Famiglie di dischi analitici con bordo su sottovarietà CR non generiche (*).

A. Selvaggi Primicerio - G. Taiani (Firenze)

Summary. – *In this work the authors prove that all sufficiently small analytic discs in the tangent space of a non generic embedded CR manifold $M' \subset \boldsymbol{C}^N$ (M' at least of class C^4) can be lifted uniquely to analytic discs in $\boldsymbol{C}^N$ with boundaries on M' Moreover if M' is real analytic or C^∞ then real analytic or C^∞ discs lift without loss of derivatives. If M' is of class C^K then there is a $1+\varepsilon$ loss of derivatives in the lifting. A stability result is also proven.*

1. – Introduzione.

In un recente lavoro [6] sono state caratterizzate famiglie locali di dischi analitici in $\boldsymbol{C}^n$ con bordo su una assegnata varietà CR generica; (per un riassunto v. [7]). Tali dischi, ottenuti come risalimento unico di dischi di parametri nello spazio tangente alla varietà, sono legati alle soluzioni di un sistema non lineare di equazioni integrali singolari che contengono la trasformata di Hilbert del cerchio unitario. Questo metodo fu introdotto da Bishop [2] il quale, mediante opportune approssimazioni successive in spazi di Sobolev, ottenne una famiglia particolare di dischi analitici con bordo sulla varietà. Tali dischi dipendono da certi parametri legati alla construzione fatta.

Successivamente diversi autori [14], [5], [13], hanno modificato la costruzione di Bishop lavorando in spazi di Sobolev di ordine maggiore ed ottenendo così una maggiore regolarità per i dischi e per la loro dipendenza dai parametri.

In [6] si considerano tre differenti tipi di varietà: la analitica reale, la C^∞, la $C^{k,\alpha}$ ($k \geqslant 0$, $0<\alpha<1$); si introducono appropriati spazi di Banach di parametri ed usando il teorema della funzione implicita in spazi di Banach si risolve il sistema di equazioni funzionali che prende il nome di equazione di Bishop. Nel caso C^∞ e analitico reale i dischi che così si ottengono hanno la stessa regolarità della varietà, così pure la loro dipendenza dai parametri. Nel caso $C^{k,\alpha}$ si perdono invece $1+\varepsilon$ derivate. Sempre in [6] si ottengono risultati sulla unicità dei dischi e sulla loro differenziabilità rispetto ai parametri ed a perturbazioni della varietà.

In questo lavoro si generalizzano a varietà non generiche i risultati di [6] sopra ricordati. Ad ogni varietà non generica si associa una opportuna varietà generica e si prova che è possibile risalire in modo unico le famiglie di dischi ottenute in [6]

(*) Entrata in Redazione il 1° dicembre 1979.
(**) Lavoro svolto sotto gli auspici del C.N.R.

sulla varietà generica a famiglie di dischi con bordo sulla varietà non generica, senza perdere alcuna derivata. Nel caso analitico reale il risalimento si ottiene, (teorema 5.2), mediante un teorema di estensione olomorfa di CR funzioni [12]. Negli altri casi, (teorema 6.2), si riesce ad approssimare la varietà non generica con varietà analitiche reali, dopo aver dimostrato (lemma 6.1) che il teorema 5.2 vale uniformemente rispetto all'intorno trovato. L'unicità dei risalimenti è provata nel teorema 4.1, mentre nel teorema 7.2 si dimostra la dipendenza dei risalimenti dalla varietà.

Per quanto ci risulta questo lavoro differisce da precedenti lavori sullo stesso soggetto: da [8], [10], [11], in quanto non si fanno ipotesi sulla forma di Levi della varietà; da [10], [11] poichè si usano spazi di parametri più generali. I risultati sono ottenuti direttamente — come una generalizzazione non banale di [6] al caso di varietà non generiche — senza far uso di teoremi di estensione di CR funzioni.

2. - *CR*-varietà.

Sia M una varietà differenziabile reale, immersa in $\boldsymbol{C}^N$, di dimensione d. Sia $T_p(M)$ lo spazio tangente reale ad M in $p \in M$. Se J è l'operatore che definisce la struttura complessa di $\boldsymbol{C}^N$, poniamo, per $p \in M$

$$HT_p(M) = T_p(M) \cap JT_p(M).$$

$HT_p(M)$ è lo spazio tangente olomorfo a M in p ed è il massimo sottospazio complesso di $T_p(\boldsymbol{C}^N)$ contenuto in $T_p(M)$. Se $\dim_{\boldsymbol{C}} HT_p(M) = m(p)$ è costante in un intorno di p in M, allora M si dice una *varietà localmente* CR *in* p, *di* CR-*dimensione* m. Posto $l = d - 2m$ e $K = N - (l + m) \equiv N - n$ si dice che M è una *varietà generica in* p se e solo se $K = 0$. Si prova facilmente che se M è una varietà generica in p, allora M è generica in un intorno di p in M [1].

Una funzione a valori complessi $f \in C^1(M)$ si dice una CR-*funzione in* p se

$$\bar{\partial}_M f(p') = 0$$

dove p' appartiene ad un intorno di p in M e $\bar{\partial}_M$ rappresenta le equazioni tangenziali di Cauchy-Riemann su M. Si dice che f è CR *in* M se è CR in ogni punto di M. Una applicazione differenziabile tra due varietà CR, $f\colon X \to Y$, $X \subset \boldsymbol{C}^r$, $Y \subset \boldsymbol{C}^s$, si dice una CR *applicazione* in $p \in X$ se $df_p\colon T_p(X) \to T_{f(p)}(Y)$ è tale che

$$df_{p'}\colon HT_{p'}(X) \to HT_{f(p')}(Y)$$

con p' in un intorno di p in X. Se f ha componenti $f_1, \ldots, f_s$ si può dire equivalentemente che f è CR in X se e solo se ogni componente f_j è CR in X. Infatti se $z \in HT_p(X)$ da

$$df_p(z) = \sum_{j=1}^{s} (zf_j)\frac{\partial}{\partial f_j} + \sum_{j=1}^{s} (z\bar{f}_j)\frac{\partial}{\partial \bar{f}_j}$$

si ha che $df_p(z) \in HT_{f(p)}(Y)$ se e solo se $z\bar{f}_j = 0$, $\forall j$, $\forall z$. Ciò è vero se e solo se $\bar{z}f_j = 0$, $\forall j$, $\forall z$ cioè se e solo se f_j è CR in X.

Sia M' una CR varietà, almeno differenziabile, immersa in $\boldsymbol{C}^N$, di dimensione reale $d = l + 2m$ e di CR-dimensione m. Supponiamo M' non localmente generica in $p \in M'$. Senza perdere di generalità, usando un opportuno cambiamento di coordinate olomorfo, si può assumere che sia $p = 0$, $T_0(M') = \{y_1 = y_2 = \ldots = y_l = 0, z_{n+1} = \ldots = z_N = 0\}$ e $HT_0(M') = \{z_1 = z_2 = \ldots = z_l = 0, z_{n+1} = \ldots = z_N = 0\}$ dove $z_j = x_j + iy_j$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$ sono coordinate olomorfe in un intorno di 0 in $\boldsymbol{C}^N$. In tal caso è possibile rappresentare localmente M' come grafico sul suo piano tangente $T_0(M')$

$$\begin{aligned} M' = \{(z_1, \ldots, z_N): y_j &= h_j(x_1, \ldots, x_l, z_{l+1}, \ldots, z_n) \qquad j = 1, 2, \ldots, l \\ x_{n+\nu} &= h'_\nu\,(x_1, \ldots, x_l, z_{l+1}, \ldots, z_n) \\ y_{n+\nu} &= h''_\nu\,(x_1, \ldots, x_l, z_{l+1}, \ldots, z_n) \qquad \nu = 1, \ldots, K\} \end{aligned} \tag{2.1}$$

dove h, h'_ν, h''_ν sono funzioni a valori reali, definite in un intorno V di 0 in $\boldsymbol{R}^l \times \boldsymbol{C}^m$ (si noti che $T_0(M')$ è isomorfo a $\boldsymbol{R}^l \times \boldsymbol{C}^m$), regolari tanto quanto M' e nulle in 0 fino al secondo ordine. Per brevità di scrittura talvolta indicheremo con H la terna (h, h', h'') di funzioni che definiscono la varietà.

Indichiamo con $\pi: \boldsymbol{C}^N = \boldsymbol{C}^n \times \boldsymbol{C}^K \to \boldsymbol{C}^n$ la proiezione sulle prime n componenti e sia $M = \pi(M')$. M è una varietà della stessa regolarità di M'. Restringendo eventualmente l'intorno V di 0 in $\boldsymbol{R}^l \times \boldsymbol{C}^m$ in modo da rendere iniettive le applicazioni $\pi|_{M'}$ e $d(\pi|_{M'})$, si prova facilmente che M è generica in 0, di dimensione reale d e di CR-dimensione m. Infatti, per costruzione $T_0(M') = T_0(M)$ e $HT_0(M') = HT_0(M)$, quindi M è generica in 0. Poichè la genericità è una condizione aperta, segue che, restringendo se necessario l'intorno V, M è generica nell'intorno V di 0 e quindi è CR. Sussiste pertanto per M la rappresentazione

$$M = \{(z_1, \ldots, z_n): y_j = h_j(x_1, \ldots, x_l, z_{l+1}, \ldots, z_n) \;\; j = 1, 2, \ldots, l\} \tag{2.2}$$

dove le funzioni h_j sono le stesse che definiscono M', eventualmente ristrette ad un sottoinsieme di V contenente l'origine.

Posto $\varphi = (\pi|_{M'})^{-1}$, $\varphi: M \to M' \subset \boldsymbol{C}^N$, si ha

$$\varphi_j(z_1, \ldots, z_n) = \begin{cases} z_j & j \leqslant n \\ (h'_{j-n} + ih''_{j-n})(x_1, \ldots, x_l, z_{l+1}, \ldots, z_n) & n + 1 \leqslant j \leqslant N \end{cases} \tag{2.3}$$

e quindi φ ha la stessa regolarità di H. In effetti φ è una CR funzione su M. Infatti, sia $H = (h, h', h'')$ una terna di funzioni di classe almeno C^1, con

$$\begin{aligned} h&: V \subset \boldsymbol{R}^l \times \boldsymbol{C}^m \to \boldsymbol{R}^l \\ h'&: V \subset \boldsymbol{R}^l \times \boldsymbol{C}^m \to \boldsymbol{R}^K \\ h''&: V \subset \boldsymbol{R}^l \times \boldsymbol{C}^m \to \boldsymbol{R}^K \end{aligned}$$

e nulle fino al secondo ordine nell'origine. Siano M ed M' definite come in (2.2)-(2.1) rispettivamente da h e H. Definita in tal modo M è una CR varietà generica di $\boldsymbol{C}^n$. Sussiste per φ il seguente risultato

LEMMA 2.1. – *φ è una* CR *applicazione sulla varietà generica M se e solo se M' è localmente una* CR *varietà non generica con la stessa* CR *dimensione di M.*

DIM. – Sia M' una CR varietà non generica con la stessa CR dimensione di M. La proiezione π è olomorfa in $\boldsymbol{C}^N$ e quindi $\pi|_{M'}$ è CR. Allora

$$d(\pi|_{M'})_p \colon HT_p(M') \to HT_{\pi(p)}(M)\,, \qquad p \in M'\,.$$

Poichè

$$\dim T_p(M') = \dim T_{\pi(p)}(M)\,, \qquad \dim_{\boldsymbol{C}} HT_p(M') = \dim_{\boldsymbol{C}} HT_{\pi(p)}(M)$$

e $d(\pi|_{M'})$ è iniettiva, risultano suriettive le applicazioni $d(\pi|_{M'})$ e $d(\pi|_{M'})|_{HT_p(M')}$. Allora la trasformazione inversa di $d(\pi|_{M'})$, $d\varphi$, è tale che $d\varphi_{\pi(p)}\colon HT_{\pi(p)}(M) \to HT_p(M')$, cioè φ è CR su M.

Supponiamo ora φ CR su M. Allora $d\varphi_{\pi(p)}\colon HT_{\pi(p)}(M) \to HT_p(M')$. Dalle definizioni di M, M', π risulta $\dim T_p(M') = \dim T_{\pi(p)}(M)$ con $d(\pi|_{M'})$ iniettiva. Allora $d(\pi|_{M'})$ e $d\varphi$ sono biiettive e pertanto $\dim_{\boldsymbol{C}} HT_{\pi(p)}(M) \leqslant \dim_{\boldsymbol{C}} HT_p(M')$. In generale risulta, per ogni p sufficientemente vicino all'origine, $\dim_{\boldsymbol{C}} HT_p(M') \leqslant \dim_{\boldsymbol{C}} HT_0(M')$. Ma poichè H è nulla fino al secondo ordine in 0 $HT_0(M') = HT_0(M)$ e così

$$\dim_{\boldsymbol{C}} HT_p(M') \leqslant \dim_{\boldsymbol{C}} HT_0(M) = \dim_{\boldsymbol{C}} HT_{\pi(p)}(M)\,.$$

Da ciò segue che $\dim_{\boldsymbol{C}} HT_p(M') = \dim_{\boldsymbol{C}} HT_{\pi(p)}(M)$. Il lemma è provato.

La condizione che φ è CR su M può essere espressa anche in termini di H. Infatti, ogni componente φ_j di φ, $j = 1, 2, \ldots, N$, definita come in (2.3) è CR su M; così in particolare $h'_j + ih''_j$, $1 \leqslant j \leqslant K$, è CR su M. Se si considera l'estensione, banale, di $h'_j + ih''_j$ a tutto $\boldsymbol{C}^n$, data da $(h'_j + ih''_j)(z_1, \ldots, z_n) = (h'_j + ih''_j)(x_1, \ldots, x_l, z_{l+1} \ldots, z_n)$ si ha che

$$\bar\partial(h'_j + ih''_j) \wedge \bar\partial\varrho_1 \wedge \ldots \wedge \bar\partial\varrho_l = 0 \qquad 1 \leqslant j \leqslant K$$

dove $\bar\partial F = \sum_{j=1}^{n} (\partial F/\partial \bar z_j)\, d\bar z_j$ e $\varrho_j = h_j - y_j$ $1 \leqslant j \leqslant l$ sono le funzioni che definiscono M.

Così M' è una varietà CR non generica, di tipo (2.1) se e solo se

$$\bar\partial(h'_j + ih''_j) \subset L(\bar\partial(h - y)) \qquad 1 \leqslant j \leqslant K \tag{2.4}$$

dove $L(\bar\partial(h - y))$ è lo spazio generato da $\bar\partial(h_1 - y_1), \ldots, \bar\partial(h_l - y_l)$.

3. – Notazioni.

Sia D il disco unitario aperto di $\boldsymbol{C}$. Una funzione $\gamma\colon \bar{D} \to \boldsymbol{C}^s$, oppure l'immagine $\gamma(D)$, si dice *disco analitico* in $\boldsymbol{C}^s$ se γ è olomorfa in D. Si chiama *bordo del disco analitico* la funzione $\gamma\colon S^1 \to \boldsymbol{C}^s$, oppure l'immagine $\gamma(S^1)$ del bordo S^1 del disco D.

Indichiamo con $\mathfrak{D}^s$ la famiglia dei dischi analitici in $\boldsymbol{C}^s$ con bordi sufficientemente regolari.

Sia $M \subset \boldsymbol{C}^n$ una varietà CR, generica di dimensione reale $l + 2m$ e di CR-dimensione m, definita localmente da una funzione h sufficientemente regolare. Posto $P = \boldsymbol{R}^l \times \mathfrak{D}^m$ in [6] si prova che esiste sempre un disco analitico $g(\xi) = \big(f(\xi), w(\xi)\big)$, $\xi \in \bar{D}$, $f = u + iv$, in $\boldsymbol{C}^n$ con bordo

$$g(e^{i\theta}) = \big(u(e^{i\theta}) + ih\big(u(e^{i\theta}), w(e^{i\theta})\big), w(e^{i\theta})\big)\,, \qquad e^{i\theta} \in S^1$$

su M se e solo se si può risolvere l'equazione funzionale di Bishop

$$u(e^{i\theta}) = c - T\big[h\big(u(e^{i\theta}), w(e^{i\theta})\big)\big]\,, \qquad e^{i\theta} \in S^1 \tag{3.1}$$

corrispondente a qualche elemento $p = (c, w) \in P$. T è la trasformata di Hilbert del cerchio e perciò $\mathrm{Re}\, f(0) = c$. Si chiama *disco dei parametri* l'elemento (c, w); mentre $g(D)$ si dice il *risalimento* di (c, w). In tal caso si risale una famiglia di dischi $(c, \mathcal{W})$ definita su $\bar{D} \times U$, U aperto di P, da $(c, \mathcal{W})\colon (\xi, p) \to \big(c, w(\xi)\big)$, in una famiglia $\mathcal{G} = (\mathcal{F}, \mathcal{W})$ — $\mathcal{F}\colon (\xi, p) \to f(\xi, p)$, $p \in U$ — di dischi $g(D) = \big(f(D), w(D)\big) \in \mathfrak{D}^l \times \mathfrak{D}^m = \mathfrak{D}^n$, con bordo su M, mediante il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[r, hook] & \boldsymbol{C}^n \arrow[dr, "(\mathrm{Re} f(0), \mathrm{id})"] & \\
S^1 \times U \arrow[ur, "b\mathcal{G}"] \arrow[r, hook] & \bar{D} \times U \arrow[ur, "\mathcal{G}"] \arrow[rr, "(c,\mathcal{W})"'] & & \boldsymbol{R}^l \times \boldsymbol{C}^m \simeq T_0(M)
\end{tikzcd} \tag{3.2}$$

e si prova che il disco $g(D)$ corrispondente ad ogni $p = (c, w) \in U$ è unico.

In questo lavoro si considera una CR varietà M', non generica, sufficientemente regolare e si prova che risulta commutativo il sequente diagramma

$$\begin{tikzcd}
& & M' \arrow[rr, hook] & & \boldsymbol{C}^{m+l} \times \boldsymbol{C}^K = \boldsymbol{C}^N \arrow[d, "\pi"] \\
& M \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, hook] & & \boldsymbol{C}^l \times \boldsymbol{C}^m = \boldsymbol{C}^n \arrow[ur] \arrow[r] & \boldsymbol{C}^n \arrow[dl] \\
S^1 \times E \arrow[ur, "b\mathcal{G}"] \arrow[rr, hook] & & \bar{D} \times E \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[uurr, no head, "\mathfrak{F}"] & \boldsymbol{R}^l \times \boldsymbol{C}^m \arrow[d, no head, "\wr"'] & \\
& & & T_0(M) &
\end{tikzcd} \tag{3.3}$$

dove $0 \in E \Subset U$ e $\mathfrak{J}$ che è una appropriata estensione di $\varphi \circ b\mathfrak{G}$, è una famiglia di dischi analitici in C^N con bordo su M'. Nel caso analitico reale, risulta $\mathfrak{J} = \tilde{\varphi} \circ \mathfrak{G}$ con $\tilde{\varphi}$ estensione olomorfa di φ.

Si prova inoltre che è unico il disco $j \in \mathfrak{D}^N$ con bordo su M', che corrisponde a disco $(c, w) \in E$ in $\boldsymbol{R}^l \times \boldsymbol{C}^m$.

4. – Unicità.

Sia M' una C^1 varietà definita come in (2.1) in un intorno di V di 0 in ${}^l\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{C}^m$ da una funzione H tale che valga (2.4); siano M, φ, π definite come nel paragrafo 2.

Se necessario restringiamo l'intorno V in modo che risulti $|D_x h(x, z)| < 1$, $(x, z) \in V$. Ricordando che $N = l + m + K$, prendiamo in considerazione dischi analitici $j(D) \in \mathfrak{D}^N$, con bordo su M', della forma

$$j(D) = \big(f(D), w(D), q(D)\big) \tag{4.1}$$

dove $(f, w, q) \in \mathfrak{D}^l \times \mathfrak{D}^m \times \mathfrak{D}^K$ e tali che: i) $j(\bar{D}) \in L^2(\bar{D})$, ii) $\big(\operatorname{Re} f(S^1), w(S^1)\big) \in V$.

Sussiste il seguente teorema

TEOREMA 4.1. – *Ad ogni disco analitico $\big(c, w(S^1)\big) \in V$ corrisponde al più un disco $j(D) \in \mathfrak{D}^N$ della precedente forma* (4.1).

DIM. – Supponiamo per assurdo che esistano due dischi $j_1(D)$, $j_2(D)$ della forma (4.1) corrispondenti allo stesso disco dei parametri (c, w). Allora i dischi $g_1(D) = \big(f_1(D), w_1(D)\big)$, $g_2(D) = \big(f_2(D), w_2(D)\big)$ appartengono a $\mathfrak{D}^n$ ed hanno i bordi sulla varietà generica M definita da (2.2). Per costruzione g_1 e g_2 sono i risalimenti dello stesso disco dei parametri (c, w). Da [6; Proposizione 5.1] segue che $f_1(\bar{D}) = f_2(\bar{D})$ e $w_1(\bar{D}) = w_2(\bar{D})$. Ma $j_i(S^1) \in M'$, $i = 1, 2$ e poichè $\varphi: M \to M'$ è iniettiva risulta $j_1(S^1) = j_2(S^1)$. Dalla formula di Cauchy per j_i, $i = 1, 2$, segue l'assurdo $j_1(D) = j_2(D)$.

5. – Il caso analitico reale.

Sia M' una CR varietà analitica reale, non generica definita in un intorno di 0 dalla formula (2.1). Siano π, φ, V come nel paragrafo 2; allora la varietà $M = \pi(M')$ associata ad M' è una CR varietà, analitica reale, generica, definita come in (2.2). Con le stesse notazioni di [6] poniamo:

$B =$ intorno compatto dell'origine in $V \subset \boldsymbol{R}^l \times \boldsymbol{C}^m$;

$A_\delta = \{z \in \boldsymbol{C}: 1 - \delta < |z| < 1 + \delta,\ \delta > 0\}$;

$D_\delta = \{z \in \boldsymbol{C}: |z| < 1 + \delta,\ \delta > 0\}$;

$\mathrm{Lip}^B(h)$ = costante di Lipschitz di $h(u, w)$ rispetto ad u in B;

$\mathcal{U}(B) = \{f\colon B \to \boldsymbol{R},\ f \text{ analitica reale}\}$;

$\mathcal{U}_l(B)$ = prodotto cartesiano di $\mathcal{U}(B)$ l-volte;

$\mathcal{U}(B, 0) = \{H = (h, h', h'') \in \mathcal{U}_l(B)\times\mathcal{U}_K(B)\times\mathcal{U}_K(B)\colon H(0) = DH(0) = 0, \text{ valga } (2.4)\}$;

$$C^\alpha(X) = C^{0,\alpha}(X) = \Big\{w\colon X \to \boldsymbol{C}\colon |w|_\alpha = \sup_{x\in X}|w(x)| + \\ + \sup_{\substack{x,y\in X\\ x\neq y}} \frac{|w(x)-w(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty,\ X \text{ compatto di } \boldsymbol{R},\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\Big\};$$

$C_m^\alpha(\bar{D}_\delta)$ = prodotto cartesiano di $C^\alpha(\bar{D}_\delta)$, m-volte;

$\mathcal{D}_m^\alpha(D_\delta)$ = prodotto cartesiano di $(\mathcal{O}(D_\delta) \cap C^\alpha(\bar{D}_\delta))$, m-volte, con la norma $|\ |_{\alpha,\delta}$ di $C_m^\alpha(\bar{D}_\delta)$;

$P = \{p \in \boldsymbol{R}^l \times \mathcal{D}_m^\alpha(D_{\delta_0})\colon |p|_{\alpha,\delta_0} = |(c, w)| = |c| + |w|_{\alpha,\delta_0},\ \delta_0 > 0,\ 0 < \alpha < 1\}$;

$\mathcal{A}_{l,\delta}^\alpha$ = prodotto cartesiano, l-volte, di $\mathcal{O}(A_\delta) \cap C^\alpha(\bar{A}_\delta)$ con la norma $|\ |_{\alpha,\delta}$ di $C_l^\alpha(\bar{A}_\delta)$;

$\|T\|_\alpha$ = norma dell'operatore di Hilbert $T\colon C^\alpha(S^1) \to C^\alpha(S^1)$ con $0 < \alpha < 1$.

In [6; Th. 6.1] si prova che se $h \in \mathcal{U}_l(B)$ e $0 < \delta < \delta_0 \leqslant 1$, $0 < \alpha < 1$, allora esistono una costante $c = c(\alpha, l, \delta)$ ed un intorno $U = U(\alpha, \delta)$ di 0 in P, tali che se $\mathrm{Lip}^B(h) \leqslant (c\|T\|_\alpha)^{-1}$ allora l'equazione di Bishop (3.1) ha una unica soluzione u data dalla restrizione ad S^1 di una funzione analitica reale da U in $\mathcal{A}_{1,\delta}^\alpha$. Inoltre [6; Th. 8.1] si risale in modo unico una famiglia locale $(c, \mathcal{W}_\delta)\colon D_\delta \times U \to \boldsymbol{R}^l \times \boldsymbol{C}^m$ di dischi analitici ad una famiglia di dischi analitici $\mathcal{G}_\delta\colon D_\delta \times U \to \boldsymbol{C}^n$ con $\mathcal{G}_\delta(\cdot, p) \in \mathcal{D}_n^\alpha(D_\delta)$, e si prova che $\mathcal{G}_\delta$ è l'estensione analitica reale di una funzione analitica reale $\mathcal{G}\colon \bar{D} \times U \to \boldsymbol{C}^n$, con $\mathcal{G}$ e $b\mathcal{G}$ definite come in (3.2).

LEMMA 5.1. – *Sia φ definita da (2.3). Se E è un sottoinsieme aperto connesso e semplicemente connesso di U, $0 \subset E$, $\bar{E} \subset U$, allora esiste un $\delta'\colon 0 < \delta' \leqslant \delta_0 \leqslant 1$ ed una unica estensione $\tilde{\varphi}$ di φ, con $\tilde{\varphi}$ olomorfa in un intorno aperto connesso Ω di $\tilde{M}_\delta = \mathcal{G}_\delta(D_\delta \times E)$ con $0 < \delta < \delta'$.*

DIM. – Per il lemma 2.1 φ è CR su M. Da [12] segue che φ è estendibile in modo unico ad una funzione olomorfa, ϕ, in un intorno $I \subset \boldsymbol{C}^n$ di M. Sia E un qualsiasi sottoinsieme aperto, connesso e semplicemente connesso di U con $\bar{E} \subset U$ e contenente il disco degenere $p_0 = (0, 0)$. Se $b\mathcal{G}(S^1 \times E)$ indica la restrizione a $S^1 \times E$ di $\mathcal{G}\colon \bar{D} \times U \to \boldsymbol{C}^n$, è $I \supseteq b\mathcal{G}(S^1 \times E)$. Da [6; Th. 8.2] segue che esiste un intorno ω di $\tilde{M} = \mathcal{G}(\bar{D} \times E)$ tale che ϕ si estende in modo unico ad una funzione olomorfa $\tilde{\phi}$ in ω. Se $0 < \delta' \equiv \min\{\delta_0, \operatorname{dist}(b\mathcal{G}(S^1 \times E), \boldsymbol{C}^n \setminus I)\}$, allora per ogni $0 < \delta < \delta'$ esiste una unica estensione olomorfa $\tilde{\varphi}$ di $\tilde{\phi}$ in un intorno Ω di $\tilde{M}_\delta \equiv \mathcal{G}_\delta(D_\delta \times E)$. Il lemma è provato.

Si osservi che se $H \in \mathcal{U}(B, 0)$ non è restrittivo supporre che $\mathrm{Lip}^B(h) \leqslant (c\|T\|_\alpha)^{-1} < 1$ dove c è la costante fornita da [6; Th. 6.1].

Usando il precedente lemma ed i risultati di [6] si ha:

TEOREMA 5.2. – *Sia* $H \in \mathcal{U}(B, 0)$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \delta < \delta'$. *Allora esistono un intorno* E *di* 0 *in* $\boldsymbol{R}^l \times \mathcal{D}_m^\alpha(D_{\delta_0})$ *ed una funzione analitica reale* $\mathcal{F}: \bar{D} \times E \to \boldsymbol{C}^N$ *che è la restrizione a* $\bar{D} \times E$ *di una funzione analitica reale* $\mathcal{F}_\delta: D_\delta \times E \to \boldsymbol{C}^N$ *con* $\mathcal{F}_\delta(\cdot, p) \in \mathcal{D}_N^\alpha(D_\delta)$ *e* $\mathcal{F}(S^1 \times E) \subset M'$.

DIM. – La funzione $\mathcal{G}_\delta$ è analitica reale in $D_\delta \times E$ e per ogni fissato $p \in E$ $\mathcal{G}_\delta(\cdot, p) \in \mathcal{O}_n(D_\delta)$. Quindi

$$\mathcal{F}_\delta = \tilde{\varphi} \circ \mathcal{G}_\delta$$

è una funzione analitica reale definita su $D_\delta \times E$ e per ogni fissato $p \in E$, $\mathcal{F}_\delta(\cdot, p) \in \mathcal{O}_N(D_\delta)$. Inoltre

$$\mathcal{F}_\delta(S^1 \times E) = \mathcal{F}(S^1 \times E) = (\varphi \circ b\mathcal{G})(S^1 \times E) \subset M' .$$

Il teorema è provato ed abbiamo risalito ogni famiglia locale di dischi analitici $(c, \mathcal{W}_\delta)$ definita in $D_\delta \times E$ come dal diagramma (3.3).

6. – Il caso C^β, $4 \leqslant \beta \leqslant \infty$.

Sia B come nel paragrafo 5. Sia X un compatto di $\boldsymbol{R}$ ed $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Per ogni intero $k \geqslant 0$ definiamo

$$C^{k,\alpha}(X) = \Big\{w: X \to \boldsymbol{C}: |w|_{k,\alpha} = |w|^X_{k,\alpha} \equiv \sum_{|r| \leqslant k} |D^r w|_\alpha < \infty\Big\}.$$

Talvolta $C^{k,\alpha}(X)$ sarà usato come spazio di funzioni a valori reali, ma sarà chiaro sempre dal contesto.

Posto $C_l^{k,\alpha}(X) = C^{k,\alpha}(X) \times \ldots \times C^{k,\alpha}(X)$ (l-volte), sia $\mathcal{D}_m^{k,\alpha} = \mathcal{D}^{k,\alpha} \times \ldots \times \mathcal{D}^{k,\alpha}$ (m-volte) dove $\mathcal{D}^{k,\alpha} = \mathcal{O}(D) \cap C^{k,\alpha}(\bar{D})$. Si noti che la norma $\|T\|_{k,\alpha}$ dello operatore $T: C^{k,\alpha}(S^1) \to C^{k,\alpha}(S^1)$ è tale che $\|T\|_{k,\alpha} < \|T\|_\alpha$.

Sia M' una CR varietà non generica di classe C^β, $4 \leqslant \beta \leqslant \infty$ in un intorno di B, definita come in (2.1) da una funzione H_0 con

$$\begin{aligned} H_0 = (h_0, h_0', h_0'') \in C^\beta(B, 0) \equiv \\ \equiv \{H = (h, h', h'') \in C_l^\beta(B) \times C_K^\beta(B) \times C_K^\beta(B)\text{: valga (2.4) e } H(0) = DH(0) = 0\}. \end{aligned}$$

Non è restrittivo supporre $\mathrm{Lip}^B h_0 < 1$.

Sia M la varietà generica associata, definita da (2.2). Nel caso C^β non si conoscono teoremi di estensione olomorfa di φ, per cui non si può risalire direttamente un disco da M ad M'. Si può però risalire il bordo $g(S^1)$ di un disco $g = (f, w)$ in $\boldsymbol{C}^n$ con bordo su M, ad un insieme $\varphi(g(S^1)) \subset M'$. Il problema è provare che $\varphi(g(S^1))$ è il bordo di un disco analitico in $\boldsymbol{C}^N$.

Poichè $\varphi_j(g(S^1)) = g_j(S^1)$ $1 \leqslant j \leqslant n$, basterà far vedere che la funzione $q = (q_1, q_2, \dots, q_K)\colon D \to \boldsymbol{C}^K$ definita da

$$q_j(z) = (2\pi i)^{-1} \int_{S^1} \frac{\varphi_{n+j}(g(t))}{t - z}\, dt \qquad j = 1, 2, \dots, K \tag{6.1}$$

ed in D olomorfa, ha per traccia su S^1 $\big(\varphi_{n+1}\, g(S^1)), \dots, \varphi_{n+K}(g(S^1))\big)$. In tal caso $(g, q)\colon D \to \boldsymbol{C}^n \times \boldsymbol{C}^K$ è il risalimento in $\boldsymbol{C}^N$ del disco g in $\boldsymbol{C}^n$, ed ha bordo su M'.

Ciò è equivalente a provare che esiste una costante c tale che

$$\operatorname{Re} \varphi(g(e^{i\theta})) = c - T\big(\operatorname{Im} \varphi(g(e^{i\theta}))\big), \qquad e^{i\theta} \in S^1 \tag{6.2}$$

mentre in generale risulta

$$\operatorname{Re} \varphi(g(e^{i\theta})) + T\big(\operatorname{Im} \varphi(g(e^{i\theta}))\big) = c(e^{i\theta}). \tag{6.3}$$

Si noti che per definizione di φ, le prime n componenti di $c(e^{i\theta})$ in (6.3) sono costanti. Per le restanti K componenti si ha

$$h_0'(u(e^{i\theta}), w(e^{i\theta})) + T\big(h_0''(u(e^{i\theta}), w(e^{i\theta}))\big) = \tilde{c}(e^{i\theta}) \tag{6.4}$$

dove $\tilde{c}(e^{i\theta}) = \big(c_{n+1}(e^{i\theta}), \dots, c_{n+K}(e^{i\theta})\big)$.

Per provare che $\tilde{c}$ è costante, approssimeremo M' e quindi H_0, con una successione di CR varietà analitiche reali, M'^ν, non generiche definite come in (2.1) da $H^\nu = (h^\nu, h'^\nu, h''^\nu) \in \mathfrak{U}(B, 0)$ con

$$H^\nu \to H_0 \qquad \text{nella norma di} \qquad C^2(B, 0)\,. \tag{6.5}$$

L'esistenza di una tale successione è provata in [9].

Su ciascuna varietà M'^ν, il teorema 5.2 fornisce, per ogni δ sufficientemente piccolo, un intorno $E^\nu(\delta)$ di 0 in $\boldsymbol{R}^l \times \mathfrak{D}^\alpha_m(D_{\delta_0})$ ed il risalimento di ogni disco di parametri $(c, w) \in E^\nu(\delta)$ ad un disco analitico in $\boldsymbol{C}^N$ con bordo su M'^ν. Si noti che in tal caso $\tilde{c}^\nu(e^{i\theta})$ è costante.

Il problema è provare che $\{E^\nu(\delta)\}$ tende per $\gamma \to \infty$ e $\delta \to 0$ ad un insieme aperto. A tale scopo enunciamo il seguente lemma che segue da un attento uso del teorema della funzione implicita in spazi di Banach e dal precedente teorema 5.2.

LEMMA 6.1. – *Fissato* $H_0 \in C^\beta(B, 0)$ *si consideri per ogni* $A > 0$ *tale che* $A + \operatorname{lip}^B h_0 < 1$ *l'insieme* $\mathfrak{J} = \{H \in \mathcal{U}(B, 0) \colon |h - h_0|^B_{1,1} < A\}$. *Esiste un* $\varepsilon > 0$ *tale che, fissati* $0 < \alpha < 1$, $0 < \delta_0 < 1$, *per ogni* $0 < \delta < \delta_0$ *ed* $H \in \mathfrak{J}$ *l'*ε*-intorno* $E = E(A)$ *di* 0 *in* $\boldsymbol{R}^l \times \mathfrak{D}^\alpha_m(D_\delta)$ *ha la proprietà che per ogni* $p \in E$ *esiste una unica funzione analitica reale,* $\mathfrak{F}(H) \colon \bar{D} \times E \to \boldsymbol{C}^N$ *con* $\mathfrak{F}(H)(\cdot, p) \in \mathfrak{D}^\alpha_N$ *e* $\mathfrak{F}(H)(S^1 \times E)$ *sulla varietà definita come in* (2.1) *da* H.

DIM. Avremo bisogno delle seguenti notazioni [6; § 6]: sia $\tilde{h}$ la estensione olomorfa di h in un opportuno intorno di 0 nel complessificato di B. È possibile rappresentare $\tilde{h}$ come una funzione, $\tilde{h}(u, w, w^*)$, di (u, w, w^*) in $\boldsymbol{C}^l \times \boldsymbol{C}^{2m}$ dove $w = w_1 + iw_2$, $w^* = w_1 - iw_2$ e w_1, w_2 sono l'estensione nel complessificato di $\boldsymbol{C}^m$ rispettivamente di $\operatorname{Re} w$ e $\operatorname{Im} w$. Poichè per ogni $H \in \mathfrak{J}$ $|h|^B_{1,1} \leqslant |h_0|^B_{1,1} + A$, è possibile trovare nel complessificato di $\boldsymbol{R}^l \times \boldsymbol{C}^m$ un intorno compatto, conveseo, di $0, \tilde{B}_H$, tale che $\tilde{B}_H \supset B$ e $|\tilde{h}|^{\tilde{B}_H}_{1,1} < 2(|h_0|^B_{1,1} + A)$. Restringendo eventualmente B si può assumere $\tilde{B}_H = I_H \times \boldsymbol{I}_H \subset \boldsymbol{C}^l \times \boldsymbol{C}^{2m}$ con I_H e $\boldsymbol{I}_H$ aperti. Per ogni $0 < \delta < \delta_0$ ed ogni $H \in \mathfrak{J}$ consideriamo l'intorno $\tilde{A}_\delta = \tilde{A}(\alpha, \delta, H)$ dell'origine in $\mathcal{A}^\alpha_{l,\delta} \times \boldsymbol{C}^1 \times \mathcal{A}^\alpha_{2m,\delta}$ tale che $\big(u(re^{i\theta}), w(re^{i\theta}), w^*(re^{i\theta})\big) \in \tilde{B}_H$ per ogni $(u, c, w, w^*) \in \tilde{A}_\delta$ e $re^{i\theta} \in \bar{A}_\delta$. Consideriamo gli operatori $\tilde{\mathfrak{K}}$, $\tilde{F}(H)$ definiti in $\tilde{A}_\delta$ ed a valori in $\mathcal{A}^\alpha_{l,\delta}$ da

$$\tilde{\mathfrak{K}}(u, c, w, w^*)(re^{i\theta}) = \tilde{h}\big(u(re^{i\theta}), w(re^{i\theta}), w^*(re^{i\theta})\big)$$

e

$$\tilde{F}(H)(u, c, w, w^*) = u - c + \tilde{T}\big(\tilde{\mathfrak{K}}(u, c, w, w^*)\big)$$

dove $\tilde{T}$ è l'estensione dell'operatore di Hilbert T sull'anello $\bar{A}_\delta$ ed è un operatore $\boldsymbol{C}$-lineare limitato da $\mathcal{A}^\alpha_\delta$ in sè per ogni $0 < \delta < 1$ e $0 < \alpha < 1$. In [6; § 6] si prova che $\tilde{\mathfrak{K}}$ e $\tilde{F}(H)$ sono operatori olomorfi ed inoltre che

$$\|T\|_{\alpha,\delta} \leqslant \|T\|_\alpha \max\big((1-\delta)^{-\alpha}, (1+\delta)^\alpha\big) \leqslant \|T\|_\alpha \max\big((1-\delta_0)^{-\alpha}, (1+\delta_0)^\alpha\big). \tag{6.6}$$

Si noti che esistono m_1, m_2 tali che se $u \in C^\alpha_l(S^1)$ e $p = (c, w) \in \mathfrak{D}^\alpha_m$ con $\sup_{S^1} |u| < m_1$, $\sup_{\bar{D}} |(c, w)| < m_2$ allora $(u, c, w)(e^{i\theta}) \in B$. Perciò se $u \in C^\alpha_l(S^1)$ e $p \in \mathfrak{D}^\alpha_m(D_\delta)$ con $|u|_\alpha < m_1$, $|p|_{\alpha,\delta} < m_2$ risulta $(u, c, w)(e^{i\theta}) \in B$.

Passiamo a dimostrare il lemma. Seguendo la dimostrazione del teorema della funzione implicita fatta in [4; Th. 10.2.1] ricerchiamo una soluzione $u \in \mathcal{A}^\alpha_{l,\delta}$ dell'equazione funzionale $\tilde{F}(H)(u, c, w, w^*) = 0$.

Poichè $H \in \mathcal{U}(B, 0)$ l'unico problema è provare che esistono due numeri positivi $\varepsilon' < m_1$, $\varepsilon'' < m_2$ indipendenti da H, δ, α, tali che per ogni u_1, $u_2 \in \mathcal{A}^\alpha_{l,\delta}$ con $u_i(\bar{A}_\delta) \in I_H$ e $|u_i|_{\alpha,\delta} < \varepsilon'$ $i = 1, 2$ ed ogni $p^* = (c, w, w^*)$ con $p^*(\bar{A}_\delta) \in \boldsymbol{C}^l \times \boldsymbol{I}_H$ e $|p^*|_{\alpha,\delta} < \varepsilon''$ si abbia

$$|\tilde{F}(H)(u_1, p^*) - \tilde{F}(H)(u_2, p^*) - (u_1 - u_2)|_{\alpha,\delta} \leqslant (\tfrac{1}{2})|u_1 - u_2|_{\alpha,\delta}. \tag{6.7}$$

È

$$
\begin{aligned}
|\tilde{F}(H)(u_1, p^*) - \tilde{F}(H)(u_2, p^*) - (u_1 - u_2)|_{\alpha,\delta} &= |\tilde{T}(\tilde{\mathfrak{K}}(u_1, p^*) - \tilde{\mathfrak{K}}(u_2, p^*))|_{\alpha,\delta} \leqslant \\
&\leqslant \|\tilde{T}\|_{\alpha,\delta} \Big| \int_0^1 D\tilde{\mathfrak{K}}\big((u_2, p^*) + (\tau(u_1, p^*) - (u_2, p^*))\big)\big((u_1, p^*) - (u_2, p^*)\big)\, d\tau \Big| \leqslant \\
&\leqslant \|\tilde{T}\|_{\alpha,\delta} |\tilde{h}|_{1,1}^{\tilde{B}_H}(|u_2, p^*|_{\alpha,\delta} + |u_1 - u_2|_{\alpha,\delta})\, |u_1 - u_2|_{\alpha,\delta}.
\end{aligned}
$$

Poichè da (6.6) segue

$$
\|\tilde{T}\|_{\alpha,\delta} |\tilde{h}|_{1,1}^{\tilde{B}_H} \leqslant \|T\|_\alpha \max\big((1 - \delta_0)^{-\alpha}, (1 + \delta_0)^\alpha\big)(2|h_0|_{1,1}^{B} + A) \equiv \hat{A}
$$

(6.7) segue ad esempio con $\varepsilon' < \min(1/8\,\hat{A}, m_1)$ e $\varepsilon'' < \min(1/8\,\hat{A}, m_2)$. Posto $\hat{\varepsilon} = \min\big(\varepsilon'', \varepsilon'/(2\hat{A} + 1)\big)$ si ha per ogni $H \in \mathfrak{J}$, ogni $p^* \in \boldsymbol{C}^l \times \mathcal{A}_{2m,\delta}^\alpha$ con $p^*(\bar{A}_\delta) \in \boldsymbol{C}^l \times \boldsymbol{I}_H$ e $|p^*|_{\alpha,\delta} < \hat{\varepsilon}$

$$
|\tilde{F}(H)(0, p^*)|_{\alpha,\delta} \leqslant (1 + \hat{A})|p^*|_{\alpha,\delta} < \varepsilon'/2 .
$$

Così, per ogni $H \in \mathfrak{J}$ e ogni $p^*(\bar{A}_\delta) \in \boldsymbol{C}^l \times \boldsymbol{I}_H$ con $|p^*|_{\alpha,\delta} < \hat{\varepsilon}$, esiste una unica applicazione olomorfa $\tilde{u}(H)(p^*) : \bar{A}_\delta \to I_H$ con $|\tilde{u}|_{\alpha,\delta} < \varepsilon'$ tale che $\tilde{F}(H)(\tilde{u}(H)(p^*), p^*) = 0$.

Analogamente a quanto fatto in [6; Th. 6.1] se scegliamo $c \in \boldsymbol{R}^l$, $w^* = \bar{w}$ su S^1 ed $r = 1$ si ha che $\tilde{u}(H)(p^*)|_{S^1}$ ha valori reali. Per ogni $0 < \delta < \delta_0$ sia $c \in R^l$, $w \in \mathfrak{D}_m^\alpha(D_\delta)$ con $|p|_{\alpha,\delta} = |c| + |w|_{\alpha,\delta} < \hat{\varepsilon}/3$. Per ogni $H \in \mathfrak{J}$ esiste un $0 < \delta' = \delta'(H) < \delta$ tale che se w^* è l'estensione olomorfa di $\bar{w}|_{S^1}$, allora $p^*(\bar{A}_{\delta'}) = (c, w, w^*)(\bar{A}_{\delta'}) \subset \boldsymbol{C}^l \times \boldsymbol{I}_H$ con $|p^*|_{\alpha,\delta'} < \hat{\varepsilon}$. Per costruzione esiste quindi una funzione $u : \hat{E} \equiv \{p \in \boldsymbol{R}^l \times \mathfrak{D}_m^\alpha(D_\delta) : |p|_{\alpha,\delta} < \hat{\varepsilon}/3\} \to \mathcal{A}_{l,\delta'}^\alpha$, con valori reali su S^1. Poichè $\tilde{u}(H)$ è olomorfa e la trasformazione lineare di $\mathfrak{D}_m^\alpha(D_\delta)$ in $\mathcal{A}_{2m,\delta'}^\alpha$, è limitata segue che u è analitica reale. Si noti che per ogni H, α, δ $\hat{E}$ è contenuto nell'intorno U di [6; Th. 6.1] corrispondente ad α, δ'. Il lemma segue dal teorema 5.2 per ogni fissato $0 < \varepsilon < \hat{\varepsilon}/3$ con

$$
E = E(A) \equiv \{p \in \boldsymbol{R}^l \times \mathfrak{D}_m^\alpha(D_\delta) : |p|_{\alpha,\delta} < \varepsilon\} . \tag{6.8}
$$

Torniamo al problema iniziale di dimostrare che $\tilde{c}(e^{i\theta})$ in (6.4) è costante. In quanto segue indicheremo con $C^{k,s}$ lo spazio delle funzioni $f(\xi, p)$ tali che

i) $f(\cdot, p) \in C^k\ \forall p$; $f(\xi, \cdot) \in C^s\ \forall \xi$,

ii) non interessa l'ordine di derivazione.

Mentre $f \in C^{k,s;\alpha}$ se inoltre

iii) tutte le derivate in i) sono di classe C^α.

Sia $0<\alpha<1$ e $L=\{L^k\}$ una successione di numeri reali positivi. Indichiamo con $B^\alpha\{L\}$ lo spazio di Banach

$$B^\alpha\{L\}=\left\{f=f(e^{i\theta})\in C^\infty(S^1):\ \|f\|_L=\sup_k\frac{|D^kf|_\alpha^{S^1}}{L^k}<\infty\right\},$$

e con $\mathfrak{D}_m^\alpha\{L\}$ il sottospazio di $\mathcal{O}_m(D)\cap C_m^\infty(\bar D)$ delle funzioni con valori al bordo in $B_m^\alpha\{L\}$.

TEOREMA 6.2. – *a) Sia la funzione $H_0=(h_0,h_0',h_0'')$ che definisce M' di classe $C^{k+s+1}(B,0)$ $k+s\geqslant3$, $s\geqslant1$ ($C^{k+s+1,1}(B,0)$ $k+s\geqslant3$). Allora, per ogni $0<\alpha<1$ esiste un intorno E di 0 in $\mathbf{R}^l\times\mathfrak{D}_m^{k,\alpha}$ ed una funzione $\mathfrak{Z}:\bar D\times E\to\mathbf{C}^N$ tale che $\mathfrak{Z}\in C^{k,s}$ ($C^{k,s;\alpha}$) e $\mathfrak{Z}(\cdot,p)\in\mathfrak{D}_N^{k,\alpha}$ per ogni $p\in E$. Inoltre $\mathfrak{Z}(S^1\times E)\subset M'$.*

b) Sia la funzione H_0 di classe $C^\infty(B,0)$. Allora, per ogni $0<\alpha<1$ esistono una successione $\{L\}$, un intorno $E=E(\alpha,L)$ dell'origine in $\mathbf{R}^l\times\mathfrak{D}_m^\alpha\{L\}$ ed una funzione $\mathfrak{Z}:\bar D\times E\to\mathbf{C}^N$ tale che $\mathfrak{Z}(\cdot,p)\in\mathfrak{D}_N^\alpha\{L\}$ per ogni $p\in E$ e $\mathfrak{Z}\in C^\infty$ rispetto a $|\xi|+|c|+\|w\|_L$. Inoltre $\mathfrak{Z}(S^1\times E)\subset M'$.

Nota. – a) Se $H_0\in C^{k+1,1}(B,0)$ $k\geqslant3$ si ha inoltre che $D_pD_\xi^j\mathfrak{Z}$ esiste in $\bar D\times\{0\}$ fortemente per ogni $0\leqslant j\leqslant k$ [6; § 4 def. forte differenziabilità].

b_1) La successione $\{L\}$ dipende dalla funzione H_0 ma può essere scelta in modo uniforme rispetto ad ogni H in sottoinsiemi limitati di $C^\infty(B,0)$ [6; remark 1 Th. 7.1].

b_2) Per ogni $\delta_0>0$ è possibile trovare una successione $\{L\}$ ed un intorno $E=E(\delta_0,\alpha,L)\subset\mathbf{R}^l\times\mathfrak{D}_m^\alpha(D_{\delta_0})$ tale che la funzione $\mathfrak{Z}$ della parte b) ha le stesse proprietà del teorema. In tal caso $\mathfrak{Z}$ è C^∞ rispetto alla norma $|\xi|+|c|+|w|_\alpha^{\bar D_{\delta_0}}$

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA. – Dimostriamo l'esistenza di $\mathfrak{Z}$ nel caso più debole, cioè supponiamo $H_0\in C^4(B,0)$.

Da [6; Th. 5.2] si ha l'esistenza per ogni $0<\alpha<1$ di 4 costanti $\eta_i^\alpha=\eta_i(\alpha,h_0)$ $i=1,2,3,4$, tali che

$$|u_1-u_2|_\alpha\leqslant\eta_4^\alpha\{|c_1-c_2|+|w_1-w_2|_\alpha^{\bar D}+|h_1-h_2|_{1,1}^B\}\tag{6.9}$$

per ogni $(c_j,w_j,h_j)\in\mathbf{R}^l\times\mathfrak{D}_m^\alpha\times C_l^{1,1}(B,0)$ con $|c_j|<\eta_1^\alpha$, $|w_j|_\alpha^{\bar D}<\eta_2^\alpha$, e $|h_j-h_0|_{1,1}^B<\eta_3^\alpha$, $j=1,2$. La funzione u_j è la soluzione unica in $C_l^\alpha(S^1)$ di (3.1) per h_j corrispondente ai parametri (c_j,w_j) $j=1,2$. Definiamo

$$w^\gamma(\xi)=w\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\,\xi\right).$$

Per ogni $0<\alpha<1$, se $w\in\mathfrak{D}_m^\alpha$ allora $w^\gamma\in\mathfrak{D}_m(D_{1/\gamma})$, e $|w^\gamma|_\alpha^{D_{1/\gamma}}\leqslant|w|_\alpha^{\bar{D}}$. Inoltre si ha

$$(6.10)\qquad |w-w^\gamma|_{\alpha'}^{\bar{D}}=\sup_{\xi\in\bar{D}}|w(\xi)-w^\gamma(\xi)|+\sup_{\substack{\xi\neq\zeta\\ \xi,\zeta\in\bar{D}}}\frac{|w(\xi)-w^\gamma(\xi)-w(\zeta)+w^\gamma(\zeta)|}{|\xi-\zeta|^{\alpha'}}\leqslant$$

$$\leqslant|w|_\alpha\left|\frac{1}{1+\gamma}\right|^\alpha+\sup_{\substack{\xi,\zeta\in\bar{D}\\ |\xi-\zeta|\geqslant1/\gamma}}\frac{|w(\xi)-w^\gamma(\xi)-w(\zeta)+w^\gamma(\zeta)|}{|\xi-\zeta|^{\alpha'}}+$$

$$+\sup_{\substack{\xi,\zeta\in\bar{D}\\ |\xi-\zeta|<1/\gamma}}\frac{|w(\xi)-w^\gamma(\xi)-w(\zeta)+w^\gamma(\zeta)|}{|\xi-\zeta|^{\alpha'}}\leqslant$$

$$\leqslant|w|_\alpha\left|\frac{1}{1+\gamma}\right|^\alpha+\sup_{\substack{\xi,\zeta\in\bar{D}\\ |\xi-\zeta|\geqslant1/\gamma}}\frac{|w(\xi)-w^\gamma(\xi)|}{|\xi-\zeta|^{\alpha'}}+\sup_{\substack{\xi,\zeta\in\bar{D}\\ |\xi-\zeta|\geqslant1/\gamma}}\frac{|w(\zeta)-w^\gamma(\zeta)|}{|\xi-\zeta|^{\alpha'}}+$$

$$+\sup_{\substack{\xi,\zeta\in\bar{D}\\ |\xi-\zeta|<1/\gamma}}\frac{|w(\xi)-w(\zeta)|}{|\xi-\zeta|^{\alpha'}}+\sup_{\substack{\xi,\zeta\in\bar{D}\\ |\xi-\zeta|<1/\gamma}}\frac{|w^\gamma(\xi)-w^\gamma(\zeta)|}{|\xi-\zeta|^{\alpha'}}\leqslant$$

$$\leqslant|w|_\alpha\left|\frac{1}{1+\gamma}\right|^\alpha+2\,|w|_\alpha\left|\frac{1}{1+\gamma}\right|^\alpha|\gamma|^{\alpha'}+2|w|_\alpha|\gamma|^{\alpha'-\alpha}.$$

Perciò per $0<\alpha'<\alpha<1$ $w^\gamma\to w$ con $\gamma\to\infty$ in $\mathfrak{D}_m^{\alpha'}$.

Per ogni $0<\alpha'<\alpha<1$ fissati è possibile, in virtù di (6.5), trovare un γ_0 tale che per ogni $\gamma\geqslant\gamma_0$ h^γ soddisfi

$$(6.11)\qquad |h^\gamma-h_0|_{1,1}^B<\min\left(\eta_3^\alpha,\eta_3^{\alpha'},\frac{1-\operatorname{lip}^B h_0}{2}\right)\equiv A\,.$$

Posto

$$E_0=\left\{(c,w)\in\boldsymbol{R}^l\times\mathfrak{D}_m^\alpha:\,|c|<\min(\eta_1^\alpha,\eta_1^{\alpha'},\varepsilon/2);\,|w|_\alpha^{\bar{D}}<\min\left(\eta_2^\alpha,\frac{\eta_2^{\alpha'}}{2},\varepsilon/2\right)\right\}$$

dove ε è come nel lemma 6.1, da (6.9) si ha per ogni $\gamma\geqslant\gamma_0$

$$(6.12)\qquad |u^\gamma-u|_\alpha\leqslant\eta_4^\alpha(|w^\gamma-w|_\alpha^{\bar{D}}+|h^\gamma-h_0|_{1,1}^B)\,,$$

e poichè $|w|_{\alpha'}<2|w|_\alpha<\eta_2^{\alpha'}$ si ha

$$(6.13)\qquad |u^\gamma-u|_{\alpha'}\leqslant\eta_4^{\alpha'}(|w^\gamma-w|_{\alpha'}^{\bar{D}}+|h^\gamma-h_0|_{1,1}^B)$$

con u^γ e u soluzioni uniche di (3.1) per h^γ e h_0 in $C_l^\alpha(S^1)$ rispettivamente corrispondenti ai parametri (c,w^γ) e (c,w). Inoltre mediante il lemma 6.1 è possibile risalire in modo unico ogni disco $(c,w^\gamma)\in\boldsymbol{R}^l\times\mathfrak{D}_m^\alpha(D_{1/\gamma})$, $\gamma\geqslant\gamma_0$, ad un disco con bordo $(u^\gamma+ih^\gamma(u^\gamma,w^\gamma)$, $(h'^\gamma+ih''^\gamma)(u^\gamma,w^\gamma))$ su M'^γ. Risulta pertanto

$$(6.14)\qquad h'^\gamma(u^\gamma(e^{i\theta}),w^\gamma(e^{i\theta}))+T\big(h''^\gamma(u^\gamma(e^{i\theta}),w^\gamma(e^{i\theta}))\big)=\tilde{c}^\gamma\,,\qquad \gamma\geqslant\gamma_0$$

con $\tilde{c}^\gamma$ costante in $\boldsymbol{R}^K$.

Passiamo ora a provare che $\tilde{c}^\gamma$ converge a $\tilde{c}(e^{i\theta})$ con il che avremo provato che $\tilde{c}(e^{i\theta})$ è costante in (6.4). Sottraendo da (6.14)-(6.4), con facili passaggi si ha per ogni $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$

$$\begin{aligned}(6.15)\qquad |\tilde{c}^\gamma-\tilde{c}(e^{i\theta})|&\leqslant\sup_\theta|\tilde{c}^\gamma-\tilde{c}|\leqslant\sup\big|\big(h'^\gamma(u^\gamma,w^\gamma)-h'_0(u,w)\big|+\\&+\big|T\big(h''^\gamma(u^\gamma,w^\gamma)-h''_0(u,w)\big|\big)\big)\leqslant\\&\leqslant|h'^\gamma(u^\gamma,w^\gamma)-h'^\gamma(u,w)|_{\alpha'}+|h'^\gamma(u,w)-h'_0(u,w)|_{\alpha'}+\\&+\|T\|_{\alpha'}|h''^\gamma(u^\gamma,w^\gamma)-h''^\gamma(u,w)|_{\alpha'}+\\&+\|T\|_{\alpha'}|h''^\gamma(u,w)-h''_0(u,w)|_{\alpha'}=l_1+l_2+l_3+l_4\,.\end{aligned}$$

In [6; lemma 5.1] è stato provato che se $h\in C_l^{1,1}(B)$ allora la trasformazione $\mathcal{H}\colon A_0\subset C_l^\alpha(S^1)\times\boldsymbol{R}^l\times\mathfrak{D}_m^\alpha\to C_l^\alpha(S^1)$ definita sullo aperto A_0 da

$$\mathcal{H}(u,p)(e^{i\theta})=h\big(u(e^{i\theta}),w(e^{i\theta})\big)$$

è $C^{0,1}$ con costante di Lipschitz che dipende da A_0 e da $|h|_{1,1}^B$. Poichè esiste una costante σ tale che $|H^\gamma|_{1,1}^B<\sigma$ per $\forall\gamma\geqslant\gamma_0$ allora esistono due costanti $\lambda_j=\lambda_j(\sigma)$ $j=1,2$ tali che da (6.13) si ha

$$\begin{aligned}&l_1\leqslant\lambda_1(|u^\gamma-u|_{\alpha'}+|w^\gamma-w|_{\alpha'})\leqslant\lambda_1(\eta_4^{\alpha'}+1)|w^\gamma-w|_{\alpha'}+\lambda_1\eta_4^{\alpha'}|h^\gamma-h_0|_{1,1}^B\,,\\&l_3\leqslant\|T\|_{\alpha'}\lambda_2(\eta_4^{\alpha'}+1)|w^\gamma-w|_{\alpha'}+\|T\|_{\alpha'}\lambda_2\eta_4^{\alpha'}|h^\gamma-h_0|_{1,1}^B\,,\\&l_2\leqslant|h'^\gamma-h'_0|_{0,1}^B|(u,w)|_{\alpha'}\leqslant|h'^\gamma-h'_0|_{1,1}^B|(u,w)|_{\alpha'}\,,\\&l_4\leqslant\|T\|_{\alpha'}|h''^\gamma-h''_0|_{0,1}^B|(u,w)|_{\alpha'}\leqslant\|T\|_{\alpha'}|h''^\gamma-h''_0|_{1,1}^B|(u,w)|_{\alpha'}\,.\end{aligned}$$

Si osservi che la prima maggiorazione per l_1, l_3 è stata provata in [6; lemma 5.1]. Da (6.5) e (6.10) segue che per ogni $\varepsilon>0$ è possibile trovare un $\gamma_\varepsilon>\gamma_0$ tale che per ogni $\gamma>\gamma_\varepsilon$ e per ogni $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$ risulta

$$|\tilde{c}^\gamma-\tilde{c}(e^{i\theta})|<\varepsilon\,.$$

Si è così provato che $(c_1,\dots,c_n,\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_K)$ è una costante di $\boldsymbol{R}^N$. È così possibile risalire ogni disco, sufficientemente piccolo, (c,w) in $T_0(M')$ ad un disco (f,w,q) in $\boldsymbol{C}^N$ con bordo su M', almeno quando M' è C^4.

Per dimostrare la parte $a)$ del teorema, supponiamo $H_0\in C^{k+s+1}(B,0)$ $k+s\geqslant3$, $s\geqslant1$ $\big(C^{k+s+1,1}(B,0)$ $s+k\geqslant3\big)$. Sia E'_0 la retroimmagine di E_0 mediante l'inclusione di $\boldsymbol{R}^l\times\mathfrak{D}_m^{k,\alpha}$ in $\boldsymbol{R}^l\times\mathfrak{D}_m^\alpha$ e sia U l'intorno di 0 in $\boldsymbol{R}^l\times\mathfrak{D}_m^{k,\alpha}$ di [6; Th. 5.1]. Poniamo

$$E=E'_0\cap U$$

e definiamo la funzione $\mathfrak{J}: \bar{D}\times E \to \boldsymbol{C}^N$ nel modo seguente

$$\mathfrak{J}(\xi, p) = (g_1(\xi, p), \dots, g_n(\xi, p), q_1(\xi, p), \dots, q_K(\xi, p)) \tag{6.16}$$

dove

$$g(\xi, p) = (f(\xi, p), w(\xi, p)) \qquad p = (c, w)$$

è il risalimento in $\boldsymbol{C}^N$ del disco di parametri p, e q_j è come in (6.1). Risulta $\mathfrak{J}(S^1\times\times E)\subset M'$ in quanto abbiamo precedentemente provato che per $j = 1, \dots, K$, essendo $E \subset E_0$, risulta

$$q_j(e^{i\theta}, p) = \varphi_{n+j}(g(e^{i\theta}, p)) = h'_{0,j}(u(e^{i\theta}, p), w(e^{i\theta})) + ih''_{0,j}(u(e^{i\theta}, p), w(e^{i\theta}))\,. \tag{6.17}$$

Facciamo vedere che $\mathfrak{J} \in C^{k+s}$ $(C^{k+s,\alpha})$. Si osservi che $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_n) \in C^{k,s}$ $(C^{k,s;\alpha})$ [6; Th. 8.1] e che poichè $E \subset U$ la soluzione u di (3.1) corrispondente ad h_0 è di classe C^s $(C^{s,1})$ come funzione da $E \subset \boldsymbol{R}^l\times\mathfrak{D}^{k,\alpha}_m$ in $C^{k,\alpha}_l(S^1)$. Da [6; lemma 5.1] segue che le funzioni $q_j|_{S^1}: E \to C^{k,\alpha}(S^1)$ $j = 1, \dots, K$ sono di classe C^s $(C^{s,1})$. Dal teorema di Privaloff [3] segue che $q: E \to \mathfrak{D}^{k,\alpha}_K$ definita da $q(p)(\xi) = q(\xi, p)$ è anche di classe $C^s(C^{s,1})$. A questo punto è possibile fare con la funzione q gli stessi passi fatti per la funzione f in [6; Th. 8.1]; si ottiene così che $\mathfrak{J}(\cdot, p) \in \mathfrak{D}^{k,\alpha}_N$ e $\mathfrak{J} \in C^{k,s}$ $(C^{k,s;\alpha})$.

Passiamo a dimostrare la parte b). Supponiamo $H_0 \in C^\infty(B, 0)$. Con gli stessi passi fatti in [6; Th. 7.1] sostituendo alla funzione h la tripla H_0 è possibile trovare una successione $\{L\}$ tale $\mathcal{K}_0$, $\mathcal{K}'_0$, $\mathcal{K}''_0$ siano di classe C^∞ in un intorno $A\{L\}$ dell'origine in $B^\alpha_l\{L\}\times\boldsymbol{R}^l\times\mathfrak{D}^\alpha_m\{L\}$ e l'immagine di $A\{L\}$ sia un sottoinsieme limitato di $B^\alpha_l\{L\}\times\times B^\alpha_K\{L\}\times B^\alpha_m\{L\}$. Se E''_0 è la retroimmagine di E_0 mediante l'inclusione di $\boldsymbol{R}^l\times\mathfrak{D}^\alpha_m\{L\}$ a $\boldsymbol{R}^l\times\mathfrak{D}^\alpha_m$, posto

$$E = E''_0 \cap U$$

consideriamo la funzione $\mathfrak{J}: \bar{D}\times E \to \boldsymbol{C}^N$ definita da (6.16). Vale ancora (6.17) e pertanto $b\mathfrak{J} \subset M'$. Da [6; Th. 7.1] segue che la soluzione, u, di (3.1) $u: U \to B^\alpha_l\{L\}$ è di classe C^∞ per $p \in U$, mentre $\mathcal{G} \in C^\infty$ [6; Th. 8.1]. Da (6.17) e dalla regolarità di $\mathcal{K}'_0$, $\mathcal{K}''_0$ segue che $q_j|_{S^1}: E \to B^\alpha\{L\}$ è di classe C^∞. Dal teorema di Privaloff si ha che $q: E \to D^\alpha_K\{L\}$ è di classe C^∞. Con argomenti simili a [6; Th. 8.1] si ottiene che $\mathfrak{J}(\cdot, p) \in \mathfrak{D}^\alpha_N$ e $J \in C^\infty$. Il teorema è provato.

La nota a) segue dal fatto che $D_p D^j_\xi \mathcal{G}$ esiste fortemente in $\bar{D}\times\{0\}$ per $1 \leqslant j \leqslant k$ [6; th. 8.1, remark]. Poichè $\mathcal{K}'$ e $\mathcal{K}''$ sono fortemente differenziabili nell'origine [6; lemma 5.1c)], è possibile provare la forte differenziabilità in $\bar{D}\times\{0\}$ di q. Si noti che l'osservazione b_2 segue (come in [6; Th. 7.1b)]) scegliendo una successione $\{L\}$ in modo che l'inclusione $\mathfrak{D}^\alpha_m(D_0) \hookrightarrow D^\alpha_m\{L\}$ risulti di classe C^∞.

7. – Stabilità.

Analogamente a quanto è stato provato in [6; Th. 5.2] per una varietà generica, è possibile dare un teorema di stabilità anche nel caso non generico supponendo però che le funzioni che definiscono le varietà siano nulle fino al secondo ordine in 0.

Prima di enunciare il teorema di stabilità proviamo il seguente teorema che permette di risalire dischi analitici su varietà definite da funzioni H che stanno in un certo intorno di una assegnata $H_0 = (h_0, h_0', h_0'')$.

Sia E come nel teorema 6.2.

TEOREMA 7.1. – *Sia la funzione H_0 che definisce M' di classe $C^{k+s+1}(B,0)$ $k+s\geqslant 3$, $s\geqslant 1$ $(C^{k+s+1,1}(B,0)$ $k+s\geqslant 3)$. Allora per ogni $0<\alpha<1$ esistono un intorno I di H_0 in $C^{k+s+1}(B,0)\,(C^{k+s+1,1}(B,0))$, un intorno E di 0 in $\mathbf{R}^l\times\mathfrak{D}_m^{k,\alpha}$ ed una funzione $\mathfrak{Y}$: $\bar{D}\times E\times I\to\mathbf{C}^N$ che per ogni fissato $H\in I$ fornisce il risalimento in $\mathbf{C}^N$ di un disco in E, con bordo sulla varietà definita da H come in (2.1). Inoltre $\mathfrak{Y}(\cdot\,,p,H)\in\mathfrak{D}_N^{k,\alpha}$ e $\mathfrak{Y}(\cdot\,,\cdot\,,H)\in C^{k,s}$ $(C^{k,s;\alpha})$.*

DIM. – Supponiamo $H_0\in C^{k+s+1}(B,0)$ e sia A come in (6.11). Poniamo

$$I=\{H\in C^{k+s+1}(B,0)\colon |h-h_0|_{1,1}^{B}<A/2\}\,.$$

Per ogni $H\in I$ sia H^γ una successione di funzioni analitiche reali con $H^\gamma\to H$ in $C^2(B,0)$. Sussiste allora la (6.11) per ogni γ sufficientemente grande ed è possibile rifare per ogni H tutti i passi fatti nel teorema 6.2 per H_0. Si ottiene così una funzione $\mathfrak{Z}=\mathfrak{Z}(H)$ data da (6.16) con le proprietà del teorema 6.2. Per provare il teorema basta definire $\mathfrak{Y}(\xi,p,H)\colon\bar{D}\times E\times I\to\mathbf{C}^N$ mediante

$$\mathfrak{Y}(\xi,p,H)=\mathfrak{Z}(H)(\xi,p)\,. \tag{7.1}$$

Si osservi che la regolarità di $\mathfrak{Y}$ è, per ogni fissato H, quella di $\mathfrak{Z}(H)$ del teorema 6.2. Il caso $H_0\in C^{k+s+1,1}(B,0)$ $s+k\geqslant 3$, si tratta analogamente.

Nota. – Sussiste un teorema simile al precedente anche nel caso $H_0\in C^\infty(B,0)$.

La dipendenza di $\mathfrak{Y}$ da H è stabilita dal seguente teorema, dove E è definito come nel teorema 6.2.

TEOREMA 7.2. – *Sia $k\geqslant 3$ e $0<\alpha<1$. Sia $H_0\in C^{k+1,1}(B,0)$, allora esistono un intorno $\hat{U}$ di $(0,H_0)$ in $E\times C^{k+1,1}(B,\,0)$ ed una costante $\sigma=\sigma(k,\alpha,H_0)$ tale che*

$$\begin{aligned}|\mathfrak{Y}(\cdot\,,p_1,H_1)-\mathfrak{Y}(\cdot\,,p_2,H_2|_{k,\alpha}\leqslant\\ \leqslant\sigma\big(|c_1-c_2|+|w_1-w_2|_{k,\alpha}^{\bar{D}}+|h_1-h_2|_{k+1,1}^{B}+|h_1'-h_2'|_{k+1,1}^{B}+|h_1''-h_2''|_{0,1}^{B}\big)\end{aligned} \tag{7.2}$$

per ogni $(c_j,w_j,H_j)\in\hat{U}$, $j=1,2$.

DIM. – Sia $U \subset \boldsymbol{R}^l \times \mathfrak{D}_m^{k,\alpha} \times C^{k+1,1}(B)$ come in [6; Th. 5.2]. Poichè l'immersione $i: E \times C^{k+1,1}(B, 0) \to \boldsymbol{R}^l \times \mathfrak{D}_m^{k,\alpha} \times C^{k+1,1}(B)$ è continua, per ogni $A' > 0$ fissato, l'insieme

$$\hat{U} = \hat{U}(A') = i^{-1}(U) \cap \left(E \times \{H \in I: |h - h_0|^B_{k+1,1} + |h' - h'_0|^B_{k+1,1} + |h'' - h''_0|^B_{0,1} \leqslant A'\}\right)$$

è aperto. I è l'intorno di H_0 in $C^{k+1,1}(B, 0)$ del teorema precedente. Per ogni $(p, H) = (c, w, H) \in \hat{U}$ si ha

$$\mathfrak{Y}(\cdot, p, H) = \mathfrak{F}(H)(\cdot, p) = \big(g(H)(\cdot, p), q(H)(\cdot, p)\big) = \big(f(H)(\cdot, p), w(p), q(H)(\cdot, p)\big)$$

con

$$\mathfrak{Y}(S^1, p, H) = \big(u + ih(u, w), w, (h' + ih'')(u, w)\big).$$

Dal teorema di Privaloff si ha che esiste una costante $\sigma_1 = \sigma_1(k, \alpha)$ tale che per ogni disco analitico $g(\xi)$, $\xi \in \bar{D}$, con $\operatorname{Re} g(e^{i\theta}) \in C^{k,\alpha}(S^1)$ risulta

$$|g|^{\bar{D}}_{k,\alpha} \leqslant \sigma_1 |\operatorname{Re} g|^{S^1}_{k,\alpha} + |\operatorname{Im} g(0)| \leqslant \sigma_1 |\operatorname{Re} g|^{S^1}_{k,\alpha} + \sup_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} |\operatorname{Im} g(e^{i\theta})|.$$

L'ultima maggiorazione segue dalle proprietà delle funzioni armoniche. In quanto segue $\sigma = \sigma(k, \alpha, H_0, A')$ indicherà costanti differenti. Sempre dal teorema di Privaloff e da [6; Th. 5.2] segue che per ogni $(c_j, w_j, H_j) = (p_j, H_j) \in \hat{U}$ $j = 1, 2$ risulta

$$\begin{aligned} |f(H_1)(\cdot, p_1) - f(H_2)(\cdot, p_2)|^{\bar{D}}_{k,\alpha} &\leqslant \sigma_1 |u_1 - u_2|^{S^1}_{k,\alpha} + \sup_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} |h_1(u_1, w_1) - h_2(u_2, w_2)| \leqslant \\ &\leqslant \sigma\big(|c_1 - c_2| + |w_1 - w_2|_{k,\alpha} + |h_1 - h_2|^B_{k+1,1}\big) + \sup_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} |h_1(u_1, w_1) - h_2(u_1, w_1)| + \\ &+ \sup_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} |h_2(u_1, w_1) - h_2(u_2, w_2)| = b_1 + b_2 + b_3. \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} b_2 &\leqslant \operatorname{lip}^B (h_1 - h_2) \sup_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} \big(|u_1| + |w_1|\big) \leqslant \sigma |h_1 - h_2|^B_{0,1} \leqslant \sigma |h_1 - h_2|^B_{k+1,1} \\ b_3 &\leqslant \operatorname{lip}^B h_2 \sup_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} \big(|u_1 - u_2| + |w_1 - w_2|\big) \leqslant \\ &\leqslant (\operatorname{lip}^B h_0 + A')(|u_1 - u_2|_\alpha + |w_1 - w_2|_\alpha) \leqslant \\ &\leqslant \sigma\big(|c_1 - c_2| + |w_1 - w_2|_{k,\alpha} + |h_1 - h_2|^B_{k+1}\big). \end{aligned}$$

Da cui

$$|g(H_1)(\cdot, p_1) - g(H_2)(\cdot, p_2)|^{\bar{D}}_{k,\alpha} \leqslant \sigma\big(|c_1 - c_2| + |w_1 - w_2|^{\bar{D}}_{k,\alpha} + |h_1 - h_2|^B_{k+1,1}\big).$$

Per la funzione q abbiamo

$$\begin{aligned} |q(H_1)(\cdot, p_1) - q(H_2)(\cdot, p_2)|_{k,\alpha} &\leqslant \sigma_1 |h'_1(u_1, w_1) - h'_2(u_2, w_2)|^{S^1}_{k,\alpha} + \\ &\quad \sup_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} |h''_1(u_1, w_1) - h''_2(u_2, w_2)| = b_4 + b_5, \end{aligned}$$

dove

$$b_4 \leqslant \sigma_1\big(|h_1'(u_1, w_1) - h_1'(u_2, w_2)|_{k,\alpha}^{S^1} + |h_1'(u_2, w_2) - h_2'(u_2, w_2)|_{k,\alpha}^{S^1}\big) \leqslant$$
$$\leqslant \sigma |h_1'|_{k+1,1}\big(|u_1 - u_2|_{k,\alpha} + |w_1 - w_2|_{k,\alpha}\big) + |h_1' - h_2'|_{k+1,1}\big(|u_2|_{k,\alpha} + |w_2|_{k,\alpha}\big) \leqslant$$
$$\leqslant \sigma\big(|c_1 - c_2| + |w_1 - w_2|_{k,\alpha}^{\overline{P}} + |h_1 - h_2|_{k+1,1}^{B} + |h_1' - h_2'|_{k+1,1}\big)$$

$$b_5 \leqslant \sup_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} |h_1''(u_1, w_1) - h_2''(u_1, w_1)| + \sup_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} |h_2''(u_1, w_1) - h_2''(u_2, w_2)| \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{lip}^B\,(h_1'' - h_2'') \sup_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}\big(|u_1| + |w_1|\big) + \mathrm{lip}^B h_2'' \sup_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}\big(|u_1 - u_2| + |w_1 - w_2|\big) \leqslant$$
$$\leqslant \sigma\big(|h_1'' - h_2''|_{0,1}^{B}\big) + \big(|c_1 - c_2| + |w_1 - w_2|_{k,\alpha}^{\overline{P}} + |h_1 - h_2|_{k+1,1}^{B}\big)\,.$$

Il teorema è provato in quanto risulta

$$|\mathcal{Y}(\cdot, p_1, H_1) - \mathcal{Y}(\cdot, p_2, H_2)|_{k,\alpha} \leqslant \sigma\big(|c_1 - c_2| + |w_1 - w_2|_{k,\alpha}^{\overline{P}} +$$
$$+ |h_1 - h_2|_{k+1,1}^{B} + |h_1' - h_2'|_{k+1,1}^{B} + |h_1'' - h_2''|_{0,1}^{B}\big)\,.$$

8. - Osservazioni sulla non genericità.

Nota 1. - Da (7.2) segue che se $H_1, H_2 \in C^{k+1,1}(B, 0)$ $k \geqslant 3$ sono tali che

$$h_1 = h_2\,, \qquad h_1' = h_2' \tag{8.1}$$

allora è possibile risalire uno stesso disco di parametri $p = (c, w)$ di $\boldsymbol{R}^l \times \mathfrak{D}_m^{k,\alpha}$ a due dischi $\mathcal{Y}(\cdot, p, H_1)$, $\mathcal{Y}(\cdot, p, H_2)$ definiti come in (7.1) con bordi sulle varietà non generiche definite rispettivamente, secondo (2.1), da H_1 e H_2, perchè

$$|\mathcal{Y}(\cdot, p, H_1) - \mathcal{Y}(\cdot, p, H_2)|_{k,\alpha} \leqslant \sigma |h_1'' - h_2''|_{0,1}^{B}\,.$$

Ciò significa che risalimenti di uno stesso disco su varietà $C^{k+1,1}$ non generiche diverse, sono vicini nel senso $C^{k,\alpha}$ anche se le funzioni h_1'' e h_2'' non sono vicine in tal senso. Più in generale è:

Nota 2. - Siano M_1' e M_2' due varietà di tipo (2.1) definite rispettivamente da funzioni H_1 e H_2 di classe $C^4(B, 0)$ e tali che valga (8.1). Siano $\mathfrak{Z}(H_1)$, $\mathfrak{Z}(H_2)$ i risalimenti rispettivamente con bordi su M_1' e M_2' di uno stesso disco di parametri $p = (c, w)$ in $\boldsymbol{R}^l \times \mathfrak{D}_m^{\alpha}$. Si ha allora, per $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

$$h_j'(u(e^{i\theta}), w(e^{i\theta})) = -T\big(h_j''(u(e^{i\theta}), w(e^{i\theta}))\big) + c_j \qquad j = 1, 2 \tag{8.2}$$

dove u è la soluzione dell'equazione di Bishop relativa alla funzione $h_1 = h_2$ e corrispondente ai parametri (c, w), mentre $c_j = c_j((c, w)) \in \boldsymbol{R}^l$. Da (8.2) segue

$$0 = -T\big(h_1''(u(e^{i\theta}), w(e^{i\theta})) - h_2''(u(e^{i\theta}), w(e^{i\theta}))\big) + (c_1 - c_2) \tag{8.3}$$

e dalle proprietà di T che

$$h_1''(u(e^{i\theta}), w(e^{i\theta})) - h_2''(u(e^{i\theta}), w(e^{i\theta})) = C$$

dove $C = C(p) \in \boldsymbol{R}^l$, $p = (c, w)$.

Si vede quindi che due varietà CR non generiche, definite come in (2.1) da funzioni H_1 e H_2 con $h_1 = h_2$, $h_1' = h_2'$, ammettono per ogni stesso disco p di parametri, risalimenti che differiscono tra loro per $(0, iC(p))$.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. ANDREOTTI - C. D. HILL, *Complex characteristic coordinates and tangential Cauchy-Riemann equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **26** (1972), pp. 299-324.

[2] E. BISHOP, *Differential manifolds in complex Euclidean space*, Duke Math. J., **32** (1965), pp. 1-22.

[3] R. COURANT - D. HILBERT, *Methods of mathematical physics*, vol. II, Interscience Publishers, New York, 1962.

[4] J. DIEUDONNÉ, *Éléments d'analyse*, vol. I, Cahiers scientifiques, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[5] S. J. GREENFIELD, *Cauchy-Riemann equations in several variables*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **22** (1968), pp. 275-314.

[6] C. D. HILL - G. TAIANI, *Families of analytic discs in C^n with boundaries on a prescribed CR submanifold*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **2** (1978), pp. 327-380.

[7] C. D. HILL - G. TAIANI, *The local family of analytic discs attached to a CR submanifold*, Proceeding of International Conferences, Cortona, Italy 1976-77, pp. 166-179.

[8] C. D. HILL - G. TAIANI, *On the H. Lewy extension phenomenon in higher codimension*, in pubblicazioue.

[9] C. D. HILL - G. TAIANI, *Real analytic approximation of embeddable CR manifolds*, in pubblicazione.

[10] H. R. HUNT - R. O. WELLS, *Extensions of CR-functions*, Amer. Math. J., **98** (1976), pp. 805-820.

[11] H. R. HUNT - R. O. WELLS, *Holomorphic extension for non-generic CR-submanifolds*, Proc. Symp. Pure Math., **27** (1975), pp. 81-88.

[12] G. TOMASSINI, *Tracce delle funzioni olomorfe sulle sottovarietà analitiche reali d'una varietà complessa*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **20** (1966), pp. 31-43.

[13] B. WEINSTOCK, *On holomorphic extension from real submanifolds of complex Euclidean space*, Ph. D. Thesis, M.I.T., Cambridge, Mass., 1966.

[14] R. O. WELLS, *On the local holomorphic hull of a real submanifold in several complex variables*, Comm. Pure Appl. Math., **19** (1966), pp. 145-165.