue $2K_X \equiv 0$. X è perciò una superficie di Enriques e $\tilde{\varrho}$ induce un morfismo di grado 2 $\varrho\colon X \to F$. Sia $D \equiv \varrho^*(H)$; è $D^2 = 6$, $h^0(D) = 4$ per cui $\varrho = \varphi_D$.

3. – Sia D un sistema lineare completo su una superficie di Enriques X privo di componenti fisse, con $D^2 > 0$ e con due punti base P_1 e P_2. Sia $\varepsilon\colon \hat{X} \to X$ lo scoppiamento di P_1 e P_2 e siano E_1 ed E_2 le curve eccezionali di X che si contraggono a P_1 e P_2 rispettivamente; se $\hat{D} \equiv \varepsilon^* D - E_1 - E_2$ $|\hat{D}|$ non ha punti base, è $\hat{D}^2 = D^2 - 2$, $DE_i = 1$ e si ha un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
\hat{X} \arrow[d, "\varepsilon"'] \arrow[dr, "\varphi_{\hat{D}}"] & \\
X \arrow[r, dashed, "\varphi_D"'] & \boldsymbol{P}^{D^2/2}
\end{tikzcd}$$

Sappiamo che ogni curva irriducibile non singolare C di $|D|$ è iperellittica e che la trasformazione razionale φ_D ristretta a C è data da una serie lineare composta con la g_2^1 di C. φ_D e $\varphi_{\hat{D}}$ hanno pertanto grado 2 e $F = \varphi_{\hat{D}}(\hat{X})$ è una superficie di grado $D^2/2 - 1$ in $\boldsymbol{P}^{D^2/2}$. Scriveremo d'ora in poi φ in luogo di $\varphi_{\hat{D}}$ e porremo $D^2/2 = d$. Assumeremo $d \geqslant 3$. (Il caso $d = 2$ come ben noto è trattato in Enriques [1]). Poichè P_1 e P_2 sono punti doppi della g_2^1 appartenente all'elemento generico C di $|D|$ φ è ramificato lungo E_1 ed E_2. Inoltre se H è una sezione iperpiana di F si ha $\varphi_*(E_i)\cdot H = E_i \cdot \varphi^*(H) = E_i \hat{D} = 1$ per cui $\varphi_*(E_i)$ è una retta di $\boldsymbol{P}^d$. È noto che una superficie di grado $d - 1$ in $\boldsymbol{P}^d$ che non giace in alcun $\boldsymbol{P}^{d-1}$ è proiettivamente equivalente a una superficie $F_{n,r}$ con $n + 2r + 1 = d$ o alla superficie di Veronese $V_4 \subseteq \boldsymbol{P}^5$.

Poichè la superficie di Veronese non contiene rette F deve essere proiettivamente equivalente a una superficie $F_{n,r}$. Ricordiamo che la superficie F_n $(n \geqslant 0)$ è il fibrato con base $\boldsymbol{P}^1$ e fibra $\boldsymbol{P}^1$ ottenuto incollando i due fibrati banali $\boldsymbol{P}^1 - \{\infty\} \times \boldsymbol{P}^1 \to \boldsymbol{P}^1 - \{\infty\}$, $\boldsymbol{P}^1 - \{0\} \times \boldsymbol{P}^1 \to \boldsymbol{P}^1 - \{0\}$ tramite $(t; X_0 \colon X_1) \mapsto (1/t; t^n X_0 \colon X_1)$. Sia B l'immagine della sezione $t \mapsto (t; 0\colon 1)$ $\infty \mapsto (\infty; 0 \colon 1)$ e A una qualsiasi fibra. Pic F_n è il gruppo abeliano libero generato dalle classi di A e B e si ha $A^2 = 0$, $AB = 1$, $B^2 = -n$, $K_{F_n} \equiv -(n+2)A - 2B$.

Le superfici $F_{n,r} \subseteq \boldsymbol{P}^{n+2r+1}$ $\big(n, r \geqslant 0, (n, r) \neq (0\ 0)\big)$ sono, per definizione, le immagini di F_n per i morfismi $\varphi_{n,r}$ associati ai sistemi lineari $|(n + r)A + B|$; tali sistemi lineari sono privi di componenti fisse e punti base e sono irriducibili $\forall r \geqslant 0$, inoltre se $r > 0$ $\varphi_{n,r}$ è un isomorfismo mentre $F_{n,0}$ è un cono con vertice $\varphi_{n,0}(B) = V$ e $\varphi_{n,0}$ induce un isomorfismo tra $F_n - B$ e $F_{n,0} - V$ che porta il sistema lineare $|A|$ nelle generatrici di $F_{n,0}$.

È facile verificare che le uniche rette contenute in una $F_{n,r}$ sono le immagini tramite $\varphi_{n,r}$ degli elementi del sistema $|A|$ eccettuato il caso in cui $r = 1$ nel qual caso anche le immagini del sistema $|B|$ sono rette.

Torniamo ora a considerare il morfismo φ: vogliamo mostrare che se F è proiettivamente equivalente a una $F_{n,0}$ esiste una curva C di X tale che il sistema $|D+C|$ è senza parti fisse, ha ancora P_1 e P_2 come punti base e dà luogo a un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} \hat{X} \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[dr, "\varphi"'] & F_{n,1} \subseteq \mathbf{P}^{d+2} \arrow[d] \\ & F_{n,0} \subseteq \mathbf{P}^{d} \end{tikzcd}$$

φ' essendo il morfismo associato al sistema lineare $|\varepsilon^*(D+C)-E_1-E_2|$.

Il sistema algebrico $\{\varphi^*(G)\}$, al variare di G tra le generatrici di $F_{n,0}$, è un sistema lineare, dato che $\hat{X}$ è regolare, la cui parte variabile è irriducibile dato che altrimenti sarebbe composta con un fascio di curve razionali e $\hat{X}$ sarebbe razionale. Sia $\hat{C}$ un elemento irriducibile di tale parte variabile e sia H una sezione iperpiana di $F_{n,0}$ attraverso il suo vertice V. Considerando H come divisore di Weil ($F_{n,0}$ è normale) possiamo scrivere $H = G_1 + \ldots + G_{d-1}$, G_i essendo una generatrice, e quindi $\varphi^*(H) \equiv (d-1)\hat{C} + \sum n_i F_i$ con $n_i \geqslant 0$ e $\varphi(F_i) = V$. Gli n_i non possono essere tutti nulli dato che altrimenti si avrebbe $1 = \hat{D}\cdot E_i = \varphi^*(H)\cdot E_i = (d-1)\hat{C}\cdot E_i$.

Se H' è una sezione iperpiana di $F_{n,0}$ che non passa per il vertice possiamo scrivere $\hat{D}\cdot\hat{C} = H'\cdot\varphi_*(\hat{C}) = H'\cdot 2G = 2 = (d-1)\hat{C}^2 + \sum n_i F_i\cdot\hat{C}$.

Dato che $d \geqslant 3$ e dato che $(d-1)\hat{C} + \sum n_i F_i$ è connesso deve essere $\hat{C}^2 = 0$; è inoltre $\hat{C}\cdot E_i = 0$ dato che si può scrivere $\hat{C} \equiv E_i + M_i$ con $M_i \geqslant 0$.

Esiste dunque una curva irriducibile C che non passa nè per P_1 nè per P_2 tale che $\varepsilon^* C = \hat{C}$ e che $C^2 = 0$, $CD = 2$; per costruzione C non è isolata e quindi $|C|$ è un fascio. Il sistema lineare $|D'| = |D+C|$ è evidentemente privo di parti fisse: si ha $D'^2 = D^2 + 4$, $h^0(D') = d+3$.

Consideriamo la serie lineare segata da D' su un elemento irriducibile non singolare $\Gamma \in |D|$. La successione di coomologia associata a $0 \to o_X(C) \to o_X(D') \to o_\Gamma(D') \to 0$ mostra che tale serie ha dimensione d; d'altra parte la serie segata da $|D|$ su Γ ha dimensione $d-1$ e la serie segata da C su Γ è una g_2^1 come si vede dalla successione di coomologia associata a $0 \to o_X(C-D) \to o_X(C) \to o_\Gamma(C) \to 0$ (non può essere $C - D \equiv L$ con $L \geqslant 0$ poichè altrimenti sarebbe $D(C-D) = 2 - 2d \geqslant 0$). In definitiva ogni elemento della serie segata da $|D'|$ su Γ si può scrivere come somma di un elemento della serie segata da $|D|$ su e di uno della serie segata da $|C|$ su Γ. In particolare la serie segata da $|D'|$ su Γ ha P_1 e P_2 come punti fissi il che equivale a dire che P_1 e P_2 sono punti base di $|D'|$. Sia $|\hat{D}'| = |\varepsilon^* D' - E_1 - E_2|$ e φ' il morfismo ad esso associato. L'immagine di φ' è a priori una superficie $F_{m,r}$ con $m + 2r + 1 = d + 2$. Osserviamo che $|\hat{D}' - (d+1)\hat{C}| = \left|\sum n_i F_i - \hat{C}\right| = \emptyset$ dato che $\hat{D}(\sum n_i F_i) = 0$ e $\hat{D}\hat{C} = 2$, mentre $|\hat{D}' - d\hat{C}| = \left|\sum n_i F_i\right| \neq \emptyset$. Ciò equivale a dire che esistono sezioni iperpiane di $F_{m,r}$ che contengono d elementi di $\varphi_{m,r*}(|A|)$ mentre non ne esistono che ne contengono $d+1$. Per note proprietà delle superficie $F_{m,r}$ deve essere $m + r = d$ e quindi $r = 1$.

Osserviamo che la costruzione di $|D'|$ a partire da $|D|$ può essere fatta, in modo identico, nel caso in cui F sia proiettivamente equivalente a una qualsiasi $F_{n,r}$ Supporremmo da ora in poi che l'immagine F di φ sia proiettivamente equivalente a una $F_{n,r}$ con $r \geqslant 1$ e scriveremo A e B in luogo di $\varphi_{n,r}(A)$ e $\varphi_{n,r}(B)$. Facciamo ora vedere che si ha $\varphi^*(E_i) \in |A|$— salvo scambiare nel caso $n = 0$, $r = 1$ i ruoli d'altronde simmetrici di A e B.

In effetti $\varphi^*(A)(\varphi^*(A) + K_{\tilde{X}}) = \varphi^*(A)\ (E_i + E_2) = A(\varphi_*(E_1) + \varphi_*(E_2))$ deve essere un numero pari per cui o $\varphi_*(E_i) \in |A|$ $(i = 1, 2)$ o $\varphi_*(E_i) \in |B|$ $(i = 1, 2)$ e $r = 1$ (ricordiamo che $\varphi_*(E_i)$ è una retta di $\boldsymbol{P}^d$). Se $n > 0$ B è isolata ed essendo φ di grado 2 e ramificato lungo E_1 ed E_2 non è possibile avere $\varphi_*(E_1) = \varphi_*(E_2) = B$.

Sia C la curva di F luogo della ramificazione di φ e sia $C \equiv aA + bB$; vogliamo determinare a e b. Sia $H \equiv (n + r)A + B$ una sezione iperpiana irriducibile e non singolare di F tale che φ^*H sia irriducibile e non singolare e sia A tale che φ^*A sia irriducibile e non singolare. È $2P_a(A) - 2 = P_a(H) - 2 = -2$ e $2P_a(\varphi^*(A)) - 2 = \varphi^*(A)\ (\varphi^*(A) + K_{\tilde{X}}) = 0$ $2P_a(\varphi^*H) - 2 = \varphi^*(H)\ (\varphi^*(H) + K_{\tilde{X}}) = 2 + 2n + 4r$.

La formula di Hurwitz applicata alle restrizioni di φ a φ^*A e φ^*H rispettivamente da: $C \cdot A = b = 4$, $C \cdot H = a + br = 6 + 2n + 4r$. Abbiamo perciò $C \in |(2n + 6)A + 4B| = |-2K_{F_{n,r}} + 2A|$.

Allo scopo di studiare le singolarità di C considereremo la situazione seguente: $S^{(0)} = S$ è una superficie proiettiva non singolare, $\pi^{(h)}: S^{(h)} \to S^{(h-1)}$ per $h \geqslant 1$ è lo scoppiamento dei punti $P_{J_1 \dots J_h}$ di $S^{(h-1)}$ (ometteremo di precisare la variabilità degli indici: s'intende che essi variano compatibilmente con le assunzioni fatte), $E_{J_1 \dots J_h}$ è la curva eccezionale di $S^{(h)}$ che si contrae a $P_{J_1 \dots J_h}$. $E_{J_1 \dots J_h}$ indicherà anche la trasformata propria di $E_{J_1 \dots J_h}$ in ognuna delle $S^{(k)}$ con $k \geqslant h$ e porremo $\pi = \pi^{(1)} \circ \pi^{(2)} \dots \circ \pi^{(h)}$ qualunque sia h confidando che tali ambiguità non generino confusione.

Supporremo che sia $P_{J_1 \dots J_h} \in E_{J_1 \dots J_{h-1}}$ e, per $1 \leqslant h \leqslant k - 1$, l'intero $\varepsilon^{J_1 \dots J_h}_{J_1 \dots J_h \dots J_k}$ sarà definito così: $\varepsilon^{J_1 \dots J_k}_{J_1 \dots J_h} = 0$ se $P_{J_1 \dots J_h} \notin E_{J_1 \dots J_h}$, $\varepsilon^{J_1 \dots J_k}_{J_1 \dots J_h} = 1$ se $P_{J_1 \dots J_k} \in E_{J_1 \dots J_h}$ (per ipotesi è $\varepsilon^{J_1 \dots J_{k-1}}_{J_1 \dots J_k} = 1$ ed è $\varepsilon^{J_1 \dots J_k}_{J_1 \dots J_h} = 1$ al più per un solo valore di $h \neq k - 1$).

Abbiamo

$$K_{S^{(k)}} = \pi^*(K_S) + \sum_{E_1} c_{O_1} E_{J_1} + \sum_{J_1 J_2} c_{J_1 J_1} E_{J_1 J_2} \dots + \sum_{J_1 \dots J_k} c_{J_1 \dots J_k} E_{J_1 \dots J_k}$$

con i $c_{J_1 \dots J_h}$ determinati ricorsivamente da:

$$c_{J_1} = 1 \quad \forall J_1, \qquad c_{J_1 \dots J_h} = 1 + c_{J_1} \varepsilon^{J_1}_{J_1 \dots J_h} + c_{J_1 J_2} \varepsilon^{J_1 J_2}_{J_1 \dots J_k} + \dots + c_{J_1 \dots J_{h-1}} \varepsilon^{J_1 \dots J_{h-1}}_{J_1 \dots J_h}.$$

Sia D un divisore effettivo di S e sia $n_{J_1 \dots J_h}$ la molteplicità di $P_{J_1 \dots J_h}$ per la trasformata propria di D in $S^{(h)}$. Se $D^{(h)} = \pi^{-1} D$ è tale trasformata si ha:

$$D^{(k)} = \pi^*(D) - \sum_{J_1} d_{J_1} E_{J_1} - \sum_{J_1 J_2} d_{J_1 J_2} E_{J_1 J_2} \dots - \sum_{J_1 \dots J_k} d_{J_1 \dots J_k} E_{J_1 \dots J_k}$$

con i $d_{J_1 \dots J_h}$ determinati ricorsivamente da:

$$d_{J_1} = n_{J_1} \quad \forall J_1 , \qquad d_{J_1 \dots J_h} = n_{J_1 \dots J_h} + d_{J_1} \varepsilon^{J_1}_{J_1 \dots J_h} + d_{J_1 J_2} \varepsilon^{J_1 J_2}_{J_1 J_2 \dots J_h} + \dots$$
$$\dots + d_{J_1 \dots J_{h-1}} \varepsilon^{J_1 \dots J_{h-1}}_{J_1 \dots J_h} .$$

Sia D privo di componenti multiple: è possibile trovare una successione $\tilde{S} = S^{(k)} \to \to S^{(k-1)} \to \dots \to S^{(1)} \to S^{(0)}$ tale che, se $\delta_{J_1 \dots J_h}$ $(1 \leqslant h \leqslant k)$ è un intero che vale 0 o 1 determinato dalla condizione che $d_{J_1 \dots J_h} - \delta_{J_1 \dots J_h}$ sia un numero pari, la curva:

$$\tilde{D} = D^{(k)} + \sum_{J_1} \delta_{J_1} E_{J_1} + \sum_{J_1 J_2} \delta_{J_1 J_2} E_{J_1 J_2} \dots + \sum_{J_1 \dots J_k} \delta_{J_1 \dots J_k} E_{J_1 \dots J_k}$$

sia non singolare.

Ciò è pressochè evidente se si considera che effettuando opportuni scoppiamenti si può successivamente fare sì che la trasformata propria di D sia non singolare, che tutte le curve $E_{J_1 \dots J_h}$ intersechino al più in un solo punto e in tal caso trasversalmente tale trasformata propria, che se due curve distinte $E_{J_1 \dots J_h}$, $E_{J'_1 \dots J'_a}$ intersecano ambedue tale trasformata propria siano disgiunte: è ora chiaro che a partire dalla situazione descritta si possa pervenire a quella desiderata.

Osserviamo che se $f\colon Y \to S$ è un morfismo di grado 2, D il divisore della ramificazione di f e $\tilde{S}$, $\tilde{D}$ sono come precisato, il rivestimento doppio $\tilde{f}\colon \tilde{Y} \to \tilde{S}$ che ha $\tilde{D}$ come divisore della ramificazione è ovviamente birazionalmente equivalente a Y. Tornando a considerare il morfismo $\varphi\colon \hat{X} \to F_{n,r}$ supporremo, con riferimento a quanto sopra, che $S = F_{n,r}$ e che $D = C$ sia un elemento privo di componenti multiple di $|-2K_{F_{n,r}} + 2A| = |2\delta|$ per cui $\tilde{C} = \tilde{D} \in |2\tilde{\delta}|$ con

$$\tilde{\delta} = \pi^*(\delta) - \sum_{J_1} \frac{d_{J_1} - \delta_{J_1}}{2} E_{J_1} - \dots - \sum_{J_1 \dots J_k} \frac{d_{J_1 \dots J_k} - \delta_{J_1 \dots J_k}}{2} E_{J_1 \dots J_k} .$$

Sia $\tilde{\varphi}\colon \tilde{X} \to \tilde{S}$ il rivestimento doppio di $\tilde{S}$ ramificato lungo $\tilde{C}$. $\tilde{X}$ è non singolare e per ogni $o_{\tilde{S}}$-modulo corrente $\mathcal{F}$ si ha:

$$H^i(\tilde{X}, \tilde{\varphi}^* \mathcal{F}) \simeq H^i(\tilde{S}, \mathcal{F}) \oplus H^i(\tilde{S}, \mathcal{F} \otimes o_{\tilde{S}}\, o_S(-\tilde{\delta})) .$$

In particolare — dato che $K_{\tilde{X}} \equiv \tilde{\varphi}^*(K_{\tilde{S}} + \tilde{\delta})$ — si ha:

$$H^i(\tilde{X}\, o_{\tilde{X}}(nK_{\tilde{X}})) \simeq H^i\big(\tilde{S}\, o_{\tilde{S}}(n(K_{\tilde{S}} + \tilde{\delta}))\big) \oplus H^i\big(\tilde{S}\, o_{S}(n(K_{\tilde{S}} + \tilde{\delta}) - \tilde{\delta})\big) .$$

Vogliamo trovare le condizioni necessarie e sufficienti che deve soddisfare C perchè $\tilde{X}$ sia birazionalmente equivalente a una superficie di Enriques ossia perchè si abbia:

$$\chi(o_{\tilde{X}}) = 1 , \qquad h^0\big(n(K_{\tilde{S}} + \tilde{\delta})\big) \leqslant 1 \quad \forall n \geqslant 0 , \qquad h^0(K_{\tilde{S}} + \tilde{\delta}) = 0 , \qquad h^0\big(2(K_{\tilde{S}} + \tilde{\delta})\big) = 1 .$$

Le condizioni scritte implicano $h^0(n(K_{\tilde{S}} + \tilde{\delta}) - \tilde{\delta}) = 0$, $\forall n \geq 0$: se fosse $D \in |n(K_{\tilde{S}} + \tilde{\delta}) - \tilde{\delta}|$ per qualche n si avrebbe $2D + \tilde{C} \in |2n(K_{\tilde{S}} + \tilde{\delta})|$ — in particolare $n \geq 1$ — e se $|2(K_{\tilde{S}} + \tilde{\delta})| = \{F\}$ dovrebbe essere $nF = 2D + \tilde{C}$, in particolare, dato che C non ha componenti multiple, sarebbe $F \geq \tilde{C}$ e quindi avremmo $F - \tilde{C} \in |2K_{\tilde{S}}|$ il che è impossibile.

È $h^0(K_{\tilde{T}} + \tilde{\delta}) = 0$ se e solo se non esiste alcun $A_0 \in |A|$ tale che

$$\pi^*(A_0) - \sum_{J_1}\left(\frac{d_{J_1} - \delta_{J_1}}{2} - c_{J_1}\right)E_{J_1} \dots \sum_{J_1 \dots J_k}\left(\frac{d_{J_1 \dots J_k} - \delta_{J_1 \dots J_k}}{2} - c_{J_1 \dots J_k}\right)E_{J_1 \dots J_k} \geq 0$$

ed è $h^0(2(K_{\tilde{S}} + \tilde{\delta})) = 1$ se e solo se esiste una unica coppia A_1, A_2 di elementi di $|A|$ —necessariamente distinti se $h^0(K_{\tilde{S}} + \tilde{\delta}) = 0$ — tale che:

$$\pi^*(A_1) + \pi^*(A_2) - 2\sum_{J_1}\left(\frac{d_{J_1} - \delta_{J_1}}{2} - c_{J_1}\right)E_{J_1} \dots$$
$$\dots - 2\sum_{J_1 \dots J_k}\left(\frac{d_{J_1 \dots J_k} - \delta_{J_1 \dots J_k}}{2} - c_{J_1 \dots J_k}\right)E_{J_1 \dots J_k} \geq 0\,.$$

Supponiamo che sia $h^0(K_{\tilde{S}} + \tilde{\delta}) = 0$ e $h^0(2(K_{\tilde{S}} + \tilde{\delta})) = 1$; sia Γ_i l'insieme dei valori di J_1 tali che il punto P_{J_1} stia su A_i (è $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$). Si può scrivere $\pi^*(A_i) = \pi^{-1}(A_i) + \sum_{J_1 \in \Gamma_1} E_{J_1} + \sum_{J_1 \in \Gamma_1 J_2 \in \Gamma_2} m^{(i)}_{J_1 J_2} E_{J_1 J_2} \dots$.

Deve essere

$$\frac{d_{J_1} - \delta_{J_1}}{2} - c_{J_1} = \frac{n_{J_1} - \delta_{J_1}}{2} - 1 \leq 0 \qquad \text{se } J_1 \notin \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

e

$$\frac{n_{J_1} - \delta_{J_1}}{2} - 1 \leq 1 \qquad \text{se } J_1 \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

in entrambi i casi si ha pertanto $n_{J_1} \leq 3$.

Dovendo anche essere

$$\frac{d_{J_1 J_2} - \delta_{J_1 J_2}}{2} - c_{J_1 J_2} = \frac{n_{J_2} + n_{J_1 J_2} - \delta_{J_1 J_2}}{2} - 2 \leq 0 \qquad \text{se } J_1 \notin \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

si ha anche $n_{J_1 J_2} \leq 2$ se $J_1 \notin \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Osserviamo che se è $n_{J_1} \leq 3$ e $n_{J_1 J_2} \leq 2$ si ha

$$\frac{d_{J_1 \dots J_h} - \delta_{J_1 \dots J_h}}{2} - C_{J_1 \dots J_h} \leq 0 \qquad \forall h \geq 2$$

per cui se fosse $n_{J_1} \leq 3$ e $n_{J_1 J_2} \leq 2$, $\forall J_1, J_2$ si avrebbe $h^0(K_{\tilde{S}} + \tilde{\delta}) \neq 0$. Esisteranno perciò delle coppie J_1, J_2 tali che $n_{J_1} = n_{J_1 J_2} = 3$; se i P_{J_1} corrispondenti stessero tutti su A_1 o tutti su A_2 l'essere $h^0(2(K_{\tilde{S}} + \tilde{\delta})) \neq 0$ equivarrebbe all'essere

$h^0(K_{\tilde{S}} + \tilde{\delta}) \neq 0$. Possiamo quindi supporre, eventualmente cambiando gli indici che sia $n_1 = n_{11} = 3$ con $P_1 \in A_1$ e $n_2 = n_{22} = 3$ con $P_2 \in A_2$.

Dovendo essere $m_{ii}^{(i)} - (n_i + n_{ii} - \delta_{ii} - 2c_{ii}) = m_{ii}^{(i)} - 2 \geq 0$ per $i = 1, 2$ abbiamo che la trasformata propria di A_i in $S^{(1)}$ passa per P_{ii} per cui se A_i non fosse componente di C la molteplicità di intersezione di A_i e C in P_i sarebbe almeno 6 mentre è $A_i \cdot C = 4$.

Dunque A_1 e A_2 sono componenti di C, $C - A_1 - A_2$ ha in P_i $(i = 1, 2)$ un punto doppio e la molteplicità di intersezione di $C - A_1 - A_2$ con A_i in P_i è esattamente 4 (C non ha componenti multiple e $(C - A_1 - A_2)A_i = 4$). In particolare $C - A_1 - A_2$ non ha altri punti in comune con A_i all'infuori di P_i e si ha $n_{iiJ_3} < 3$ per $i = 1, 2$ e $\forall_{J_3}$.

Osserviamo che le condizioni necessarie ottenute su C perchè sia $h^0(K_{\tilde{S}} + \tilde{\delta}) = 0$ $h^0(2(K_{\tilde{S}} + \tilde{\delta})) = 1$ sono anche chiaramente sufficienti perchè si abbia

$$h^0((2n+1)(K_{\tilde{S}} + \tilde{\delta})) = 0\,, \qquad h^0(2n(K_{\tilde{S}} + \tilde{\delta})) = 1 \qquad \forall n \geq 0\,.$$

Infine per quanto riguarda $\chi(o_{\tilde{X}})$ si può scrivere

$$\chi(o_{\tilde{X}}) = 2\chi(o_S) + \frac{\tilde{\delta}(\tilde{\delta} + K_{\tilde{X}})}{2} = 3 + \frac{1}{2}\sum_{J_1}\left[\frac{d_{J_1} - \delta_{J_1}}{2} E_{J_1} + \sum_{J_2}\frac{d_{J_1J_2} - \delta_{J_1J_2}}{2} E_{J_1J_2} \ldots\right] \cdot$$
$$\cdot \left[\left(\frac{d_{J_1} - \delta_{J_1}}{2} - C_{J_1}\right)E_{J_1} + \sum_{J_2}\left(\frac{d_{J_1J_2} - \delta_{J_1J_2}}{2} - C_{J_1J_2}\right)E_{J_1J_2} \ldots\right].$$

Se C verifica le condizioni sopra ottenute è facile, benchè tedioso, costruire esplicitamente una $\tilde{S}$ con le proprietà richieste e verificare che se $J_1 \neq 1, 2$ l'addendo relativo a J_1 nella sommatoria sopra scritta vale 0 mentre se $J_1 = 1$ o 2 esso vale -2.

Osserviamo da ultimo se C verifica le condizioni ottenute B non può essere una componente di C dato che se lo fosse, essendo $A_iB = 1$, C non potrebbe avere in P_1 e P_2 le singolarità dette. In particolare deve essere $n \leq 2$ dato che se $n > 2$ il sistema lineare $|(2n+4)A + 4B|$ ha B come componente fissa; inoltre se $n > 0$, dato che $BC = 6 - 2n$, B può passare al più per uno solo dei punti P_1, P_2 e ciò può avvenire solo nel caso che $n = 1$.

I risultati di questa sezione sono riassunti nella seguente:

PROPOSIZIONE 3. - Sia X una superficie di Enriques, D un sistema lineare completo senza componenti fisse e con 2 punti base F_1 e P_2 e sia $\varphi_D\colon X \dashrightarrow F \subseteq \boldsymbol{P}^d$ ($F = \varphi_D(X)$, $d = D^2/2$) la trasformazione razionale ad esso associata. Si ha:

a) È $\deg \varphi_D = 2$ e F è proiettivamente equivalente a una superficie $F_{n,r}$ con $n + 2r + 1 = d$ e $n \leq 2$.

b) Esiste una curva E tale che il sistema $D + E$ sia senza componenti fisse abbia ancora P_1 e P_2 come punti base e dia luogo ad una diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} & F_{n,r+1} \subseteq \boldsymbol{P}^{d+2} \arrow[d] \\ X \arrow[ur, dashed, "\varphi_{D+E}"] \arrow[r, dashed, "\varphi_D"'] & F_{n,r} \subseteq \boldsymbol{P}^d \end{tikzcd}$$

c) Se $r \geqslant 1$ e C è la curva di ramificazione di φ_D è $C \in |(2n+6)A + 4B|$, C ha come singolarità al più punti tripli con punti infinitamente vicini del 1° ordine al più doppi eccezione fatta per 2 punti tripli Q_1 e Q_2 con ciascuno un punto infinitamente vicino del 1° ordine ancora triplo e i due elementi di A che passano per Q_1 e Q_2 sono componenti di C. Viceversa se C è un qualunque divisore senza componenti multiple di $|(2n+6)A+4B|$ che abbia le proprietà appena specificate, il ricoprimento doppio di $F_{n,r}$ ramificato lungo C è birazionalmente equivalente a una superficie di Enriques.

4. – Su una data superficie F_n fissiamo due elementi distinti A_1 ed A_2 di $|A|$ e due punti P_1, P_2, tali che $P_i \in A_i$ $(i = 1, 2)$.

Sia $F = F_n$ e $\pi' : F' \to F$ lo scoppiamento di P_1 e P_2: poniamo $E_i = \pi'^{-1}(P_i)$ $(i = 1, 2)$. Sia $\pi'' : \tilde{F} \to F'$ lo scoppiamento dei punti P'_1, P'_2 di E_1 ed E_2 rispettivamente corrispondenti alle direzioni di A_1 ed A_2 e poniamo $E'_i = \pi''^{-1}(P'_i)$ $(i = 1, 2)$. Denoteremo $\pi''^*(E_i) - E'_i$ ancora con E_i $(i = 1, 2)$ e porremo $\pi = \pi' \circ \pi''$. Vogliamo analizzare il sistema lineare completo

$$|((2n+4)A + 4B) - 2E_1 - 2E_2 - 4E'_1 - 4E'_2| = |-2K_{\tilde{F}}|$$

di $\tilde{F}$ nei due casi seguenti: I caso) B non passa nè per P_1 nè per P_2 (se $n = 0$ ci porremo, come è lecito fare, in tale caso); II caso) B passa per P_1 ma non per P_2 e $n = 1$. In entrambi i casi, avendo posto $\tilde{A}_i = \pi^*(A_i) - E_i - 2E'_i$ $(i = 1, 2)$, e $\tilde{K} = K_{\tilde{F}}$ possiamo scrivere

$$|-\tilde{K}| = |\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 + \pi^*(nA + B) + \pi_2 B| .$$

Indicheremo con C una qualunque curva irriducibile non singolare di $\pi^*(nA + B)$; C è razionale e si ha $h^0(C) = n + 2$, $h^1(C) = h^2(C) = 0$.

Osserviamo che se Γ è una curva irriducibile di $\tilde{F}$ tale che $\Gamma \cdot \tilde{K} < 0$ si ha senz'altro $h^1(\Gamma) = 0$ dato che la successione di coomologia associata a

$$0 \to o_{\tilde{F}} \to o_{\tilde{F}}(\Gamma) \to o_\Gamma(\Gamma) \to 0$$

da $h^1(\Gamma) = h^1(o_\Gamma(\Gamma))$ ed essendo per ipotesi $\Gamma^2 > \Gamma(\Gamma + K)$ è $h^1(o_\Gamma(\Gamma)) = 0$.

I caso. Sia $\tilde{B} = \pi^* B$. Le successioni di coomologia associate alle successioni esatte:

$$1) \quad 0 \to o(C) \to o(C + \tilde{A}_i) \to o_{A_i} A_i(-1) \to 0\,, \qquad i = 1, 2$$

$$2) \quad 0 \to o(C + \tilde{A}_i) \to o(C + A_1 + A_2) \to o_{\tilde{A}_j}(-1) \to 0 \qquad \{i, j\} = \{1, 2\}$$

$$3) \quad 0 \to o(C + \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2) \to o(C + \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 + \tilde{B}) \to o_{\tilde{B}}(2 - n) \to 0$$

$$4) \quad 0 \to o(C + \tilde{A}_i) \to o(C + \tilde{A}_i + \tilde{B}) \to o_{\tilde{B}}(-n + 1) \to 0$$

$$5) \quad 0 \to o(C + \tilde{A}_i + \tilde{B}) \to o(C + \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 + \tilde{B}) \to o_{\tilde{A}_j} \to 0\,, \qquad \{i, j\} = \{1, 2\}$$

mostrano che $h^1(C + \tilde{A}_i) = h^1(C + \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2) = h^1(C + \tilde{A}_i + \tilde{B}) = 0$ (successioni 1, 2 e 4), che $h^0\,(-\tilde{K}) = 5$, $h^1(-\tilde{K}) = 0$ e che nè A_1 nè A_2 (successione 5) nè B (successione 3) sono parti fisse di $|-\tilde{K}|$. Dunque $|-\tilde{K}|$ non ha parti fisse ed è di conseguenza irriducibile (se fosse composto con un fascio dovrebbe essere $A_i \equiv B$). Dato che $|C|$ non ha punti base gli eventuali punti base di $|-\tilde{K}|$ dovrebbero essere o su $\tilde{A}_1$ o su $\tilde{A}_2$ o su $\tilde{B}$: poichè si ha $-\tilde{K}\cdot\tilde{A}_i = 0$, $-\tilde{K}\cdot\tilde{B} = n - 2$ e poichè la successione 3 mostra che per $n < 2$ $|-\tilde{K}|$ sega su $\tilde{B}$ una serie completa di grado $2 - n$ necessariamente priva di punti fissi possiamo concludere che $|-\tilde{K}|$ non ha punti base.

Di conseguenza $|-2\tilde{K}|$ non ha parti fisse, è irriducibile e non ha punti base; essendo $(-2\tilde{K})\,\tilde{K} = -8 < 0$ si ha $h^1(-2\tilde{K}) = 0$ e $h^0(-2\tilde{K}) = \chi(-2K) = 13$.

II caso. Sia $\tilde{B} = \pi^* B - E_1 - E_1'$. Le successioni di coomologia associate a:

$$0 \to o(C) \to o(C + E_1') \to o_{E_1'}(-1) \to 0$$

$$0 \to o(C + A_1) \to o(C + A_1 + E_1') \to o_{E_1'} \to 0$$

mostrano che $|C + A_1 + E_1'|$ non ha parti fisse: se ne può dedurre che è irriducibile e senza punti fissi. Sia C' un elemento irriducibile non singolare di $|C + A_1 + E_1'|$; C' è razionale dato che $C'^2 = n + 1$ e $C'\tilde{K} = -3 - n$. Se si ripetono le considerazioni fatte nel caso I mettendo C' al posto di C ed E_1 al posto di $\tilde{A}_1$ si trova che $|-2\tilde{K}|$ è privo di parti fisse, irriducibile e senza punti base e che si ha ancora $h^0(-2\tilde{K}) = 13$, $h^1(-2\tilde{K}) = 0$.

Abbiamo così esaurito l'analisi del sistema $-2\tilde{K}$ nei due casi che ci eravamo prefissi.

Supponiamo ora di trovarci in uno dei due casi descritti e sia Γ un elemento irriducibile non singolare di $|-2K|$. Dato che $\Gamma E_i = \Gamma\cdot\tilde{A}_i = E_1\cdot E_2 = \tilde{A}_1\cdot\tilde{A}_2 = E_i\tilde{A}_J = 0$ la curva $\Delta = \Gamma + \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 + E_1 + E_2$ è non singolare e si ha

$$\Delta \in |-2(\tilde{K} + E_1' + E_2' - \pi^*(A))|$$

Sia $\varrho\colon \tilde{X} \to \tilde{F}$ il rivestimento doppio di F ramificato lungo Δ. Se $\varrho^*(\tilde{A}_i) = 2C_i$ $(i = 1, 2)$, $\varrho^*(E_i) = 2C_{i+2}$ $(i = 1, 2)$, le C_J sono 4 curve eccezionali del 1° genere.

Sia $\varepsilon: \tilde{X} \to X$ la superficie ottenuta contraendole. X è una superficie di Enriques; in effetti si ha:

$$2K_{\tilde{X}} \equiv \varrho^*(\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 + E_1 + E_2) = 2\sum_{i=1}^{4} C_i = \varepsilon^*(2K_X) + 2\sum_{i=1}^{4} C_i$$

cosicchè $2K_X \equiv 0$, e inoltre è

$$\chi(o_X) = \chi(o_{\tilde{X}}) = 2\chi(o_{\tilde{F}}) + \frac{\tilde{\delta}(\tilde{\delta} + \tilde{K})}{2} = 2 - 1 = 1\,.$$

Fissiamo un $r \geqslant 0$ con $r > 0$ se $n = 0$ e poniamo $\tilde{D} \equiv \varrho^*\pi^*((n + r)A + B)$; è $\tilde{D}^2 = 2(n + 2r)$, $\tilde{D}C_1 = \tilde{D}C_2 = 1$, $\tilde{D}C_3 = \tilde{D}C_4 = 0$ per cui se $\varepsilon_*\tilde{D} = D$ è $D^2 = 2(n + 2r) + 2$. Il morfismo $\pi\circ\varrho$ induce una trasformazione razionale $T: X \dashrightarrow F_n$; essendo $h^0(D) = n + 2r + 2$ è $\varphi_{n,r} \circ T = \varphi_D$.

Osserviamo che se Γ è un qualsiasi elemento irriducibile di $|-2\tilde{K}|$ il ricoprimento doppio di $\tilde{F}$ ramificato lungo $\Delta = \Gamma + \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 + E_1 + E_2$ è birazionalmente equivalente a una superficie di Enriques dato che Γ, essendo $P_a(\Gamma) = 5$, può avere come singolarità al più un punto triplo con un punto doppio infinitamente vicino del 1° ordine.

Richiamiamo ora la descrizione del gruppo G_n degli automorfismi di una superficie F_n.

È $F_0 = \boldsymbol{P}^1 \times \boldsymbol{P}^1$ e se $\sigma: \boldsymbol{P}^1 \times \boldsymbol{P}^1 \rightleftarrows \boldsymbol{P}^1 \times \boldsymbol{P}^1$ è definito da $\sigma((P, Q)) = (Q, P)$ G_0 è generato da σ e dal suo sottogruppo normale $PGL(1) \times PGL(1)$, $PGL(1)$ essendo il gruppo degli automorfismi di $\boldsymbol{P}^1$. Se $n \geqslant 1$, riferendoci alla realizzazione di F_n come fibrato su $\boldsymbol{P}^1$ descritta nella sezione 2 si ha che ogni $g \in G_2$ induce un automorfismo della base: la mappa $G_n \to PGL(1)$ così ottenuta è suriettiva e se N_n ne è il nucleo H_n può essere identificato con il gruppo quoziente del gruppo moltiplicativo di matrici

$$\left\{\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ C(t) & a \end{pmatrix} \middle| \, a \in \boldsymbol{C}^*,\ C(t) \in \boldsymbol{C}[t] \quad \text{e} \quad \deg C(t) \leqslant n \right\}$$

modulo il suo sottogruppo

$$\left\{\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

L'azione di H_n sull'aperto $\boldsymbol{P}^1 - \{\infty\} \times \boldsymbol{P}^1$ di F_n può essere descritta esplicitamente così:

$$(t;\, X_0 : X_1) \mapsto \big(t,\, aX_0 : C(t)X_0 + a^{-1}X_1\big)\,.$$

In particolare si ha che prese comunque $n + 1$ fibre distinte $A_0 \ldots A_n$ e prese comunque $n + 2$ coppie di punti (P_{-1}, P'_{-1}), (P_0, P'_0), ..., (P_n, P'_n), nessuno dei quali stia su B e tali che P_i, $P'_i \in A_i$, $i = 0, \ldots, n$. P_{-1}, $P'_{-1} \in A_0$, $P_{-1} \neq P_0$, $P'_1 \neq P'_0$ esiste uno ed un solo elemento $h \in H_n$ tale che $h(P_J) = P'_J$, $\forall J \geqslant -1$.

Consideriamo gli insiemi $I_0 = \{\{P, Q\} | P, Q \in F_0, P \neq Q\}$, $I_1 = \{\{P, Q\} | P, Q \in F_1$, P e Q non stanno su uno stesso elemento di A nè stanno entrambi su $B\}$, $I_2 = \{\{P, Q\} | P, Q \in F_2$, P e Q non stanno nè su uno stesso elemento di A nè su uno stesso elemento di $B\}$; facciamo agire G_n su I_n ponendo $g(\{P, Q\}) = \{g(P), g(Q)\}$ se $g \in G_n$ e $\{P, Q\} \in I_n$ $(n = 0, 1, 2)$. Da quanto richiamato risulta immediatamente che: I_0 si ripartisce per l'azione di G_0 in due orbite, una, che denoteremo $O_1^{(0)}$ costituita dagli elementi $\{P, Q\}$ tali che P e Q non stanno nè su uno stesso elemento di A nè su unó stesso elemento di B, l'altra, $O_2^{(0)}$, costituita dai restanti elementi di I_0; I_1 si ripartisce anch'esso per l'azione di G_1 in due orbite, una $O_1^{(1)}$ costituita dagli elementi $\{P, Q\}$ tali che nè P nè Q stanno su B, l'altra $O_2^{(1)}$ costituita dagli altri elementi di I_1.

G_2 agisce transitivamente su I_2.

Se $S_n(\{P, Q\})$ indica lo stabilizzatore di $\{P, Q\}$ I_n per l'azione di G_n $(n = 0, 1, 2)$ si ha dunque:

$$\dim S_0(\{P, Q\}) = 2 \quad \text{se} \quad \{P, Q\} \in O_1^{(0)} \qquad \dim S_0(\{P, Q\}) = 3 \quad \text{se} \quad \{P, Q\} \in O_2^{(0)}$$

$$\dim S_1(\{P, Q\}) = 2 \quad \text{se} \quad \{P, Q\} \in O_1^{(1)} \qquad \dim S_0(\{P, Q\}) = 3 \quad \text{se} \quad \{P, Q\} \in O_2^{(1)}$$

$$\dim S_2(\{P, Q\}) = 3 \quad \text{se} \quad \{P, Q\} \in I_2 .$$

In definitiva i calcoli fatti nel corso di questa sezione permettono di asserire la seguente

PROPOSIZIONE 4. – La dimensione dello «spazio dei moduli» delle superficie di Enriques X che hanno un sistema lineare D senza parti fisse tale che la trasformazione razionale ad esso associata, D, abbia per immagine F_n è 10 se $n = 0, 1$ ed è 9 se $n = 2$.

BIBLIOGRAFIA

A. BEAUVILLE, *Surfaces algebriques complexes*, Astérisque, **54** (1978).

I. CHAFAREVITCH ed altri, *Algebraic surfaces*, Proc. of the Steklov Institute, **75** (1965).

F. ENRIQUES, *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno*, Memorie della Società Italiana delle Scienze, serie 3ª, **14** (1906).

F. ENRIQUES, *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno*, Memorie dellà Società Italiana delle Scienze, serie 3ª, **14** (1906).

M. NAGATA, *On rational surfaces*. - I: *Irreducible curves of arithmetic genus* 0 *or* 1, Mem. Coll. Sci. Kyoto Ser. A Math., **32** (1960).

M. REID, *Hyperelliptic linear systems on a K3 surface*, J. London Math. Soc., (2), **13** (1976).