Sur l'intégrabilité des structures tangentes produits tensoriels réels (*).

THEODOR HANGAN (Vendeville, Francia)

À la mémoire de G. Vranceanu

Résumé – *On étudie l'intégrabilité de la G-structure d'une variété dont le fibré tangent est localement isomorphe à un produit tensoriel réel de deux fibrés vectoriels. L'annulation du tenseur de Bernard entraine la platitude de la G-structure lorsque les dimensions des facteurs sont supérieures à 2. Les automorphismes locaux d'une telle G-structure sont des homographies matricielles.*

Introduction.

1. – Etant donnés deux entiers p, q supérieurs à 1, le groupe qui fait l'objet de ce travail est le sous-groupe $G_{p,q}$ du groupe linéaire $GL(pq, \boldsymbol{R}) \simeq GL(\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q)$ constitué des automorphismes du produit tensoriel réel $\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q$ qui sont de la forme

$$u \otimes v \mapsto A(u) \otimes B(v) \tag{0.1}$$

où $u \otimes v \in \boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q$, $A \in GL(p, \boldsymbol{R})$ et $B \in GL(q, \boldsymbol{R})$. C'est un groupe de Lie algébrique de dimension $p^2 + q^2 - 1$ que nous allons désigner aussi $GL(p, \boldsymbol{R}) \otimes GL(q, \boldsymbol{R})$ et appeler produit tensoriel ou de Kronecker des groupes linéaires $GL(p, \boldsymbol{R})$ et $GL(q, \boldsymbol{R})$. Le résultat que nous allons démontrer est le suivant: si $p > 2$ et $q > 2$, une $G_{p,q}$-structure est intégrable si et seulement si son premier tenseur de structure (tenseur de Bernard) est nul. La démonstration repose sur le calcul des groupes de cohomologie $H^{1,2}(\mathfrak{g}_{p,q})$ et $H^{2,2}(\mathfrak{g}_{p,q})$ où $\mathfrak{g}_{p,q}$ est l'algèbre de Lie du groupe $G_{p,q}$.

La G-structure en question a été rencontrée par plusieurs auteurs. Ainsi, M. BERGER dans la classification des groupes d'holonomie irréductibles des espaces à connexion affine [1], [2], montre qu'une connexion pseudo-riemannienne ayant un tel groupe d'holonomie linéaire est nécessairement symétrique (la dérivée covariante du tenseur de courbure est nulle) si l'un des entiers p ou q est supérieur à 2. En 1965, le groupe $G_{p,q}$ a été étudié du point de vue de la théorie des G-structures par I. M.

(*) Entrata in Redazione il 28 novembre 1979.

SINGER et S. STERNBERG dans [12] où ils ont déterminé le premier prolongement de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{p,q}$ et montré que son deuxième prolongement est nul. Nous avons trouvé indépendamment les mêmes résultats sur les prolongements de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{p,q}$ dans [5] en exploitant les équations algébriques du groupe $G_{p,q}$. Ces équations nous sont apparues comme conditions algébriques satisfaites par la matrice jacobienne des transformations de coordonnées homographiques sur la variété de Grassmann [7]; cette variété est douée d'une $G_{p,q}$-structure intégrable. Des constructions géométriques analogues à la transformation projective de connexion et au tenseur de courbure projective de Weyl ont été ensuite données par l'auteur dans [5], [8]. Dans le cas non-intégrable une étude des connexions adaptées à la $G_{p,q}$-structure a été faite par T. ISHIHARA [10]. Une théorie générale où la $G_{p,q}$-structure entre comme cas particulier est celle des l-systèmes élaborée par N. TANAKA en 1965 [13], et développée ensuite par T. OCHIAI [11]. Malgré l'existence établie par N. TANAKA [13], d'un tenseur analogue à celui de Nomizu-Nijenhuis pour les structures presque-complexes, l'étude de l'intégrabilité de ces G-structures dans la théorie générale de OCHIAI [11], est traitée dans le cadre du fibré des repères d'ordre deux tangents à la variété de base et ramenée à l'étude des tenseurs de Weyl.

C'est l'une des raisons pour laquelle nous avons préféré de donner ici un étude de l'intégrabilité de la $G_{p,q}$-structure, indépendante de la théorie générale de [11], [13]. Une autre raison est l'intérêt que semble avoir cette G-structure en théorie de la relativité d'après les essais de R. HERMANN dans [9] sur les structures qu'il appelle spinorielles-généralisées.

La méthode adoptée pour étudier l'intégrabilité est directe et ne fait pas appel à la théorie générale d'intégrabilité des G-structures même si par endroits elle en utilise le langage; les notations sont celles utilisées par G. VRANCEANU dans sa méthode du calcul des congruences [14].

Ce travail a été suggéré par une discussion avec A. GRAY et L. VANHECKE lors d'une recontre à l'Université de Louvain en mars 1977 dont je les remercie. Le plan est le suivant: une première partie comprend les préliminaires algébriques, la deuxième traite de l'intégrabilité, la troisième établit à l'aide de la théorie des connexions linéaires les conditions d'intégrabilité utilisées dans la deuxième partie et détermine le pseudo-groupe des automorphismes locaux d'une $G_{p,q}$-structure plate.

PARTIE 1

2. – Nous allons commencer par décrire l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{p,q}$: La formule (0.1) montre que cette algèbre est constituée des endomorphismes de l'espace vectoriel $\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q$ qui sont du type

$$u \otimes v \xmapsto{a \otimes 1_q + 1_p \otimes b} a(u) \otimes v + u \otimes b(v) \tag{1.1}$$

où 1_p et 1_q sont les endomorphismes identiques de $\boldsymbol{R}^p$ et $\boldsymbol{R}^q$ respectivement. Les bases de l'espace vectoriel $\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q$ formées par produit tensoriel avec des vecteurs appartenant à deux bases des facteurs $\boldsymbol{R}^p$ et $\boldsymbol{R}^q$ respectivement seront appelées *spéciales*. Ainsi, si $\{\varepsilon_\alpha,\ \alpha = 1, \dots, p\}$ est la base canonique de $\boldsymbol{R}^p$ et $\{e_i,\ i = p+1, \dots, p+q\}$ est la base canonique de $\boldsymbol{R}^q$, les produits tensoriels $\varepsilon_\alpha \otimes e_i$ forment une base spéciale de $\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q$. Par rapport à cette base spéciale, les formules (0.1), (1.1) prennent respectivement la forme

$$(1.2) \qquad \begin{cases} (A \otimes B)(\varepsilon_\alpha \otimes e_i) = \sum\limits_{\varrho, r} A^\varrho_\alpha B^r_i \varepsilon_\varrho \otimes e_r\,, \\ (a \otimes 1_q + 1_p \otimes b)(\varepsilon_\alpha \otimes e_i) = \sum\limits_{\varrho} a^\varrho_\alpha \varepsilon_\varrho \otimes e_i + \sum\limits_{\varrho} b^r_i \varepsilon_\alpha \otimes e_r\,. \end{cases}$$

Nous utiliserons désormais la convention de sommation d'Einstein et la notation δ^i_j pour le tenseur de Kronecker.

Le noyau de l'homomorphisme $(A, B) \mapsto A \otimes B$ de $GL(p, \boldsymbol{R}) \times GL(q, \boldsymbol{R})$ dans $GL(pq, \boldsymbol{R})$ est constitué des couples $(\lambda 1_p, \lambda^{-1} 1_q)$, $\lambda \in \boldsymbol{R}^\times$ et est donc isomorphe au groupe multiplicatif $\boldsymbol{R}^\times$ des nombres réels. Son algèbre de Lie, isomorphe à l'espace vectoriel réel $\boldsymbol{R}$ est engendrée par le vecteur $(1_p, -1_q) \in \mathrm{End}(\boldsymbol{R}^p) \oplus \mathrm{End}(\boldsymbol{R}^q)$.

La matrice qui exprime un endomorphisme $h \in \mathfrak{g}_{p,q}$ par rapport à une base spéciale a pour composantes

$$(1.3) \qquad h^{i\alpha}_{j\beta} = a^\alpha_\beta \delta^i_j + \delta^\alpha_\beta b^i_j$$

mais cette représentation n'est pas unique car on peut écrire encore

$$(1.4) \qquad h^{i\alpha}_{j\beta} = (a^\alpha_\beta + \varrho\delta^\alpha_\beta)\,\delta^i_j + \delta^\alpha_\beta(b^i_j - \varrho\delta^i_j)\,, \qquad \varrho \in \boldsymbol{R}\,.$$

Le réel ϱ peut être utilisé, selon le cas, pour annuler la trace de la matrice (a^α_β) ou (b^i_j) dans (1.3) ou faire en sorte que les deux traces soient égales.

Soit $(X^{i\alpha}_{j\beta})$ la $pq \times pq$-matrice qui exprime un automorphisme $X \in GL(\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q)$ par rapport à une base spéciale de $\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q$. Si $X \in GL(p, \boldsymbol{R}) \otimes GL(q, \boldsymbol{R})$, la formule (1.2) donne

$$(1.5) \qquad X^{i\alpha}_{j\beta} = A^\alpha_\beta B^i_j$$

où, les matrices (A^α_β) et (B^i_j) sont déterminées à un facteur près, pouvant être remplacées par (λA^α_β) et $(\lambda^{-1} B^i_j)$, $\lambda \in \boldsymbol{R}^\times$.

On en déduit que

$$X^{i\alpha}_{j\beta} X^{k\gamma}_{l\delta} = (A^\alpha_\beta B^i_j)(A^\gamma_\delta B^k_l) = (A^\gamma_\delta B^i_j)(A^\alpha_\beta B^k_l) = X^{i\gamma}_{j\delta} X^{k\alpha}_{l\beta}\,,$$
$$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, \dots, p\,,\ \forall i, j, k, l = p+1, \dots, p+q\,,$$

et l'on obtient ainsi les équations algébriques

$$X^{i\alpha}_{j\beta} X^{k\gamma}_{l\delta} = X^{i\gamma}_{j\delta} X^{k\alpha}_{l\beta} \tag{1.6}$$

qui caractérisent le groupe $G_{p,q}$ dans $GL(pq, \boldsymbol{R})$. En effet, si la matrice d'un automorphisme X de $\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q$ satisfait au système (1.6), en choisissant une composante $X^{k\gamma}_{l\delta}$ non-nulle on trouve une solution pour (1.5) en prenant

$$A^\alpha_\beta = X^{k\alpha}_{l\beta}\,, \qquad B^i_j = X^{i\gamma}_{j\delta}(X^{k\gamma}_{l\delta})^{-1}\,, \qquad i, j = p+1, \ldots, p+q\,;\ \alpha, \beta = 1, \ldots, p\,.$$

Le système (1.6) exprime la propriété caractéristique d'un automorphisme $X \in GL(\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q)$ de commuter avec l'automorphisme $\mathcal{S}$ du produit tensoriel

$$(\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q) \otimes (\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q)$$

défini par

$$\mathcal{S}\big((u \otimes v) \otimes (u' \otimes v')\big) = (u' \otimes v) \otimes (u \otimes v')\,, \qquad u, u' \in \boldsymbol{R}^p\,,\ v, v' \in \boldsymbol{R}^q\,. \tag{1.7}$$

En effet, en calculant dans une base spéciale

$$(X \otimes X) \circ \mathcal{S}\big((\varepsilon_\beta \otimes e_l) \otimes (\varepsilon_\delta \otimes e_j)\big) = (X \otimes X)\big((\varepsilon_\delta \otimes e_l) \otimes (\varepsilon_\beta \otimes e_j)\big) =$$
$$= X^{k\gamma}_{l\delta} X^{i\alpha}_{j\beta} (\varepsilon_\gamma \otimes e_k) \otimes (\varepsilon_\alpha \otimes e_i)$$

et

$$\mathcal{S} \circ (X \otimes X)\big((\varepsilon_\beta \otimes e_l) \otimes (\varepsilon_\delta \otimes e_j)\big) = X^{k\alpha}_{l\beta} X^{i\gamma}_{j\delta}\, \mathcal{S}\big((\varepsilon_\alpha \otimes e_k) \otimes (\varepsilon_\gamma \otimes e_i)\big) =$$
$$= X^{k\alpha}_{l\beta} X^{i\gamma}_{j\delta} (\varepsilon_\gamma \otimes e_k) \otimes (\varepsilon_\alpha \otimes e_i)$$

de sorte que la relation (1.6) équivaut à $X \otimes X \circ \mathcal{S} = \mathcal{S} \circ X \otimes X$.
Ainsi on a démontré le

LEMME 1 ([6]). – *Le sous-groupe* $GL(p, \boldsymbol{R}) \otimes GL(q, \boldsymbol{R})$ *du groupe* $GL(\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q) \simeq GL(pq, \boldsymbol{R})$ *est un groupe algébrique dont les equations de définition* (1.6) *expriment la propriété de l'élément* X *du groupe de commuter avec l'automorphisme* $\mathcal{S}$ *du produit tensoriel* $(\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q) \otimes (\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q)$ *défini dans* (1.7). *Ainsi*

$$G_{p,q} = \{X \mid X \in GL(\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q),\ X \otimes X \circ \mathcal{S} = \mathcal{S} \circ X \otimes X\}\,.$$

3. – Les composantes, par rapport à une base spéciale de $\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q$ du tenseur deux fois contravariant et deux fois covariant qui représente l'automorphisme $\mathcal{S}$ sont

$$\mathcal{S}^{i\alpha\, j\beta}_{k\gamma\, l\delta} = \delta^i_k\, \delta^j_l\, \delta^\alpha_\delta\, \delta^\beta_\gamma = \delta^{i\alpha}_{k\delta}\, \delta^{j\beta}_{l\gamma} = \mathcal{S}^{j\beta\, i\alpha}_{l\delta\, k\gamma}\,. \tag{1.8}$$

Etant donné un tenseur T d'ordre quatre, de même variance que $\mathbb{S}$, donc de type $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, on peut construire des endomorphismes des espaces de tenseurs de type $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ par produit tensoriel et contractions, endomorphismes exprimés en termes de composantes par les formules

$$(1.9)\qquad (t^{IJ}) \xrightarrow{\overline{T}} (t'^{IJ} = T^{IJ}_{RS}\, t^{RS})\,, \qquad (t_{KL}) \xrightarrow{\underline{T}} (t''_{KL} = T^{RS}_{KL}\, t_{RS})\,,$$

$$(1.10)\qquad (t^I_K) \xrightarrow{\tilde{T}} (\tilde{t}^I_K = T^{IR}_{KS}\, t^S_R)\,, \qquad (t^I_K) \xrightarrow{\hat{T}} (\hat{t}^I_K = T^{IR}_{SK}\, t^S_R)\,.$$

Pour $T = \mathbb{S}$ et par rapport à une base spéciale, ces endomorphismes s'expriment ainsi:

$$(1.9')\qquad t'^{i_\alpha i_\beta} = t^{i_\beta i_\alpha}\,, \qquad t''_{k_\gamma l_\delta} = t_{k_\delta l_\gamma}\,,$$

$$(1.10')\qquad \tilde{t}^{i_\alpha}_{k_\gamma} = \delta^i_k\, t^{r_\alpha}_{r_\gamma}\,, \qquad \hat{t}^{i_\alpha}_{k_\gamma} = \delta^\alpha_\gamma\, t^{i_\varrho}_{k_\varrho}\,.$$

On aurait pu faire une construction équivalente en partant de l'automorphisme $\mathbb{S}'$, composé de $\mathbb{S}$ avec la permutation des facteurs dans le produit tensoriel $V \otimes V$ où $V = \boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q$ donc

$$(1.11)\qquad \mathbb{S}'\big((u\otimes v)\otimes(u'\otimes v')\big) = (u\otimes v')\otimes(u'\otimes v)\,.$$

Dans ce cas les opérations $t \to t'$ et $t \to t''$ appliquées aux tenseurs deux fois contravariants ou covariants se traduiraient par la permutation des indices latins de leurs composantes exprimées en bases spéciales. Quant aux tenseurs de type $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ de l'espace $\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q$ on voit que la propriété d'un tel tenseur t d'avoir une trace nulle dans l'un des facteurs ($\tilde{t} = 0$ ou $\hat{t} = 0$) s'exprime en termes du tenseur $\mathbb{S}$ et représente une propriété invariante par les transformations du groupe $G_{p,q}$.

On peut combiner les endomorphismes $\mathbb{S}$ et $\mathbb{S}'$ de $(\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q) \otimes (\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q)$ en un troisième

$$(1.12)\qquad \Psi = \mathbb{S} + \mathbb{S}'$$

lequel, en tant que tenseur, est symétrique en ses couples d'indices de contravariance et de covariance. Avec ce tenseur on peut donc définir un seul endomorphisme de l'espace des tenseurs de type $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ de $\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q$ car $\Psi^{IR}_{KS}\, t^S_R = \Psi^{IR}_{SK}\, t^S_R$.

Quant aux tenseurs de type $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ la contraction $(t^{IJ}) \mapsto (\Psi^{IJ}_{RS}\, t^{RS})$ les transforme en des tenseurs symétriques et de plus si ils sont antisymétriques les annule.

4. – En comparant les formules (1.10′) avec la formule (1.3) on constate que l'opérateur $t \mapsto \tilde{t} + \hat{t}$ transforme un tenseur de type $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ de l'espace vectoriel $\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q$, c'est-à-dire un endomorphisme de cet espace, en un endomorphisme du même espace appartenant à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{p,q}$. On constate aisément que cet opérateur n'est pas un projecteur.

Par contre, l'application

$$t \mapsto \frac{1}{q}\tilde{t} + \frac{1}{p}\hat{t} - \frac{1}{pq}\hat{\tilde{t}} \tag{1.13}$$

est un projecteur de $\mathfrak{gl}(\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q)$ sur $\mathfrak{g}_{p,q}$ car elle laisse invariants les éléments de $\mathfrak{g}_{p,q}$. Nous pouvons énoncer le

LEMME 2. – *L'application* π: End $(\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q) \to$ End $(\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q)$ *définie par les formules* (1.13) et (1.10′) *est un projecteur de l'algèbre de Lie du groupe* $GL(\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q)$ *sur l'algèbre de Lie du sous-groupe* $GL(p, \boldsymbol{R}) \otimes GL(q, \boldsymbol{R})$.

Par rapport à une base spéciale le projecteur π s'exprime ainsi

$$\big(\pi(t)\big)^{i\alpha}_{j\beta} = q^{-1}\,\delta^i_j t^{r\alpha}_{r\beta} + p^{-1}\,\delta^\alpha_\beta t^{i\varrho}_{j\varrho} - (pq)^{-1}\,\delta^{i\alpha}_{j\beta} t^{r\varrho}_{r\varrho} \tag{1.14}$$

et par rapport à une base quelconque de l'espace $\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q$ on a

$$\big(\pi(t)\big)^I_J = \big(q^{-1}\,\mathfrak{S}^{IR}_{JS} + p^{-1}\,\mathfrak{S}^{IR}_{SJ} - (pq)^{-1}\,\mathfrak{S}^{IU}_{JV}\,\mathfrak{S}^{VR}_{SU}\big)\,t^S_R\,. \tag{1.14′}$$

On peut utiliser aussi le tenseur Ψ pour exprimer le projecteur π. Ainsi, notons $\check{\Psi}$ l'endomorphisme de l'espace vectoriel $(\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q) \otimes (\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q)^*$ défini par

$$(t^I_J) \mapsto (\check{t}^I_J = \Psi^{IR}_{JS} t^S_R)\,.$$

Par rapport à une base spéciale, on a:

$$\begin{aligned}
&\big(\check{\Psi}(t)\big)^{i\alpha}_{j\beta} = \check{t}^{i\alpha}_{j\beta} = \delta^i_j t^{r\alpha}_{r\beta} + \delta^\alpha_\beta t^{\,i\varrho}_{\,j\varrho},\\
&\big((\check{\Psi}\circ\check{\Psi})(t)\big)^{i\alpha}_{j\beta} = q\delta^i_j t^{r\alpha}_{r\beta} + p\delta^\alpha_\beta t^{i\varrho}_{j\varrho} + 2\delta^{i\alpha}_{j\beta} t^{r\varrho}_{r\varrho}\,,\\
&\big((\check{\Psi}\circ\check{\Psi}\circ\check{\Psi})(t)\big)^{i\alpha}_{j\beta} = q^2\,\delta^i_j t^{r\alpha}_{r\beta} + p^2\,\delta^\alpha_\beta t^{i\varrho}_{j\varrho} + 3\delta^{i\alpha}_{j\beta}(p+q)\,t^{r\varrho}_{r\varrho}\,,
\end{aligned}$$

et on peut donc exprimer le projecteur π par la formule

$$\frac{p^2 + 3pq + q^2}{p+q}\check{\Psi} - 2\check{\Psi}^2 + \frac{1}{p+q}\check{\Psi}^3 = pq\pi$$

ou bien par la formule

$$\pi = \big(pq(p+q)\big)^{-1}\check{\Psi}\circ\big(\check{\Psi} - (p+q)\,1^{p,q}_{p,q}\big)^2$$

ou $1^{p,q}_{p,q}$ désigne l'automorphisme identique des l'espace $(\boldsymbol{R}^p\otimes \boldsymbol{R}^q)\otimes(\boldsymbol{R}^p\otimes \boldsymbol{R}^q)^*$. Le polynome minimal de l'endomorphisme $\check{\Psi}$ s'en déduit aisément; c'est

$$X^4-\frac{4qp}{p+q}X^3+(3pq-p^2-q^2)X^2+\frac{pq(q-p)^2}{p+q}X=0\,.$$

5. – Avant de déterminer certains espaces de cohomologie de l'algèbre $\mathfrak{g}_{p,q}$, reprenons dans [5] la démonstration du

LEMME 3. – *L'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}_{p,q}$ *du groupe* $GL(p, \boldsymbol{R})\otimes GL(q, \boldsymbol{R})$ *est de type fini. Son premier prolongement*

$$\mathfrak{g}^{(1)}_{p,q}=\operatorname{Hom}(\boldsymbol{R}^p\otimes \boldsymbol{R}^q, \mathfrak{g}_{p,q})\cap\big((\boldsymbol{R}^p\otimes \boldsymbol{R}^q)\otimes S^2(\boldsymbol{R}^p\otimes \boldsymbol{R}^q)^*\big)$$

est de dimension pq et son deuxième prolongement

$$\mathfrak{g}^{(2)}_{p,q}=\operatorname{Hom}(\boldsymbol{R}^p\otimes \boldsymbol{R}^q, \mathfrak{g}^{(1)}_{p,q})\cap\big((\boldsymbol{R}^p\otimes \boldsymbol{R}^q)\otimes S^3(\boldsymbol{R}^p\otimes \boldsymbol{R}^q)^*\big)$$

est nul.

La notation $S^k(V^*)$ désigne l'espace vectoriel réel des fonctions polynomiales homogènes de degré k sur l'espace vectoriel V.

Considérons d'abord un élément $a=\varphi\otimes 1_q+1_p\otimes\psi\in\mathfrak{g}^{(1)}_{p,q}$ où φ et ψ sont des 1-formes sur $\boldsymbol{R}^p\otimes \boldsymbol{R}^q$ à valeurs dans $\mathfrak{gl}(p, \boldsymbol{R})$ et $\mathfrak{gl}(q, \boldsymbol{R})$ respectivement. Par rapport à une base spéciale, ses composantes sont de la forme

$$a^{i\alpha}_{j\beta\,k\gamma}=\delta^i_j\varphi^\alpha_{\beta\,k\gamma}+\delta^\alpha_\beta\,\psi^i_{j\,k\gamma}\,,\qquad a^{i\alpha}_{j\beta\,k\gamma}=a^{i\alpha}_{k\gamma\,j\beta} \tag{1.15}$$

et donc on aura

$$\delta^i_j\varphi^\alpha_{\beta\,k\gamma}+\delta^\alpha_\beta\,\psi^i_{j\,k\gamma}=\delta^i_k\varphi^\alpha_{\gamma\,j\beta}+\delta^\alpha_\gamma\,\psi^i_{k\,j\beta}\,. \tag{1.16}$$

Faisons la contraction $i=j$. Nous obtenons

$$q\varphi^\alpha_{\beta\,k\gamma}-\varphi^\alpha_{\gamma\,k\beta}=\delta^\alpha_\gamma\,\psi^r_{k\,r\beta}-\delta^\alpha_\beta\,\psi^r_{r\,k\gamma}\,.$$

En permutant β et γ entre eux, nous obtenons encore une équation pour les inconnues $\varphi^\alpha_{\beta\,k\gamma}$ et $\varphi^\alpha_{\gamma\,k\beta}$ et le déterminant du système obtenu est égal à $q^2-1\neq 0$ ce qui prouve que $\varphi^\alpha_{\beta\,k\gamma}$ sont nuls si $\alpha\neq\beta$, $\alpha\neq\gamma$. On peut donc écrire

$$\varphi^\alpha_{\beta\,k\gamma}=\delta^\alpha_\beta v_{k\gamma}+\delta^\alpha_\gamma u_{k\beta}\,,\qquad \psi^i_{j\,k\gamma}=\delta^i_j v'_{k\gamma}+\delta^i_k u'_{j\gamma}$$

où u, v, u', v' représentent des covecteurs de $\boldsymbol{R}^p\otimes \boldsymbol{R}^q$.

Reportons dans l'équation (1.15). Nous trouvons

$$\delta^i_j(\delta^\alpha_\beta v_{k_\gamma} + \delta^\alpha_\gamma u_{k_\beta}) + \delta^\alpha_\beta(\delta^i_j v'_{k_\gamma} + \delta^i_k u'_{j_\gamma}) = \delta^i_k(\delta^\alpha_\gamma v_{j_\beta} + \delta^\alpha_\beta u_{j_\gamma}) + \delta^\alpha_\gamma(\delta^i_k v'_{j_\beta} + \delta^i_j u'_{k_\beta})$$

et donc pour $i = j \neq k$, $\alpha = \beta \neq \gamma$ nous en déduisons

$$v_{k_\gamma} + v'_{k_\gamma} = 0\,, \qquad u_{k_\beta} = u'_{k_\beta}\,.$$

La solution générale du système (1.15) est donc de la forme

$$a^{i_\alpha}_{j_\beta k_\gamma} = \delta^i_j \delta^\alpha_\gamma u_{k_\beta} + \delta^i_k \delta^\alpha_\beta u_{j_\gamma} \tag{1.17}$$

où u_{k_β} sont les composantes d'un covecteur u de l'espace $\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q$.

On peut exprimer de façon intrinsèque cette formule qui établit un isomorphisme entre $(\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q)^*$ et $\mathfrak{g}^{(1)}_{p,q}$.

Pour cela soit V un espace vectoriel et $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ une sous-algèbre de Lie. Nous pouvons identifier de façon naturelle un élément $a \in \mathfrak{g}^{(1)}$ à une application linéaire $a_{(1)}\colon V \to \mathfrak{gl}(V)$ ou bien à une application linéaire $a_{(2)}\colon V \otimes V \to V$. En plus, si $u \in V^*$, soit $\delta \otimes u\colon V \otimes V \to V$ l'application linéaire définie par

$$\delta \otimes u(v \otimes v') = v\langle u, v'\rangle\,, \qquad v, v' \in V\,.$$

Avec ces notations et en tenant compte de (1.12) et de la première formule (1.9) la formule (1.17) s'écrit

$$a_{(2)} = (\delta \otimes u) \circ \overline{\Psi}$$

et par contraction en $i_\alpha = j_\beta$ on obtient

$$u = (p + q)^{-1}\, \mathrm{Trace}\, a_{(1)}\,.$$

Ces deux dernières formules précisent la première partie du lemme.

Soit maintenant un élément

$$b \in \mathfrak{g}^{(2)}_{p,q} = \mathrm{Hom}\,(\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q, \mathfrak{g}^{(1)}_{p,q}) \cap \big((\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q) \otimes S^3(\boldsymbol{R}^k \otimes \boldsymbol{R}^q)^*\big)\,.$$

Par rapport à une base spéciale, les composantes $b^{i_\alpha}_{j_\beta k_\gamma l_\delta}$ de b doivent s'exprimer vu la formule (1.17), à l'aide d'une 1-forme u sur $\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q$ à valeurs dans les covecteurs de $\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q$ et elles sont symétriques dans les indices de covariance; on obtient donc

$$b^{i_\alpha}_{j_\beta k_\gamma l_\delta} = \delta^{i_\alpha}_{j_\gamma} u_{k_\beta, l_\delta} + \delta^{i_\alpha}_{k_\beta} u_{j_\gamma, l_\delta}\,, \qquad b^{i_\alpha}_{j_\beta k_\gamma l_\delta} = b^{i_\alpha}_{j_\beta l_\delta k_\gamma} \tag{1.18}$$

d'où l'on déduit la condition

$$\delta^{i\alpha}_{j\gamma} u_{k\beta,l\delta} + \delta^{i\alpha}_{k\beta} u_{j\gamma,l\delta} = \delta^{i\alpha}_{j\delta} u_{l\beta,k\gamma} + \delta^{i\alpha}_{l\beta} u_{j\delta,k\gamma} . \tag{1.18'}$$

Faisons la contraction $i = k$, $\alpha = \gamma$. Nous trouvons

$$(p + q) u_{j\beta,l\delta} = u_{l\beta,j\delta} + u_{j\delta,l\beta} \tag{1.19}$$

et en permutant les indices γ, β, l, δ nous obtenons encore trois autres équations

$$\left\{\begin{aligned} &(p + q) u_{j\delta,l\beta} = u_{l\delta,j\beta} + u_{j\beta,l\delta} , \\ &(p + q) u_{l\beta,j\delta} = u_{j\beta,l\delta} + u_{l\delta,j\beta} , \\ &(p + q) u_{l\delta,j\beta} = u_{j\delta,l\beta} + u_{l\beta,j\delta} . \end{aligned}\right. \tag{1.20}$$

Le déterminant du système homogène (1.19), (1.20) dans les quatre inconnues $u_{j\beta,l\delta}$, $u_{l\beta,j\delta}$, $u_{j\delta,l\beta}$, $u_{l\delta,j\beta}$ est égal à $(p + q)^2[4 - (p + q)^2] \neq 0$ donc le système admet seulement la solution banale $u_{j\beta,k\gamma} = 0$.

Si deux indices coïncident, disons $l = k$, en faisant $i = j \neq l$ et $\gamma = \alpha \neq \delta$ dans la formule (1.18') on obtient encore $u_{l\beta,l\delta} = 0$. Ainsi le lemme est démontré.

6. – Rappelons la définition des groupes de cohomologie $H^{k,l}(\mathfrak{g})$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$, V étant un espace vectoriel réel de dimension finie. On organise d'abord la somme directe

$$\tilde{V} = \bigoplus_{k,l} \left(V \otimes S^{k+1}(V^*) \otimes \Lambda^l(V^*)\right) , \qquad k \in \boldsymbol{N} , \ 0 \leqslant l \leqslant \dim V$$

comme complexe différentiel bigradué en définissant la différentielle

$$\partial \colon \ V \otimes S^{k+1}(V^*) \otimes \Lambda^l(V^*) \to V \otimes S^k(V^*) \otimes \Lambda^{l+1}(V^*)$$

sur les générateurs de la composante homogène de bidegré (k, l) du complexe par

$$\partial(v \otimes P \otimes \omega) = v \otimes dP \wedge \omega$$

où P est une fonction polynomiale homogène de degré $k + 1$ sur V, $\omega \in \Lambda^l(V^*)$ et d est la différentielle ordinaire.

Soit $\mathfrak{g}^{(k)} = \left(\mathfrak{g} \otimes S^k(V^*)\right) \cap \left(V \otimes S^{k+1}(V^*)\right)$ le k-ième prolongement de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et notons pour tout $k \in \boldsymbol{N}$ et $0 \leqslant l \leqslant \dim V$

$$\mathfrak{C}^{k+1,l}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^{(k)} \otimes \Lambda^l(V^*) .$$

La somme directe $\bigoplus_{k,l} \mathfrak{C}^{k+1,l}(\mathfrak{g})$ représente un sous-espace de $\tilde{V}$ stable par rapport à ∂ donc un sous-complexe bigradué dont on définit les groupes de cohomologie par

$$H^{k,l}(\mathfrak{g}) = \left(\partial^{-1}(0) \cap \mathfrak{C}^{k+1,l}(\mathfrak{g})\right)/\partial\left(\mathfrak{C}^{k+2,l-1}(\mathfrak{g})\right) .$$

En revenant à l'algèbre $\mathfrak{g}_{p,q}$, du fait que $\mathfrak{g}_{p,q}^{(k)} = 0$ si $k \geqslant 2$, les seuls groupes de cohomologie qui nous intéressent sont $H^{1,l}(\mathfrak{g}_{p,q})$ et $H^{2,l}(\mathfrak{g}_{p,q})$; les considérations liées à l'intégrabilité ne concernent de plus que les cas où $l = 2$.

Pour déterminer le groupe $H^{1,0}(\mathfrak{g}_{p,q})$ considérons l'espace de cochaînes $\mathfrak{C}^{1,0}(\mathfrak{g}_{p,q}) = \mathfrak{g}_{p,q}^{(0)} \otimes \Lambda^0(\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q)^* = \mathfrak{g}_{p,q}$. Il n'y a pas de cocycles non-nuls, ∂ étant ici isomorphisme et donc $H^{1,0}(\mathfrak{g}_{p,q}) = 0$.

L'espace

$$\mathfrak{C}^{1,1}(\mathfrak{g}_{p,q}) = \mathfrak{g}_{p,q}^{(0)} \otimes \Lambda^1(\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q)^* = \mathfrak{g}_{p,q} \otimes (\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q)^*$$

est formé des 1-formes sur $\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q$ à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{p,q}$. Soit $a \in \mathfrak{C}^{1,1}(\mathfrak{g}_{p,q})$. La condition $\partial a = 0$ équivaut à $a = \partial b$ où $b \in \mathfrak{g}_{p,q}^{(1)} \simeq \mathfrak{C}^{2,0}(\mathfrak{g}_{p,q})$. Donc $H^{1,1}(\mathfrak{g}_{p,q}) = 0$.

Pour déterminer le groupe $H^{1,2}(\mathfrak{g}_{p,q})$ considérons un élément $a \in \mathfrak{C}^{1,2}(\mathfrak{g}_{p,q}) = \mathfrak{g}_{p,q}^{(0)} \otimes \Lambda^2(\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q)^*$. Ainsi $a = \varphi \otimes 1_q + 1_p \otimes \psi$ où φ, ψ sont deux 2-formes sur $\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q$ à valeurs dans $\mathfrak{gl}(p, \boldsymbol{R})$ et $\mathfrak{gl}(q, \boldsymbol{R})$ respectivement et par rapport à une base spéciale on aura:

$$a^{i\alpha}_{j\beta,k\gamma l\delta} = \delta^i_j \varphi^\alpha_{\beta k\gamma l\delta} + \delta^\alpha_\beta \psi^i_{jk\gamma l\delta} \tag{1.21}$$

relation à laquelle s'ajouten les conditions d'antisymétrie

$$\varphi^\alpha_{\beta k\gamma l\delta} + \varphi^\alpha_{\beta l\delta k\gamma} = 0 , \qquad \psi^i_{jk\gamma l\delta} + \psi^i_{jl\delta k\gamma} = 0 . \tag{1.22}$$

La condition de cocycle, $\partial a = 0$, devient

$$\delta^i_j \varphi^\alpha_{\beta k\gamma l\delta} + \delta^\alpha_\beta \psi^i_{jk\gamma l\delta} + \delta^i_k \varphi^\alpha_{\gamma l\delta j\beta} + \delta^\alpha_\gamma \psi^i_{kl\delta j\beta} + \delta^i_l \varphi^\alpha_{\delta j\beta k\gamma} + \delta^\alpha_\delta \psi^i_{lj\beta k\gamma} = 0 . \tag{1.23}$$

Si $k = l$, choisissons $i = j \neq k$; l'équation devient

$$\varphi^\alpha_{\beta k\gamma k\delta} = -\, \delta^\alpha_\beta \psi^i_{ik\gamma k\delta} - \delta^\alpha_\gamma \psi^i_{kk\delta i\beta} - \delta^\alpha_\delta \psi^i_{ki\beta k\gamma}$$

donc $\varphi^\alpha_{\beta k\gamma k\delta}$ s'annule si α est différent de β, γ, δ.

Si $k \neq l$, pour pouvoir choisir un indice i différent de k et l il faut que l'entier q soit supérieur à 2. Supposons donc $q \geqslant 3$ et choisissons $i = j \neq k$, $i \neq l$. Nous obtenons de nouveau

$$\varphi^\alpha_{\beta k\gamma l\delta} = -\, \delta^\alpha_\beta \psi^i_{ik\gamma l\delta} - \delta^\alpha_\gamma \psi^i_{kl\delta i\beta} + \delta^\alpha_\delta \psi^i_{li\beta k\gamma}$$

ce qui nous permet de poser lorsque $p, q \geqslant 3$

$$\varphi^{\alpha}_{\beta k_\gamma l_\delta} = \delta^{\alpha}_{\beta} v_{k_\gamma l_\delta} + \delta^{\alpha}_{\gamma} u_{k_\beta l_\delta} - \delta^{\alpha}_{\delta} u_{l_\beta k_\gamma}, \qquad v_{k_\gamma l_\delta} + v_{l_\delta k_\gamma} = 0, \tag{1.24}$$

$$\psi^{i}_{jk_\gamma l_\delta} = \delta^{i}_{j} v'_{k_\gamma l_\delta} + \delta^{i}_{k} u'_{j_\gamma l_\delta} - \delta^{i}_{l} u'_{j_\delta k_\gamma}, \qquad v'_{k_\gamma l_\delta} + v'_{l_\delta k_\gamma} = 0, \tag{1.25}$$

avec u, v, u', v' tenseurs deux fois covariants de $\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q$.

Remplaçons ces expressions dans l'équation (1.23). Nous obtenons

$$\begin{aligned}\delta^{i\alpha}_{j_\beta} v_{k_\gamma l_\delta} + \delta^{i\alpha}_{j_\gamma} u_{k_\beta l_\delta} - \delta^{i\alpha}_{j_\delta} u_{l_\beta k_\gamma} + \delta^{i\alpha}_{k_\gamma} v_{l_\delta j_\delta} + \delta^{i\alpha}_{k_\delta} u_{l_\gamma j_\beta} - \delta^{i\alpha}_{k_\beta} u_{j_\gamma l_\delta} + \delta^{i\alpha}_{l_\delta} v_{j_\beta k_\gamma} + {}\\ + \delta^{i\alpha}_{l_\beta} u_{j_\delta k_\gamma} - \delta^{i\alpha}_{l_\gamma} u_{k_\delta j_\beta} = - \delta^{i\alpha}_{j_\beta} v'_{k_\gamma l_\delta} - \delta^{i\alpha}_{k_\beta} u'_{j_\gamma l_\delta} + \delta^{i\alpha}_{l_\beta} u'_{j_\delta k_\gamma} - {}\\ - \delta^{i\alpha}_{k_\gamma} v'_{l_\delta j_\beta} - \delta^{i\alpha}_{l_\gamma} u'_{k_\delta j_\beta} + \delta^{i\alpha}_{j_\gamma} u'_{k_\beta l_\delta} - \delta^{i\alpha}_{l_\delta} v'_{j_\beta k_\gamma} - \delta^{i\alpha}_{j_\delta} u'_{l_\beta k_\gamma} + \delta^{i\alpha}_{k_\delta} u'_{l_\gamma j_\beta}.\end{aligned}$$

Faisons $l \neq i = j \neq k$, $\gamma \neq \alpha = \beta \neq \delta$. On déduit que $v_{k_\gamma l_\delta} = - v'_{k_\gamma l_\delta}$.

Faisons ensuite $k \neq i = j \neq l$, $\delta \neq \alpha = \gamma \neq \beta$. On obtient $u_{k_\beta l_\delta} = u'_{k_\beta l_\delta}$. Ainsi

$$\psi^{i}_{j k_\gamma l_\delta} = - \delta^{i}_{j} v_{k_\gamma l_\delta} + \delta^{i}_{k} u_{j_\gamma l_\delta} - \delta^{i}_{l} u_{j_\delta k_\gamma}$$

et en revenant dans (1.21) on trouve que

$$\begin{aligned} a^{i\alpha}_{j_\beta k_\gamma l_\delta} &= \delta^{i\alpha}_{j_\gamma} u_{k_\beta l_\delta} - \delta^{i\alpha}_{j_\delta} u_{l_\beta k_\gamma} + \delta^{i\alpha}_{k_\beta} u_{j_\gamma l_\delta} - \delta^{i\alpha}_{l_\beta} u_{j_\delta k_\gamma} = \\ &= (\delta^{i\alpha}_{j_\gamma} u_{k_\beta l_\delta} + \delta^{i\alpha}_{k_\beta} u_{j_\gamma l_\delta}) - (\delta^{i\alpha}_{j_\delta} u_{l_\beta k_\gamma} + \delta^{i\alpha}_{l_\beta} u_{j_\delta k_\gamma}) = (\partial b)^{i\alpha}_{j_\beta k_\gamma l_\delta} \end{aligned} \tag{1.26}$$

où on entend par $b \in \mathfrak{C}^{2,1}(\mathfrak{g}_{p,q}) = \mathfrak{g}^{(1)}_{p,q} \otimes (\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q)^*$ la cochaine à composantes

$$b^{i\alpha}_{j_\beta k_\gamma l_\delta} = \delta^{i\alpha}_{j_\gamma} u_{k_\beta l_\delta} + \delta^{i\alpha}_{k_\beta} u_{j_\gamma l_\delta}. \tag{1.27}$$

Nous pouvons énoncer donc la

PROPOSITION 1. – *Si $p \geqslant 3$, $q \geqslant 3$ le groupe de cohomologie $H^{1,2}(\mathfrak{g}_{p,q})$ de l'algèbre de Lie du groupe $GL(p, \boldsymbol{R}) \otimes GL(q, \boldsymbol{R})$ est nul.*

7. – Le groupe $H^{2,2}(\mathfrak{g}_{p,q})$ est nul comme il résulte de la classification donnée par T. OCHIAI dans [1]. Pour être complet, nous allons le démontrer ici de façon élémentaire.

Soi $a \in \mathfrak{C}^{2,2}(\mathfrak{g}_{p,q}) = \mathfrak{g}^{(1)}_{p,q} \otimes \Lambda^2(\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q)^*$ un cocycle. Ses composantes spéciales sont du type

$$a^{i\alpha}_{j_\beta k_\gamma, l_\delta m_\mu} = \delta^{i\alpha}_{j_\gamma} u_{k_\beta, l_\delta m_\mu} + \delta^{i\alpha}_{k_\beta} u_{j_\gamma, l_\delta m_\mu}$$

où u est une 2-forme de $\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q$ à valeurs dans $(\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q)^*$; c'est une conséquence de la formule (1.17) qui donne la forme générale d'un élément de $\mathfrak{g}^{(1)}_{p,q}$ par rapport à une base spéciale. La condition de cocycle, $\partial a = 0$, se traduit par l'équation

$$(1.28)\qquad \delta^{i\alpha}_{k\beta} u_{j_\gamma, l_\delta m_\mu} + \delta^{i\alpha}_{j_\gamma} u_{k_\beta, l_\delta m_\mu} + \delta^{i\alpha}_{l_\beta} u_{j_\delta, m_\mu k_\gamma} + \delta^{i\alpha}_{j_\delta} u_{l_\beta, m_\mu k_\gamma} + \\ + \delta^{i\alpha}_{m_\beta} u_{j_\mu, k_\gamma l_\delta} + \delta^{i\alpha}_{j_\mu} u_{m_\beta, k_\gamma l_\delta} = 0 .$$

Soit $\alpha = \beta$ et $i \neq j$. L'équation se réduit à

$$(1.29)\qquad \delta^i_k u_{j_\gamma, l_\delta m_\mu} + \delta^i_l u_{j_\delta, m_\mu k_\gamma} + \delta^i_m u_{j_\mu, k_\gamma l_\delta} = 0 .$$

Si $q \geqslant 4$, on peut trouver $i = k$ de façon que $i \neq j$, $i \neq l$, $i \neq m$ et alors l'équation (1.29) donne $u_{j_\gamma, l_\delta m_\mu} = 0$. Ainsi, le cocycle est nul si $q \geqslant 4$ et le même résultat a lieu si $p \geqslant 4$.

Les cas qui restent à regarder sont donc les suivants: $p = q = 3$; $p = 2$, $q = 3$; $p = q = 2$. Commençons avec les cas $p = q = 3$. Dans l'équation (1.29) en faisant $j = l = m \neq i = k$ nous trouvons que $u_{j_\gamma, j_\delta j_\mu} = 0$. De même, si $l = m \neq j$, comme $q = 3$ on peut trouver $i \neq j$, $i \neq l$ et en prenant $k = i$ on déduit que $u_{j_\gamma, l_\delta l_\mu} = 0$. De la même façon, on montre que $u_{j_\gamma, j_\delta m_\mu} = 0$.

Ainsi, reste à voir que les composantes $u_{j_\gamma, l_\delta m_\mu}$ où j, l, m sont deux à deux différents et où γ, δ, μ sont aussi différents entre eux sont nulles. Faisons dans (1.29) $i = k = l \neq j$ et comme on l'a dit soit $m \neq l$, $m \neq j$. On obtient

$$u_{j_\gamma, l_\delta m_\mu} + u_{j_\delta, m_\mu l_\gamma} = 0$$

ce qu'on peut écrire aussi

$$(1.30)\qquad u_{j_\gamma, l_\delta m_\mu} = u_{j_\delta, l_\gamma m_\mu} .$$

Pour la même raison, on peut écrire aussi

$$(1.31)\qquad u_{j_\gamma, l_\delta m_\mu} = u_{l_\gamma, j_\delta m_\mu}$$

car γ, δ, μ sont deux à deux différents. En utilisant (1.30), (1.31), on obtient $u_{J,LM} = u_{L,JM}$ pour $J = i_\gamma$, $L = l_\delta$, $M = m_\mu$ et l'antisymétrie dans les deux derniers indices de $u_{J,LM}$ donne alors

$$u_{J,LM} = u_{L,JM} = - u_{L,MJ} = - u_{M,LJ} = u_{M,JL} = u_{J,ML} = - u_{J,LM} \qquad \text{donc } u_{J,LM} = 0 .$$

Passons au cas suivant $p = 2$, $q = 3$. L'équation (1.29) pour $i = k \neq j$ donne

$$(1.32)\qquad u_{j_\gamma, l_\delta m_\mu} + \delta^i_l u_{j_\delta, m_\mu i_\gamma} + \delta^i_m u_{j_\mu, i_\gamma l_\delta} = 0 .$$

Si $l = m = j \neq i$ on obtient $u_{j_\gamma, j_\delta j_\mu} = 0$. Si $l = j \neq m$, on a

$$u_{j_\gamma, j_\delta m_\mu} + \delta^i_m u_{j_\mu, i_\gamma j_\delta} = 0$$

et on peut choisir encore $i \neq m$ car $q = 3$. Donc $u_{j_\delta, j_\gamma m_\mu} = 0$ si $m \neq j$. Si $l = m \neq j$ le choix de $i \neq l$, $i \neq j$ qui est possible conduit à l'équation $u_{j_\gamma, l_\delta l_\mu} = 0$. Donc, les seules composantes qui restent à regarder sont $u_{j_\gamma, l_\delta m_\mu}$ avec $j \neq l \neq m \neq j$.

Faisons donc $i = l$ dans l'équation (1.32); nous obtenons

$$u_{j_\gamma, l_\delta m_\mu} = u_{j_\delta, l_\gamma m_\mu} . \tag{1.33}$$

Si $\gamma = \delta = \mu$ on obtient comme au début $u_{j_\gamma, l_\gamma m_\gamma} = 0$ et donc l'équation (1.33) montre que les seules composantes qui restent à regarder sont $u_{j_\gamma, l_\gamma m_\delta}$ avec $\delta \neq \gamma$ car $u_{j_\gamma, l_\delta m_\delta} = u_{j_\delta, l_\gamma m_\delta} = - u_{j_\delta, m_\delta l_\gamma}$. Faisons dans l'équation (1.28) $i = j = k \neq l \neq$ $\neq m \neq i$ et $\alpha = \beta = k = \delta \neq \mu$. Nous obtenons

$$u_{i_\alpha, l_\alpha m_\mu} + u_{i_\alpha, l_\alpha m_\mu} + u_{l_\alpha, m_\mu i_\alpha} = 0$$

donc

$$2u_{i_\alpha, l_\alpha m_\mu} + u_{l_\alpha, m_\mu i_\alpha} = 0 . \tag{1.34}$$

Dans l'équation (1.32) en faisant $l = j \neq i = m$ on trouve $u_{j_\gamma, j_\delta i_\mu} + u_{j_\mu, i_\gamma j_\delta} = 0$ et par analogie on a

$$u_{i_\alpha, m_\mu l_\alpha} = u_{m_\alpha, i_\mu l_\alpha} , \qquad \mu \neq \alpha . \tag{1.35}$$

Les équations (1.33), (1.34), (1.35) donnent alors

$$0 = 2u_{i_\alpha, l_\alpha m_\mu} + u_{l_\alpha, m_\mu i_\alpha} = 2u_{m_\alpha, l_\alpha i_\mu} + u_{m_\alpha, l_\mu i_\alpha} = 2u_{m_\mu, l_\alpha i_\alpha} + u_{m_\mu, l_\alpha i_\alpha} = 3u_{m_\mu, l_\alpha i_\alpha} .$$

Donc, les composantes où un indice grec se répète sont nulles et la forme u est nulle.

Pour le dernier cas — $p = q = 2$ — faisons $\alpha = \beta$, $i = k \neq j$ dans (1.28) pour obtenir (1.32). Si $l = m = j$ on obtient $u_{j_\gamma, i_\delta j_\mu} = 0$ et de même $u_{i_\gamma, j_\gamma k_\gamma} = 0$. Si $l = i$ et $m = j$ il vient

$$u_{j_\gamma, i_\delta j_\mu} = u_{j_\delta, i_\gamma j_\mu} , \quad (i \neq j) , \qquad u_{j_\gamma, v_\delta w_\gamma} = u_{w_\gamma, j_\delta v_\gamma} , \quad (\gamma \neq \delta) . \tag{1.36}$$

Ayant seulement deux indices distincts, les composantes qui restent à regarder sont

$$u_{j_\gamma, i_\delta j_\gamma} = u_{j_\delta, i_\gamma j_\gamma} = u_{i_\delta, j_\gamma j_\gamma} = 0$$

et

$$u_{j_\delta, i_\gamma j_\gamma} = u_{i_\delta, j_\gamma j_\gamma} = 0 .$$

Ainsi on a démontré la

PROPOSITION 2 [1]. – *Le groupe de cohomologie $H^{2,2}(\mathfrak{g}_{p,q})$ de l'algèbre de Lie du groupe $GL(p, \mathbf{R}) \otimes GL(q, \mathbf{R})$ est nul si $p \geqslant 2$, $q \geqslant 2$.*

8. – La G-structure que nous étudions jouit d'une propriété remarquable; elle permet de construire de manière canonique un supplémentaire du sousespace

$$\partial\big(\mathfrak{C}^{2,0}(\mathfrak{g}_{p,q}) = \mathfrak{g}^{(1)}_{p,q}\big) \subset \mathfrak{C}^{1,1}(\mathfrak{g}_{p,q}) = \mathfrak{g}_{p,q} \otimes (\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q)^* .$$

Soit $t \in \mathfrak{C}^{1,1}(\mathfrak{g}_{p,q}) = \mathfrak{g}_{p,q} \otimes (\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q)^*$; par rapport à une base spéciale il s'exprime à l'aide de deux 1-formes A et B à valeurs dans $\mathfrak{gl}(p, \boldsymbol{R})$ et $\mathfrak{gl}(q, \boldsymbol{R})$ respectivement par

$$t^{i\alpha}_{j\beta\, k\gamma} = \delta^i_j A^\alpha_{\beta\, k\gamma} + \delta^\alpha_\beta B^i_{j\, k\gamma} .$$

La formule (1.4) montre que ces deux 1-formes ne sont pas uniquement définies par t; si ϱ est un covecteur de l'espace $\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q$, le même tenseur t s'obtiendra en remplaçant $A^\alpha_{\beta\, k\gamma}$ par $A^\alpha_{\beta\, k\gamma} + \delta^\alpha_\beta \varrho_{k\gamma}$ et $B^i_{j\, k\gamma}$ par $B^i_{j\, k\gamma} - \delta^i_j \varrho_{k\gamma}$ dans la formule précédente. Soit $u \in (\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q)^*$; la formule (1.17) qui donne la forme générale d'un élément de l'espace $\mathfrak{g}^{(1)}_{p,q}$ montre que le tenseur t' de composantes spéciales

$$t'^{i\alpha}_{j\beta\, k\gamma} = t^{i\alpha}_{j\beta\, k\gamma} + (\delta^{i\alpha}_{j\gamma} u_{k\beta} + \delta^{i\alpha}_{k\beta} u_{j\gamma}) = \delta^i_j(A^\alpha_{\beta\, k\gamma} + \delta^\alpha_\beta \varrho_{k\gamma} + \delta^\alpha_\gamma u_{k\beta}) + \delta^\alpha_\beta(B^i_{j\, k\gamma} - \delta^i_j \varrho_{k\gamma} + \delta^i_k u_{j\gamma})$$

définit la même classe que t dans l'espace quotient $\mathfrak{C}^{1,1}(\mathfrak{g}_{p,q})/\partial\mathfrak{C}^{2,0}(\mathfrak{g}_{p,q})$. Les covecteurs ϱ et u peuvent être déterminés de manière unique en imposant aux 1-formes A' et B' à valeurs dans $\mathfrak{gl}(p, \boldsymbol{R})$ et $\mathfrak{gl}(q, \boldsymbol{R})$ respectivement, de composantes spéciales

$$A'^\alpha_{\beta\, k\gamma} = A^\alpha_{\beta\, k\gamma} + \delta^\alpha_\beta \varrho_{k\gamma} + \delta^\alpha_\gamma u_{k\beta} , \qquad B'^i_{j\, k\gamma} = B^i_{j\, k\gamma} - \delta^i_j \varrho_{k\gamma} + \delta^i_k u_{j\gamma}$$

d'avoir les traces nulles. En effet, ces conditions donnent

$$\operatorname{Tr} A + p\varrho + u = 0 , \qquad \operatorname{Tr} B - q\varrho + u = 0$$

donc

$$\varrho = (\operatorname{Tr} B - \operatorname{Tr} A)/p + q , \qquad u = (-\, q \operatorname{Tr} A - p \operatorname{Tr} B)/p + q .$$

Nous pouvons donc énoncer le

LEMME 4. – *Dans chaque classe d'équivalence du quotient* $\mathfrak{C}^{1,1}(\mathfrak{g}_{p,q})/\partial\mathfrak{C}^{2,0}(\mathfrak{g}_{p,q})$ *on peut trouver un élément unique* $A \otimes 1_q + 1_p \otimes B$ *où* A, B *sont des* 1*-formes à valeurs dans* $\mathfrak{gl}(p, \boldsymbol{R})$ *et* $\mathfrak{gl}(q, \boldsymbol{R})$ *respectivement de traces nulles. L'ensemble de ces tenseurs est un sous-espace vectoriel de* $\mathfrak{C}^{1,1}(\mathfrak{g}_{p,q})$ *supplémentaire à*

$$\partial\mathfrak{C}^{2,0}(\mathfrak{g}_{p,q}) = \partial^{-1}(0) \cap \mathfrak{C}^{1,1}(\mathfrak{g}_{p,q}) .$$

9. – Etant donné un cobord $t \in \partial\mathfrak{C}^{1,1}(\mathfrak{g}_{p,q})$, l'équation

$$\partial z = t , \qquad z \in \mathfrak{C}^{1,1}(\mathfrak{g}_{p,q})$$

ne détermine z qu'à un cocycle $\zeta \in \partial^{-1}(0) \cap \mathfrak{C}^{1,1}(\mathfrak{g}_{p,q}) = \partial\mathfrak{C}^{2,0}(\mathfrak{g}_{p,q})$ près.

Proposons-nous de trouver dans la classe de z modulo $\partial \mathcal{C}^{2,0}(\mathfrak{g}_{p,q})$ dans $\mathcal{C}^{1,1}(\mathfrak{g}_{p,q})$ la cochaîne $z' = A \otimes \mathbf{1}_q + \mathbf{1}_q \otimes B$ dont l'existence est assurée par le lemme 4. Par rapport à une base spéciale nous aurons à résoudre l'équation

$$\delta^i_j A^{\alpha}_{\beta\, k_\gamma} + \delta^{\alpha}_{\beta} B^i_{j\, k_\gamma} - \delta^i_k A^{\alpha}_{\gamma\, j_\beta} - \delta^{\alpha}_{\gamma} B^i_{k\, j_\beta} = t^{i_\alpha}_{j_\beta\, k_\gamma} \tag{1.37}$$

les traces des matrices A_{k_γ} et B_{k_γ} étant nulles. Faisons $i = j$ et contractons, ensuite permutons β avec γ. Les formules (1.10′) et (1.9′) montrent que ces opérations sont réalisables à l'aide des endomorphismes associés au tenseur $\mathcal{S}$ après avoir multiplié les équations obtenues par δ^i_j. Nous obtenons les deux équations

$$qA^{\alpha}_{\beta\, k_\gamma} + \delta^{\alpha}_{\beta} B^r_{r\, k_\gamma} - A^{\alpha}_{\gamma\, k_\beta} - \delta^{\alpha}_{\gamma} B^r_{k\, r_\beta} = t^{r_\alpha}_{r_\beta\, k_\gamma}\,,$$
$$qA^{\alpha}_{\gamma\, k_\beta} + \delta^{\alpha}_{\gamma} B^r_{r\, k_\beta} - A^{\alpha}_{\beta\, k_\gamma} - \delta^{\alpha}_{\beta} B^r_{k\, r_\gamma} = t^{r_\alpha}_{r_\gamma\, k_\beta}\,.$$

Multiplions la première par q et faisons les sommes des deux membres entre eux. Nous obtenons:

$$(q^2 - 1)\, A^{\alpha}_{\beta\, k_\gamma} - q\delta^{\alpha}_{\gamma} B^r_{k\, r_\beta} - \delta^{\alpha}_{\beta} B^r_{k\, r_\gamma} = qt^{r_\alpha}_{r_\beta\, k_\gamma} + t^{r_\alpha}_{r_\gamma\, k_\beta}\,.$$

Faisons encore $\alpha = \beta$ et contractons; en tenant compte que $\operatorname{Tr} A_{k_\gamma} = 0$ nous obtenons la contraction $B^r_{k\, r_\mu}$,

$$-(p + q)\, B^r_{k\, r_\gamma} = qt^{r_\varrho}_{r_\varrho\, k_\gamma} + t^{r_\varrho}_{r_\gamma\, k_\varrho}$$

et en reportant dans l'équation précédente multipliée par δ^i_j nous trouvons que

$$\left\{\begin{aligned} A^{\alpha}_{\beta\, k_\gamma} &= \frac{1}{q^2 - 1}\left[qt^{r_\alpha}_{r_\beta\, k_\gamma} + t^{r_\alpha}_{r_\gamma\, k_\beta} - \frac{\delta^{\alpha}_{\beta}}{p + q}\,(qt^{r_\varrho}_{r_\varrho k_\gamma} + t^{r_\varrho}_{r_\gamma\, k_\varrho}) - q\,\frac{\delta^{\alpha}_{\gamma}}{p + q}\,(qt^{r_\varrho}_{r_\varrho\, k_\beta} + t^{r_\varrho}_{r_\beta\, k_\varrho})\right], \\ B^i_{j\, k_\gamma} &= \frac{1}{p^2 - 1}\left[pt^{i_\varrho}_{j_\varrho\, k_\gamma} + t^{i_\varrho}_{k_\varrho\, j_\gamma} - \frac{\delta^i_j}{p + q}\,(pt^{r_\varrho}_{r_\varrho\, k_\gamma} + t^{r_\varrho}_{k_\varrho\, r_\gamma}) - p\,\frac{\delta^i_k}{p + q}\,(pt^{r_\varrho}_{r_\varrho\, j_\gamma} + t^{r_\varrho}_{j_\varrho\, r_\gamma})\right], \end{aligned}\right. \tag{1.38}$$

ce qui résout l'équation (1.37).

10. – Si t est une 2-forme vectorielle quelconque de l'espace $\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q$, le cobord $\partial(A \otimes \mathbf{1}_q + \mathbf{1}_p \otimes B)$ où A, B sont les 1-formes à valeurs dans les algèbres de Lie $\mathfrak{gl}(p, \boldsymbol{R})$, $\mathfrak{gl}(q, \boldsymbol{R})$ formées à partir de t par les formules précédentes, représente une nouvelle 2-forme vectorielle de l'espace $\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q$ que nous allons noter $\alpha(t)$. L'endomorphisme α de $(\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q) \otimes \Lambda^2(\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q)^*$ ainsi défini est un projecteur de l'espace $(\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q) \otimes \Lambda^2(\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q)^*$ sur son sous-espace vectoriel $\partial(\mathfrak{g}_{p,q} \otimes (\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q)^*)$. L'application β définie par $\beta(t) = t - \alpha(t)$ est donc toujours un projecteur, son noyau étant le sous-espace $\partial(\mathfrak{g}_{p,q} \otimes (\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q)^*)$. Les formules (1.38) donnent les composantes suivantes du tenseur $\beta(t)$ par rapport à une base spéciale:

$$(1.39)\qquad \beta(t)^{i\alpha}_{j_\beta k_\gamma} =$$

$$= t^{i\alpha}_{j_\beta k_\gamma} - \frac{\delta^i_j}{q^2-1}\left[q t^{r\alpha}_{r_\beta k_\gamma} + t^{r\alpha}_{r_\gamma k_\beta} - \frac{\delta^\alpha_\beta}{p+q}(q t^{r\alpha}_{r_\varrho k_\gamma} + t^{r\varrho}_{r_\gamma k_\varrho}) - q\frac{\delta^\alpha_\gamma}{p+q}(q t^{r\varrho}_{r_\varrho k_\beta} + t^{r\varrho}_{r_\beta k_\varrho})\right] -$$

$$-\frac{\delta^\alpha_\beta}{p^2-1}\left[p t^{i\varrho}_{j_\varrho k_\gamma} + t^{i\varrho}_{k_\varrho j_\gamma} - \frac{\delta^i_j}{p+q}(p t^{r\varrho}_{r_\varrho k_\gamma} + t^{r\varrho}_{k_\varrho r_\gamma}) - p\frac{\delta^i_k}{p+q}(p t^{r\varrho}_{r_\varrho j_\gamma} + t^{r\varrho}_{j_\varrho r_\gamma})\right] +$$

$$+\frac{\delta^i_k}{q^2-1}\left[q t^{r\alpha}_{r_\gamma j_\beta} + t^{r\alpha}_{r_\beta j_\gamma} - \frac{\delta^\alpha_\gamma}{p+q}(q t^{r\varrho}_{r_\varrho j_\beta} + t^{r\varrho}_{r_\beta j_\varrho}) - q\frac{\delta^\alpha_\beta}{p+q}(q t^{r\varrho}_{r_\varrho j_\gamma} + t^{r\varrho}_{r_\gamma j_\varrho})\right] +$$

$$+\frac{\delta^\alpha_\gamma}{p^2-1}\left[p t^{i\varrho}_{k_\varrho j_\beta} + t^{i\varrho}_{j_\varrho k_\beta} - \frac{\delta^i_k}{p+q}(p t^{r\varrho}_{r_\varrho j_\beta} + t^{r\varrho}_{j_\varrho r_\beta}) - p\frac{\delta^i_j}{p+q}(p t^{r\varrho}_{r_\varrho k_\beta} + t^{r\varrho}_{k_\varrho r_\beta})\right].$$

En vue d'applications ultérieures, nous allons décomposer ce tenseur en faisant appel à l'action $\mathcal{S}$ définie par la deuxième formule (1.9′) sur les tenseurs deux fois covariants.

Soit donc $t \to t'' = \underline{\mathcal{S}}(t)$ l'application linéaire qui agit sur les tenseurs de type $\binom{1}{2}$ de $\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q$ par

$$t''^{I}_{JK} = \mathcal{S}^{RS}_{JK} t^I_{RS}\,, \qquad t''^{i\alpha}_{j_\beta k_\gamma} = \mathcal{S}^{r_\varrho s_\sigma}_{j_\beta k_\gamma} t^{i\alpha}_{r_\varrho s_\sigma} = t^{i\alpha}_{j_\gamma k_\beta}$$

en permutant donc les indices grecs des composantes de covariance. Considérons maintenant le tenseur $\mu(t)$ défini par

$$(1.40)\qquad \mu(t) = (pq-1)\,\beta(t) + (q-p)\,\underline{\mathcal{S}}(\beta(t))\,.$$

En tenant compte que l'operateur $\underline{\mathcal{S}}$ est involutif, il en résulte que à son tour $\beta(t)$ s'exprime à l'aide de $\mu(t)$ par la formule

$$(1.41)\qquad \beta(t) = \frac{pq-1}{(p^2-1)(q^2-1)}\cdot\mu(t) + \frac{p-q}{(p^2-1)(q^2-1)}\underline{\mathcal{S}}(\mu(t))\,.$$

Les formules (1.39), (1.40) donnent pour composantes spéciales du tenseur $\mu(t)$

$$(1.42)\qquad \mu(t)^{i\alpha}_{j_\beta k_\gamma} = (pq-1)\,t^{i\alpha}_{j_\beta k_\gamma} + (p-q)\,t^{i\alpha}_{j_\gamma k_\beta} -$$

$$-(p\delta^i_j t^{r\alpha}_{r_\beta k_\gamma} + q\delta^\alpha_\beta t^{i\varrho}_{j_\varrho k_\varrho} - \delta^{i\alpha}_{j_\beta} t^{r\varrho}_{r_\varrho k_\gamma}) + (p\delta^i_k t^{r\alpha}_{r_\gamma j_\beta} + q\delta^\alpha_\gamma t^{i\varrho}_{k_\varrho j_\beta} - \delta^{i\alpha}_{k_\gamma} t^{r\varrho}_{r_\varrho j_\beta}) -$$

$$-(\delta^i_j t^{r\alpha}_{r_\gamma k_\beta} - \delta^\alpha_\gamma t^{i\varrho}_{j_\varrho k_\beta} - \delta^{i\alpha}_{j_\gamma} t^{r\varrho}_{r_\beta k_\varrho}) + (\delta^i_k t^{r\alpha}_{r_\beta j_\gamma} - \delta^\alpha_\beta t^{i\varrho}_{k_\varrho j_\gamma} - \delta^{i\alpha}_{k_\beta} t^{r\varrho}_{r_\gamma j_\varrho}).$$

PARTIE 2

11. – Soit M une variété différentiable de dimension pq et E, F deux fibrés vectoriels différentiables de base M et de fibres type $\boldsymbol{R}^p$ et $\boldsymbol{R}^q$ respectivement. Supposons qu'on ait l'isomorphisme suivant de fibrés vectoriels de base M

$$TM \simeq E \otimes F \tag{2.1}$$

où TM représente la fibré tangent à la variété M; le fibré principal des repères tangentes à la variété M, $\mathcal{R}(M)$ admet alors un sous-fibré ayant comme groupe de structure $GL(p, \boldsymbol{R}) \otimes GL(q, \boldsymbol{R}) \subset GL(pq, \boldsymbol{R})$. Supposons qu'au dessus d'un voisinage $U \subset M$ les fibrés E, F admettent des sections de trivialisation e_α: $U \to E$, $\alpha = 1, \ldots, p$, f_i: $U \to F$, $i = p+1, \ldots, q+p$. Par l'isomorphisme de départ (2.1), aux produits $e_\alpha \otimes f_i$ correspondent pq champs de vecteurs e_{i_α}: $U \to TU$ qui engendrent une section de l'espace de repères tangentes à M au dessus de U. Désormais de telles sections locales seront appelées spéciales.

Faisons la notation de [14] pour les coefficients des crochets de Poisson $[e_{j_\beta}, e_{k_\gamma}]$ c'est-à-dire posons

$$[e_{j_\beta}, e_{k_\gamma}] = \sum_{i,\alpha} w^{i_\alpha}_{j_\beta k_\gamma} e_{i_\alpha} \tag{2.2}$$

$w^{i_\alpha}_{j_\beta k_\gamma}$ étant des fonctions scalaires sur le voisinage U qui dépendent des deux sections locales $\{e_\alpha\}$ et $\{f_i\}$. Dire que la $G_{p,q}$-structure correspondant à l'isomorphisme (2.1) est plate revient à la possibilité de construire sur la variété M des sections locales des fibrés E et F de façon que les fonctions correspondantes $w^{i_\alpha}_{j_\beta k_\gamma}$ soient nulles; car dans ce cas, les champs e_{i_α} seraient permutables et indépendants donc tangents à des lignes de coordonnées locales sur M. Notre problème est de trouver des conditions assurant l'existence de telles coordonnées locales.

Pour leur recherche, nous disposons des transformations locales de sections dans les fibrés E et F que nous écrivons sous la forme

$$\left\{\begin{array}{lll} e_\alpha = \sum\limits_\varrho P^\varrho_\alpha e'_\varrho\,, & e'_\alpha = \sum\limits_\varrho p^\varrho_\alpha e_\varrho\,, & \sum\limits_\varrho P^\varrho_\alpha p^\beta_\varrho = \delta^\beta_\alpha = \sum\limits_\varrho p^\varrho_\alpha P^\beta_\varrho\,, \\ f_i = \sum\limits_r Q^r_i f'_r\,, & f'_i = \sum\limits_r q^r_i f_r\,, & \sum\limits_r Q^r_i q^j_r = \delta^j_i = \sum\limits_r q^r_i Q^j_r\,, \end{array}\right. \tag{2.3}$$

où P: $U \to GL(p, \boldsymbol{R})$, Q: $U \to GL(q, \boldsymbol{R})$ sont des fonctions locales définies par les matrices (P^β_α), (Q^i_j) ....

Pour les produits tensoriels des sections on obtient $e_\alpha \otimes f_i = \sum\limits_{p,r} P^\varrho_\alpha Q^r_i e'_\varrho \otimes f'_r$ et on a les mêmes formules pour les transformations de sections locales dans l'espace

$\mathfrak{R}(U)$ des repères tangents au voisinage U

$$e_{i_\alpha} = \sum_{\varrho, r} P^\varrho_\alpha Q^r_i e'_{r_\varrho}, \qquad e'_{i_\alpha} = \sum_{\varrho, r} p^\varrho_\alpha q^r_i e_{r_\varrho}. \tag{2.4}$$

Les formules qui lient les nouveaux coefficients $w'^{i_\alpha}_{i_\beta k_\gamma}$ aux anciens s'obtiennent par le calcul suivant:

$$w^{i_\alpha}_{j_\beta k_\gamma} e_{i_\alpha} = [e_{j_\beta}, e_{k_\gamma}] = [P^\varrho_\beta Q^r_j e'_{r_\varrho}, P^\sigma_\gamma Q^s_k e'_{s_\sigma}] =$$
$$= P^\varrho_\beta Q^r_j P^\sigma_\gamma Q^s_k w'^{t_\tau}_{r_\varrho s_\sigma} e'_{t_\tau} + e_{j_\beta}(P^\sigma_\gamma Q^s_k) e'_{s_\sigma} - e_{k_\gamma}(P^\varrho_\beta Q^r_j) e'_{r_\varrho}.$$

Donc

$$w^{i_\alpha}_{j_\beta k_\gamma} P^\tau_\alpha Q^t_i - w'^{t_\tau}_{r_\varrho s_\sigma} P^\varrho_\beta Q^r_j P^\sigma_\gamma Q^s_k = \partial_{j_\beta}(P^\tau_\gamma Q^t_k) - \partial_{k_\gamma}(P^\tau_\beta Q^t_j) \tag{2.5}$$

sont les formules cherchées; $\partial_{j_\beta}(F)$ ou $e_{j_\beta}(F)$ représente la dérivée de la fonction F en direction du champ e_{j_β}.

12. – En nous appuyant sur les considérations algébriques de 10 nous allons deduire le premier tenseur d'intégrabilité de la $G_{p,q}$-structure.

Multiplions (2.5) par p^α_τ, q^i_t et contractons en τ et t; nous trouvons

$$w^{i_\alpha}_{j_\beta k_\gamma} - p^\alpha_\tau q^i_t w'^{t_\tau}_{r_\varrho s_\sigma} P^\varrho_\beta Q^r P^\sigma_\gamma Q^s_k = \delta^i_k \,\mathfrak{T}^\alpha_{\gamma j_\beta} + \delta^\alpha_\gamma \mathfrak{Q}^i_{k j_\beta} - \delta^i_j \mathfrak{T}^\alpha_{\beta k_\gamma} - \delta^\alpha_\beta \mathfrak{Q}^i_{j k_\gamma} \tag{2.6}$$

où on a noté

$$\mathfrak{T}^\alpha_{\gamma j_\beta} = p^\alpha_\tau \partial_{j_\beta} P^\tau_\gamma, \qquad \mathfrak{Q}^i_{k j_\beta} = q^i_t \partial_{j_\beta} Q^t_k. \tag{2.7}$$

Au deuxième membre apparaît le cobord (algébrique) d'une 1-forme locale $\mathfrak{T} \otimes \mathbf{1}_q + \mathbf{1}_p \otimes \mathfrak{Q}$ à valeurs dans $\mathfrak{g}_{p,q}$, $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{Q}$ étant deux 1-formes locales à valeurs dans $\mathfrak{gl}(p, \boldsymbol{R})$ et $\mathfrak{gl}(q, \boldsymbol{R})$ respectivement. Ainsi, lorsque la $G_{p,q}$-structure est plate, la formule étant satisfaite par $w'^{t_\tau}_{r_\varrho s_\sigma} = 0$, on trouve que $w^{i_\alpha}_{j_\beta k_\gamma}$ sont les composantes spéciales du cobord $-\partial(\mathfrak{T} \otimes \mathbf{1}_q + \mathbf{1}_p \otimes \mathfrak{Q})$. Les considérations algébriques de 9, formules (1.38), permettent de déterminer une forme $A \otimes \mathbf{1}_q + \mathbf{1}_p \otimes B$ unique, telle que $\partial(A \otimes \mathbf{1}_q + \mathbf{1}_p \otimes B) = \partial(\mathfrak{T} \otimes \mathbf{1}_q + \mathbf{1}_p \otimes \mathfrak{Q}) = -w$ les 1-formes A et B ayant les traces nulles. Leurs composantes spéciales sont données par

$$\left\{\begin{aligned} A^\alpha_{\beta k_\gamma} &= \frac{1}{q^2-1}\Big[q w^{r_\alpha}_{r_\beta k_\gamma} + w^{r_\alpha}_{r_\gamma k_\beta} - \frac{\delta^\alpha_\beta}{p+q}(q w^{r_\varrho}_{r_\varrho k_\gamma} + w^{r_\varrho}_{r_\gamma k_\varrho}) - \\ &\qquad\qquad - q\frac{\delta^\alpha_\gamma}{p+q}(q w^{r_\varrho}_{r_\varrho k_\beta} + w^{r_\varrho}_{r_\beta k_\varrho})\Big], \\ B^i_{j k_\gamma} &= \frac{1}{p^2-1}\Big[p w^{i_\varrho}_{j_\varrho k_\gamma} + w^{i_\varrho}_{k_\varrho j_\gamma} - \frac{\delta^i_j}{p+q}(p w^{r_\varrho}_{r_\varrho k_\gamma} + w^{r_\varrho}_{k_\varrho r_\gamma}) - \\ &\qquad\qquad - p\frac{\delta^i_k}{p+q}(p w^{r_\varrho}_{r_\varrho j_\gamma} + w^{r_\varrho}_{j_\varrho r_\gamma})\Big]. \end{aligned}\right. \tag{2.8}$$

Ainsi la condition nécessaire d'intégrabilité que nous avons trouvée s'écrit

$$w + \partial(\mathcal{F} \otimes \mathbf{1}_q + \mathbf{1}_p \otimes \mathcal{Q}) = 0 \tag{2.9}$$

où w représente la 2-forme vectorielle locale à composantes $w^{i\alpha}_{j\beta\, k\gamma} = - w^{i\alpha}_{k\gamma\, j\beta}$ définie dans (2.2) par les sections locales e_α, f_i des fibrés E et F et où les 1-formes locales $\mathcal{F}$ et $\mathcal{Q}$ à valeurs dans $\mathfrak{gl}(p, \boldsymbol{R})$ et $\mathfrak{gl}(q, \boldsymbol{R})$ sont données par la formule (2.7). Cette condition ne dépend pas des sections locales choisies e_α, f_i ayant un caractère invariant comme le montre la formule (2.6). Le premier membre de la formule (2.9) représente le premier tenseur d'intégrabilité $B_{\mathcal{S}}$ (tenseur de Bernard) de la structure. Ses composantes locales spéciales sont

$$(B_{\mathcal{S}})^{i\alpha}_{k\gamma\, j\beta} = w^{i\alpha}_{j\beta\, k\gamma} + \delta^i_j A^\alpha_{\beta\, k\gamma} + \delta^\alpha_\beta B^i_{j\, k\gamma} - \delta^i_k A^\alpha_{\gamma\, j\beta} - \delta^\alpha_\beta B^i_{k\, j\beta} \tag{2.10}$$

où, $A^\alpha_{\beta\, k\gamma}$ et $B^i_{j\, k\gamma}$ sont données par (2.8).

En effet, on sait, voir [3], que le tenseur de Bernard d'une G-structure coïncide avec le tenseur de torsion d'une G-connexion Γ. Dans notre cas, une $G_{p,q}$-connexion locale particulière peut être définie par la 1-forme locale $\mathcal{F} \otimes \mathbf{1}_q + \mathbf{1}_p \otimes \mathcal{Q}$ et le premier membre de (2.9) représente alors son tenseur de torsion.

13. – On a vu, lemme 1, que $G_{p,q}$ est un sous-groupe algébrique de $GL(pq, \boldsymbol{R})$. L'isomorphisme (2.1) implique alors l'existence d'un champ $\tilde{\mathcal{S}}$ sur la variété M; sa valeur $\tilde{\mathcal{S}}_x$ au point $x \in M$ définit la fibre en x de la $G_{p,q}$-structure que nous étudions comme l'ensemble des repères de $T_x M$ par rapport auxquels les composantes de $\tilde{\mathcal{S}}_x$ prennent les valeurs (1.8).

Pour simplifier les notations nous allons noter encore $\mathcal{S}$ ce champ tensoriel de type $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$.

Nous nous proposons d'exprimer le tenseur d'intégrabilité $B_{\mathcal{S}}$ à l'aide du champ $\mathcal{S}$. Définissons d'abord le champ $M_{\mathcal{S}}$ par

$$M_{\mathcal{S}} = (pq - 1) B_{\mathcal{S}} + (q - p) \underline{\mathcal{S}}(B_{\mathcal{S}}) . \tag{2.11}$$

La formule (1.41) permet d'écrire

$$B_{\mathcal{S}} = \frac{pq - 1}{(p^2 - 1)(q^2 - 1)} M_{\mathcal{S}} + \frac{p - q}{(p^2 - 1)(q^2 - 1)} \underline{\mathcal{S}}(M_{\mathcal{S}}) . \tag{2.12}$$

Ainsi, il suffit d'exprimer le champ $M_{\mathcal{S}}$ à l'aide du champ $\mathcal{S}$ pour avoir résolu le problème. Mais les composantes locales spéciales du champ $M_{\mathcal{S}}$ s'obtiennent de (2.10) par le même calcul qui conduit à la formule (1.42) à partir de (1.39) elles sont donc

$$(2.13)\qquad (M_{\mathrm{S}})^{i\alpha}_{j_\beta k_\gamma} = (pq-1)\,w^{i_\alpha}_{j_\beta k_\gamma} + (q-p)\,w^{i_\alpha}_{j_\gamma k_\beta} - \\ -\left(p\delta^i_j w^{r_\alpha}_{r_\beta k_\gamma} + q\delta^\alpha_\beta w^{i_\varrho}_{j_\varrho k_\gamma} - \delta^{i_\alpha}_{j_\beta} w^{r_\varrho}_{r_\varrho k_\gamma}\right) + \left(p\delta^i_k w^{r_\alpha}_{r_\gamma j_\beta} + q\delta^\alpha_\gamma w^{i_\varrho}_{k_\varrho j_\beta} - \delta^{i_\alpha}_{k_\gamma} w^{r_\varrho}_{r_\varrho j_\beta}\right) - \\ -\left(\delta^i_j w^{r_\alpha}_{r_\gamma k_\beta} - \delta^\alpha_\gamma w^{i_\varrho}_{j_\varrho k_\beta} - \delta^{i_\alpha}_{j_\gamma} w^{r_\varrho}_{r_\beta k_\varrho}\right) + \left(\delta^i_k w^{r_\alpha}_{r_\beta j_\gamma} - \delta^\alpha_\beta w^{i_\varrho}_{k_\varrho j_\gamma} - \delta^{i_\alpha}_{k_\beta} w^{r_\varrho}_{r_\gamma j_\varrho}\right).$$

Soit Γ une connexion linéaire sans torsion sur la variété M et soit ∇ l'opérateur de dérivation covariante associé à Γ.

Si U est un voisinage de M muni de repères formés en chaque point x par pq vecteurs $e_I(x) \in T_x M$, $I = 1, \ldots, pq$, définissons les coefficients de connexion par rapport à cette section locale du fibré des repères par

$$\nabla_{e_K} e_J = \gamma^R_{JK}\, e_R\,.$$

La connexion étant supposée sans torsion, on aura

$$\nabla_{e_K} e_J - \nabla_{e_J} e_K + [e_J, e_K] = 0$$

donc

$$\gamma^I_{JK} - \gamma^I_{JK} + w^I_{JK} = 0\,.$$

Ainsi, on peut exprimer le tenseur M_{S} avec les coefficients d'une connexion Γ sans torsion lorsque la section du fibré des repères tangents au voisinage U est spéciale en remplaçant $w^{i_\alpha}_{j_\beta k_\gamma}$ par les différences $\gamma^{i_\alpha}_{k_\gamma j_\beta} - \gamma^{i_\alpha}_{j_\beta k_\gamma}$ dans la formule (2.13).

Ensuite, afin d'exprimer le tenseur M_{S} à l'aide du champ S il faudra faire apparaître dans cette formule les dérivées covariantes du dernier. Considérons donc les dérivées covariantes des composantes du champ S par rapport à la connexion Γ introduite plus haut. Avec la convention que les indices qui suivent la virgule représentent les indices de dérivation covariante on a, en tenant compte de la formule (1.8) qui donne les composantes spéciales du champ S

$$(2.14)\qquad \mathrm{S}^{i_\alpha l_\sigma}_{j_\beta k_\gamma,\, m_\mu} = \gamma^{i_\alpha}_{j_\gamma m_\mu}\,\delta^{l_\sigma}_{k_\beta} + \gamma^{l_\sigma}_{k_\beta m_\mu}\,\delta^{i_\alpha}_{j_\gamma} - \gamma^{i_\sigma}_{j_\beta m_\mu}\,\delta^{l_\alpha}_{k_\gamma} - \gamma^{l_\alpha}_{k_\gamma m_\mu}\,\delta^{i_\sigma}_{j_\beta}\,.$$

A part les contractions habituelles, nous pouvons former encore des contractions « croisées » car la permutation de deux indices grecs (ou latins) a un caractère invariant.

Ainsi, nous obtenons par contractions les tenseurs suivants qui nous intéressent:

$$(2.15)\qquad \begin{cases} \mathrm{S}^{i_\alpha r_\varrho}_{j_\beta k_\gamma,\, r_\varrho} = \gamma^{i_\alpha}_{j_\gamma k_\beta} + \gamma^{r_\varrho}_{k_\beta r_\varrho}\,\delta^{i_\alpha}_{j_\gamma} - \delta^\alpha_\gamma\,\gamma^{i_\varrho}_{j_\beta k_\varrho} - \delta^i_j\,\gamma^{r_\alpha}_{k_\gamma r_\beta}\,, \\ \mathrm{S}^{i_\alpha r_\varrho}_{j_\varrho r_\gamma,\, m_\mu} = pq\,\gamma^{i_\alpha}_{j_\gamma m_\mu} + \delta^{i_\alpha}_{j_\gamma}\,\gamma^{r_\varrho}_{r_\varrho m_\mu} - q\delta^\alpha_\gamma\,\gamma^{i_\varrho}_{j_\varrho m_\mu} - p\delta^i_j\,\gamma^{r_\alpha}_{r_\gamma m_\mu}\,, \\ \mathrm{S}^{i_\alpha r_\varrho}_{j_\beta r_\gamma,\, m_\varrho} = q\,\gamma^{i_\alpha}_{j_\gamma m_\beta} + \delta^{i_\alpha}_{j_\gamma}\,\gamma^{r_\varrho}_{r_\beta m_\varrho} - q\delta^\alpha_\gamma\,\gamma^{i_\varrho}_{j_\beta m_\varrho} - \delta^i_j\,\gamma^{r_\alpha}_{r_\gamma m_\beta}\,, \\ \mathrm{S}^{i_\alpha r_\varrho}_{j_\varrho k_\gamma,\, r_\mu} = p\,\gamma^{i_\alpha}_{j_\gamma k_\mu} + \delta^{i_\alpha}_{j_\gamma}\,\gamma^{r_\varrho}_{k_\varrho r_\mu} - \delta^\alpha_\gamma\,\gamma^{i_\varrho}_{j_\varrho k_\mu} - p\delta^i_j\,\gamma^{r_\alpha}_{k_\gamma r_\mu}\,. \end{cases}$$

Les trois dernières contractions croisées peuvent être formées aussi par rapport à une base quelconque; elles deviennent alors respectivement

$$\mathrm{S}^{UV}_{JR}\,\mathrm{S}^{IR}_{UV,M}\,, \qquad \mathrm{S}^{UV}_{RM}\,\mathrm{S}^{IR}_{JU,V} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S}^{UV}_{JR}\,\mathrm{S}^{IR}_{UK,V}\,. \tag{2.16}$$

Remplaçons maintenant $w^{i_\alpha}_{j_\beta k_\gamma}$ par $\gamma^{i_\alpha}_{k_\gamma j_\beta} - \gamma^{i_\alpha}_{j_\beta k_\gamma}$ dans (2.13).
En regroupant les termes nous trouvons

$$\begin{aligned}(M_\mathrm{S})^{i_\alpha}_{j_\beta k_\gamma} = {}& \mathrm{S}^{i_\alpha r_\varrho}_{j_\gamma k_\beta, r_\varrho} - \mathrm{S}^{i_\alpha r_\varrho}_{k_\beta j_\gamma, r_\varrho} - \mathrm{S}^{i_\alpha r_\varrho}_{j_\varrho r_\beta, k_\gamma} + \mathrm{S}^{i_\alpha r_\varrho}_{k_\varrho r_\gamma, j_\beta} - \\ & - \mathrm{S}^{i_\alpha r_\varrho}_{j_\beta r_\gamma, k_\varrho} + \mathrm{S}^{i_\alpha r_\varrho}_{k_\gamma r_\beta, j_\varrho} + \mathrm{S}^{i_\alpha r_\varrho}_{j_\varrho k_\gamma, r_\beta} - \mathrm{S}^{i_\alpha r_\varrho}_{k_\varrho j_\beta, r_\gamma}\end{aligned} \tag{2.17}$$

et en utilisant le champ S pour reformer les paires j_β et k_γ nous pouvons écrire en remplaçant i_α par I, j_β par J et k_γ par K

$$(M_\mathrm{S})^I_{JK} = \mathrm{S}^{UV}_{[JK]}\,\mathrm{S}^{IR}_{UV,R} - \mathrm{S}^{UV}_{[J|R}\,\mathrm{S}^{IR}_{UV|,K]} - \mathrm{S}^{UV}_{R[K}\,\mathrm{S}^{IR}_{J]U,V} + \mathrm{S}^{UV}_{[J|R}\,\mathrm{S}^{IR}_{U|K],V}\,. \tag{2.18}$$

Dans cette formule les crochets représentent l'antisymétrisation et comme celle-ci porte seulement sur les indices J et K nous avons placé entre barres verticales les indices qui ne participent pas à cette opération.

14. – La formule (2.18) n'est pas la seule qu'on puisse établir pour exprimer le champ M_S ou B_S à l'aide du champ S. Nous allons présenter une autre en termes du symétrisé ψ du champ S c'est-à-dire en termes du champ à composantes

$$\psi^{IJ}_{KL} = \mathrm{S}^{IJ}_{KL} + \mathrm{S}^{IJ}_{LK} \tag{2.19}$$

qui est symétrique aussi dans ses indices de contravariance; l'intérêt d'une telle formule réside dans le fait que tout comme S, ce champ ψ définit la même G-structure, voir [13] page 117. Considérons de nouveau une connexion sans torsion Γ et calculons par rapport à une section spéciale du fibré des repères tangents à la variété les composantes locales des champs auxiliaires

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^I_{JK} &= \psi^{UV}_{JS}\,\psi^{IS}_{KU,V}\,, & \mathcal{B}^I_{JK} &= \tfrac{1}{2}\,\psi^{IS}_{UV,J}\,\psi^{UV}_{KS}\,, \\ \mathcal{C}^I_{JK} &= \tfrac{1}{2}\,\psi^{IU}_{SJ}\,\psi^{XY}_{KU,V}\,\psi^{SV}_{XY}\,, & \mathcal{D}^I_{JK} &= \tfrac{1}{2}\,\psi^{IS}_{UV}\,\psi^{XY}_{SJ}\,\psi^{UV}_{KX,Y}\,. \end{aligned}$$

Nous trouvons

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{i_\alpha}_{j_\beta k_\gamma} &= \psi^{i_\alpha s_\sigma}_{k_\gamma s_\beta, j_\sigma} + \psi^{i_\alpha s_\sigma}_{k_\gamma j_\sigma, s_\beta} = \\ &= p\gamma^{i_\alpha}_{j_\gamma k_\beta} + q\gamma^{i_\alpha}_{k_\beta j_\gamma} - p\delta^i_j\gamma^{r_\alpha}_{k_\gamma r_\beta} - q\delta^\alpha_\beta\gamma^{i_\varrho}_{k_\gamma j_\varrho} - \delta^i_k\gamma^{r_\alpha}_{r_\beta j_\gamma} - \delta^\alpha_\gamma\,\gamma^{i_\varrho}_{j_\varrho k_\beta} + \delta^{i_\alpha}_{j_\gamma}\gamma^{r_\varrho}_{k_\varrho r_\beta} + \delta^{i_\alpha}_{k_\beta}\,\gamma^{r_\varrho}_{r_\gamma j_\varrho}\,, \\ \mathcal{B}^{i_\alpha}_{j_\beta k_\gamma} &= \psi^{i_\alpha s_\sigma}_{k_\sigma s_\gamma, j_\beta} = pq\gamma^{i_\alpha}_{k_\gamma j_\beta} - p\delta^i_k\gamma^{r_\alpha}_{r_\gamma j_\beta} - q\delta^\alpha_\gamma\gamma^{i_\varrho}_{k_\varrho j_\beta} + \delta^{i_\alpha}_{k_\gamma}\gamma^{r_\varrho}_{r_\varrho j_\beta}\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C}^{i\alpha}_{k_\gamma j_\beta} &= \delta^i_k \psi^{s_\sigma r_\alpha}_{j_\beta s_\gamma, r_\sigma} + \delta^\alpha_\gamma \psi^{i_\sigma r_\varrho}_{j_\beta k_\varrho, r_\sigma} = \\
&= \delta^i_k (q\gamma^{r_\alpha}_{j_\gamma r_\beta} - \gamma^{r_\alpha}_{r_\gamma j_\beta} - q\delta^\alpha_\gamma \gamma^{r_\varrho}_{j_\beta r_\varrho} + \delta^\alpha_\gamma \gamma^{r_\varrho}_{r_\beta j_\varrho}) + \delta^\alpha_\gamma (p\gamma^{i_\varrho}_{k_\beta j_\varrho} - \gamma^{i_\varrho}_{k_\varrho j_\beta} - p\delta^i_k \gamma^{r_\varrho}_{j_\beta r_\varrho} + \delta^i_k \gamma^{r_\varrho}_{j_\varrho r_\beta}) \,, \\
\mathfrak{D}^{i\alpha}_{j_\beta k_\gamma} &= \psi^{i_\sigma s_\alpha}_{k_\gamma s_\beta, j_\sigma} + \psi^{i_\sigma s_\alpha}_{k_\gamma j_\sigma, s_\beta} = \\
&= -(p+q)\gamma^{i_\alpha}_{k_\gamma j_\beta} + q\delta^\alpha_\gamma \gamma^{i_\varrho}_{k_\beta j_\varrho} + p\delta^i_k \gamma^{r_\alpha}_{j_\gamma r_\beta} + \delta^\alpha_\gamma \gamma^{i_\varrho}_{k_\varrho j_\beta} + \delta^i_k \gamma^{r_\alpha}_{r_\gamma j_\beta} - \delta^{i_\alpha}_{k_\gamma} \gamma^{r_\varrho}_{r_\beta j_\varrho} - \delta^{i_\alpha}_{k_\gamma} \gamma^{r_\varrho}_{j_\varrho r_\beta} \,, \\
&\frac{1}{p+q}(\mathfrak{C}^{i\alpha}_{k_\gamma j_\beta} + \mathfrak{D}^{i\alpha}_{j_\beta k_\gamma}) = -\gamma^{i_\alpha}_{k_\gamma j_\beta} + \delta^\alpha_\gamma \gamma^{i_\varrho}_{k_\beta j_\varrho} + \delta^i_k \gamma^{r_\alpha}_{j_\gamma r_\beta} - \delta^{i_\alpha}_{k_\gamma} \gamma^{r_\varrho}_{j_\beta r_\varrho} \,.
\end{aligned}$$

On constate alors que la somme de tenseurs

$$\mathcal{A}^{i\alpha}_{[j_\beta k_\gamma]} + \mathcal{B}^{i\alpha}_{[j_\beta k_\gamma]} + \frac{1}{p+q}(\mathfrak{C}^{i\alpha}_{[k_\gamma j_\beta]} + \mathfrak{D}^{i\alpha}_{[j_\beta k_\gamma]})$$

où les crochets représentent l'antisymétrisation, coïncide avec $(M_\mathrm{S})^{i_\alpha}_{j_\beta k_\gamma}$. La relation étant tensorielle nous pouvons écrire

$$(M_\mathrm{S})^I_{JK} = \psi^{UV}_{S[J}\psi^{IS}_{K]U,V} + \tfrac{1}{2}\psi^{IS}_{UV,[J}\psi^{UV}_{K]S} + \frac{1}{2(p+q)}\psi^{IU}_{S[K}\psi^{XY}_{J]U,V}\psi^{SV}_{XY} + \frac{1}{2(p+q)}\psi^{IS}_{UV}\psi^{XY}_{S[J}\psi^{UV}_{K]X,Y} \tag{2.20}$$

et énoncer la

PROPOSITION 3. – *Le premier tenseur d'intégrabilité (tenseur de Bernard) B_S d'une $GL(p, \boldsymbol{R}) \otimes GL(q, \boldsymbol{R})$-structure est équivalent du point de vue de l'intégrabilité au tenseur M_S défini dans* (2.11).

Ce dernier s'exprime avec le tenseur de structure S *ou avec son symétrisé ψ par les formules* (2.18) *et* (2.20).

15. – Supposons désormais que le tenseur de Bernard B_S soit nul.

La formule (2.9) et les considérations de 9 basées sur le lemme 4 nous permettent d'écrire localement, dans un voisinage U muni d'une section spéciale du fibré des repères $\mathcal{R}(U)$

$$w^{i_\alpha}_{j_\beta k_\gamma} = \delta^i_j A^\alpha_{\beta k_\gamma} + \delta^\alpha_\beta B^i_{j k_\gamma} - \delta^i_k A^\alpha_{\gamma j_\beta} - \delta^\alpha_\gamma B^i_{k j_\beta} \tag{2.21}$$

où A et B sont donc deux 1-formes sur U à valeurs dans $\mathfrak{gl}(p, \boldsymbol{R})$ et $\mathfrak{gl}(q, \boldsymbol{R})$ respectivement. Les formes sont de plus uniques si on exige qu'elles aient des traces nulles

$$A^\varrho_{\varrho k_\gamma} = 0 = B^r_{r k_\gamma} \,. \tag{2.22}$$

Elles satisfont certaines conditions différentielles qui résultent des identités de Jacobi

$$[[e_{j_\beta}, e_{k_\gamma}], e^l{}_\sigma] + [[e_{k_\gamma}, e_{l_\sigma}], e_{j_\beta}] + [[e_{l_\sigma}, e_{j_\beta}], e_{k_\gamma}] = 0 \,.$$

En faisant la notation

$$
(2.23)\quad \left\{
\begin{aligned}
A^{*\,\alpha}_{\beta\,\beta_\gamma l_\delta} &= \partial_{l_\delta} A^{\alpha}_{\beta\,k_\gamma} + A^{\alpha}_{\varrho\,k_\gamma} A^{\varrho}_{\beta\,l_\delta} + A^{\alpha}_{\beta\,k_\varrho} A^{\varrho}_{\gamma\,l_\delta} + A^{\alpha}_{\beta\,r_\gamma} B^{r}_{k\,l_\delta} - \ldots \begin{pmatrix} k \\ \gamma \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} l \\ \delta \end{pmatrix}, \\
B^{*i}_{j\,k_\gamma l_\delta} &= \partial_{l_\delta} B^{i}_{j\,k_\gamma} + B^{i}_{r\,k_\gamma} B^{r}_{j\,l_\delta} + B^{i}_{j\,r_\gamma} B^{r}_{k\,l_\delta} + B^{i}_{j\,k_\varrho} A^{\varrho}_{\gamma\,l_\delta} - \ldots \begin{pmatrix} k \\ \gamma \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} l \\ \delta \end{pmatrix},
\end{aligned}
\right.
$$

où $\begin{pmatrix} k \\ \gamma \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} l \\ \varrho \end{pmatrix}$ signifie qu'il faut écrire au deuxième membre les termes qui précédent avec les indices k_γ et l_δ permutés entre eux, l'identité de Jacobi devient

$$
(2.24)\qquad \delta^i_j A^{*\alpha}_{\beta\,k_\gamma l_\delta} + \delta^\alpha_\beta B^{*\,i}_{j\,k_\gamma l_\delta} + \delta^i_k A^{*\alpha}_{\gamma\,l_\delta j_\beta} + \delta^\alpha_\gamma B^{*i}_{k\,l_\delta j_\beta} + \delta^i_l A^{*\alpha}_{\delta\,j_\beta k_\gamma} + \delta^\alpha_\delta B^{*i}_{l\,j_\beta k_\gamma} = 0\,.
$$

En termes algébriques, pour chaque point $x \in U$, les valeurs A^*_x, B^*_x des champs A^*, B^* en ce point définissent une 2-forme sur $\boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q$ à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{p,q}$, $A^*_x \otimes \mathbf{1}_p + \mathbf{1}_q \otimes B^*_x$ qui est un cocycle en tant qu'élément de $\mathfrak{C}^{1,2}(\mathfrak{g}_{p,q})$.

Les formules (2.23) qui définissent A^* et B^* suggèrent les composantes d'un tenseur de courbure et (2.24) les identités de Bianchi. On peut aller plus loin avec cette analogie qu'on expliquera en troisième partie et écrire les identités de Bianchi pour le tenseur dérivé du tenseur de courbure.

Définissons les fonctions locales $A^{**\alpha}_{\beta\,k_\gamma l_\delta,\,m_\mu}$ et $B^{**i}_{j\,k_\gamma l_\delta,\,m_\mu}$ par

$$
(2.25)\quad \left\{
\begin{aligned}
A^{**\alpha}_{\beta\,k_\gamma l_\delta,\,m_\mu} &= \partial_{m_\mu} A^{*\alpha}_{\beta\,k_\gamma l_\delta} - A^{\alpha}_{\varrho m_\mu} A^{*\varrho}_{\beta\,k_\gamma l_\delta} + A^{\varrho}_{\beta m_\mu} A^{*\alpha}_{\varrho\,k_\gamma l_\delta} + \\
&\quad + A^{\varrho}_{\gamma m_\mu} A^{*\alpha}_{\beta\,k_\varrho l_\delta} + A^{\varrho}_{\delta\,m_\mu} A^{*\alpha}_{\beta\,k_\gamma l_\varrho} + B^{r}_{k\,m_\mu} A^{*\alpha}_{\beta\,r_\gamma l_\delta} + B^{r}_{l\,m_\mu} A^{*\alpha}_{\beta\,k_\gamma r_\delta}, \\
B^{**i}_{j\,k_\gamma l_\delta,\,m_\mu} &= \partial_{m_\mu} B^{*i}_{j\,k_\gamma l_\delta} - B^{i}_{r\,m_\mu} B^{*r}_{j\,k_\gamma l_\delta} + B^{r}_{j\,m_\mu} B^{*i}_{r\,k_\gamma l_\delta} + \\
&\quad + B^{r}_{k\,m_\mu} B^{i*}_{j\,r_\gamma l_\delta} + B^{r}_{l\,m_\mu} B^{*i}_{j\,k_\gamma r_\delta} + A^{\varrho}_{\gamma\,m_\mu} B^{*i}_{j\,k_\varrho l_\delta} + A^{\varrho}_{\delta\,m_\mu} B^{*i}_{j\,k_\gamma l_\varrho}\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Les identités qu'elles satisfont sont

$$
\begin{aligned}
(2.26)\qquad 0 = \delta^i_j A^{**\alpha}_{\beta\,k_\gamma l_\delta,\,m_\mu} + \delta^\alpha_\beta B^{**i}_{j\,k_\gamma l_\delta,\,m_\mu} + \delta^i_j A^{**\alpha}_{\beta\,l_\delta m_\mu,\,k_\gamma} + \delta^\alpha_\beta B^{**i}_{j\,l_\delta m_\mu,\,k_\gamma} + \\
+ \delta^i_j A^{**\alpha}_{\beta\,m_\mu k_\gamma,\,l_\delta} + \delta^\alpha_\beta B^{**i}_{j\,m_\mu k_\gamma,\,l_\delta}\,.
\end{aligned}
$$

Supposons maintenant que pour chaque point x du voisinage U le cocycle $A^*_x \otimes \mathbf{1}_q + \mathbf{1}_p \otimes B^*_x$ soit un cobord; c'est ce qui arrive lorsque $p \geqslant 3$, $q \geqslant 3$ car d'après la proposition 1, $H^{1,2}(\mathfrak{g}_{p,q}) = \{0\}$ dans ce cas.

D'après les formules (1.26) et (1.27) il résulte qu'on peut exprimer le champ de cobords $A^* \otimes \mathbf{1}_q + \mathbf{1}_p \otimes B^*$ sur U sous la forme

$$
\delta^i_j A^{*\alpha}_{\beta\,k_\gamma l_\delta} + \delta^\alpha_\beta B_j{}^{*i}_{k_\gamma l_\delta} = (\delta^{i\alpha}_{j_\gamma} N_{k_\beta l_\delta} + \delta^{i\alpha}_{k_\beta} N_{j_\gamma l_\delta}) - (\delta^{i\alpha}_{j_\delta} N_{l_\beta k_\gamma} + \delta^{i\alpha}_{l_\beta} N_{j_\delta k_\gamma})
$$

$N_{k_\gamma l_\delta}$ étant des fonctions définies dans U. Faisons $i = j$ dans cette équation; nous trouvons que si $\alpha \neq \beta$

$$A^{*\alpha}_{\beta\, k_\gamma l_\delta} = \delta^\alpha_\gamma N_{k_\beta l_\delta} - \delta^\alpha_\delta N_{l_\beta k_\gamma}, \qquad (\alpha \neq \beta)$$

et donc, pour α, β quelconques

$$A^{*\alpha}_{\beta\, k_\gamma l_\delta} = \delta^\alpha_\gamma N_{k_\beta l_\delta} - \delta^\alpha_\delta N_{l_\beta k_\gamma} + \delta^\alpha_\beta V_{k_\gamma l_\delta} \tag{2.27}$$

où $V_{k_\gamma l_\delta}$ sont des fonctions définies dans U et satisfaisant la condition d'antisymétrie

$$V_{k_\gamma l_\delta} = - V_{l_\delta k_\gamma} \tag{2.28}$$

tout comme $A^{*\alpha}_{\beta\, k_\gamma l_\delta}$: Quant aux fonctions $B^{*i}_{j\, k_\gamma l_\delta}$ on en déduit de manière analogue

$$B^{*i}_{j\, k_\gamma l_\delta} = \delta^i_k N_{j_\gamma l_\delta} - \delta^i_l N_{j_\delta k_\gamma} - \delta^i_j V_{k_\gamma l_\gamma}. \tag{2.29}$$

Observons maintenant que du fait que les traces des 1-formes A et B sont nulles, les traces des 2-formes A^* et B^* en sont aussi comme on peut voir sur les formules (2.23). En contractant dans (2.27) pour $\alpha = \beta$ et dans (2.29) pour $i = j$ nous trouvons

$$0 = N_{k_\gamma l_\delta} - N_{l_\delta k_\gamma} + p V_{k_\gamma l_\delta}, \qquad 0 = N_{k_\delta l_\delta} - N_{l_\delta k_\gamma} - q V_{k_\gamma l_\delta}$$

ce qui entraîne $V_{k_\gamma l_\delta} = 0$ et de plus

$$N_{k_\gamma l_\delta} = N_{l_\delta k_\gamma}. \tag{2.30}$$

Ainsi on aboutit à la forme générale de A^* et B^*,

$$\left\{\begin{aligned} A^{*\alpha}_{\beta\, k_\gamma l_\delta} &= \delta^\alpha_\gamma N_{k_\beta l_\delta} - \delta^\alpha_\delta N_{l_\beta k_\gamma}, \\ B^{*i}_{j\, k_\gamma l_\delta} &= \delta^i_k N_{j_\gamma l_\delta} - \delta^i_l N_{j_\delta k_\gamma}. \end{aligned}\right. \tag{2.31}$$

Regardons dans ces conditions ce que deviennent les identités (2.26). On a d'abord

$$A^{**\alpha}_{\beta\, k_\gamma l_\delta, m_\mu} = \delta^\alpha_\gamma N_{k_\beta l_\delta, m_\mu} - \delta^\alpha_\delta N_{l_\beta k_\gamma, m_\mu}$$

où nous avons posé

$$N_{k_\beta l_\delta, m_\mu} = \partial_{m_\mu} N_{k_\beta l_\delta} + A^\varrho_{\beta\, m_\mu} N_{k_\varrho l_\delta} + A^\varrho_{\delta\, m_\mu} N_{k_\beta l_\varrho} + B^r_{k\, m_\mu} N_{r_\beta l_\delta} + B^r_{l m_\mu} N_{k_\beta r_\delta} \tag{2.32}$$

et donc aussi

$$B^{**i}_{j\, k_\gamma l_\delta, m_\mu} = \delta^i_k N_{j_\gamma l_\delta, m_\mu} - \delta^i_l N_{j_\delta k_\gamma, m_\mu}.$$

Remplaçons dans (2.26); nous trouvons l'équation

$$\delta^{i\alpha}_{k\beta}(N_{j_\gamma l_\delta, m_\mu} - N_{j_\gamma m_\mu, l_\delta}) + \delta^{i\alpha}_{j\gamma}(N_{k_\beta l_\delta, m_\mu} - N_{k_\beta m_\mu, l_\delta}) + \delta^{i\alpha}_{l\delta}(N_{j_\delta m_\mu, k_\gamma} - N_{j_\delta k_\gamma, m_\mu}) + \\ + \delta^{i\alpha}_{j\delta}(N_{l_\beta m_\mu, k_\gamma} - N_{l_\beta k_\gamma, m_\mu}) + \delta^{i\alpha}_{m\beta}(N_{j_\mu k_\gamma, l_\delta} - N_{j_\mu l_\delta, k_\gamma}) + \delta^{i\alpha}_{j\mu}(N_{m_\beta k_\gamma, l_\delta} - N_{m_\beta l_\delta, k_\gamma}) = 0 \, .$$

En comparant cette équation avec (1.28) et en tenant compte de la proposition 2 nous trouvons

$$N_{k_\beta l_\delta, m_\mu} = N_{k_\beta m_\mu, l_\delta} \tag{2.33}$$

donc l'ensemble de fonctions $N_{KL,J}$ est symétrique dans tous ses trois indices. Nous pouvons énoncer donc le

LEMME 4. – *Lorsque le champ de cocycles $A^* \otimes 1_q + 1_p \otimes B^*: U \to \mathfrak{C}^{1,2}(\mathfrak{g}_{p,q})$ défini par les formules* (2.21), (2.23) *est un champ de cobords, ce qui arrive de façon obligatoire si $p \geqslant 3$, $p \geqslant 3$, les 2-formes A^*, B^* sont données par les formules* (2.31) *où $N_{k_\gamma l_\delta}$ sont des fonctions locales satisfaisant les conditions de symétrie* (2.30). *Les fonctions $N_{k_\beta l_\delta, m_\mu}$ définies alors dans* (2.32) *satisfont la condition de symétrie* (2.33) *et la condition de symétrie dans les deux premiers indices qui découle de* (2.30).

16. – Nous sommes en mesure d'établir et d'étudier les systèmes différentiels desquels dépend la recherche des sections spéciales locales du fibré des repères dont les crochets $[e'_{j_\beta}, e'_{k_\gamma}]$ sont nuls ($w'^{i\alpha}_{j_\beta k_\gamma} = 0$).

En remplaçant $w^{i\alpha}_{j_\beta k_\gamma}$ donnés par (2.21) (sous l'hypothèse que le tenseur B_S soit nul) dans (2.6) et en supposant $w'^{t\tau}_{r_\varrho s_\sigma}$ nuls, ces équations deviennent

$$\delta^i_j(\mathfrak{I}^\alpha_{\beta k_\gamma} + A^\alpha_{\beta k_\gamma}) + \delta^\alpha_\beta(\mathfrak{Q}^i_{j k_\gamma} + B^i_{j k_\gamma}) - \delta^i_k(\mathfrak{I}^\alpha_{\gamma j_\beta} + A^\alpha_{\gamma j_\beta}) - \delta^\alpha_\gamma(\mathfrak{Q}^i_{k j_\beta} + B^i_{k j_\beta}) = 0 \, . \tag{2.34}$$

Cette équation pourrait s'écrire

$$\partial[(\mathfrak{I} + A) \otimes 1_q + 1_p \otimes (\mathfrak{Q} + B)] = 0$$

ou, autrement dit, pour chaque point x du voisinage U la 1-forme sur $T_x M \simeq \simeq \boldsymbol{R}^p \otimes \boldsymbol{R}^q$ à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{p,q}$, $(\mathfrak{I} + A)_x \otimes 1_q + 1_p \otimes (\mathfrak{Q} + B)_x$ définie dans une base spéciale de $T_x M$ par la valeur en x du premier membre de l'équation (2.34) représente un cocycle de l'espace $\mathfrak{C}^{1,1}(\mathfrak{g}_{p,q})$.

Les considérations faites au point 8 entraînent l'existence de deux 1-formes scalaires sur l'ouvert U, ϱ et u, permettant d'écrire

$$\mathfrak{I}^\alpha_{\beta k_\gamma} + A^\alpha_{\beta k_\gamma} = \delta^\alpha_\beta \varrho_{k_\gamma} + \delta^\alpha_\gamma u_{k_\beta} \, , \qquad \mathfrak{Q}^i_{j k_\gamma} + B^i_{j k_\gamma} = - \delta^i_j \varrho_{k_\gamma} + \delta^i_k u_{j_\gamma}$$

et, en tenant compte de la signification des 1-formes $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{Q}$, on aboutit au système

$$\partial_{k_\gamma} P^\alpha_\beta = - P^\alpha_\varrho(A^\varrho_{\beta k_\gamma} + \delta^\varrho_\beta \varrho_{k_\gamma} + \delta^\varrho_\gamma u_{k_\beta}) \, , \qquad \partial_{k_\gamma} Q^i_j = - Q^i_r(B^r_{j k_\gamma} - \delta^r_j \varrho_{k_\gamma} + \delta^r_k u_{j_\gamma}) \, . \tag{2.35}$$

Le problème est donc réduit à l'intégration de ce système où les inconnues sont P^α_β, Q^i_j, ϱ_{k_γ} et u_{k_β}: Explicitons d'abord les conditions d'intégrabilité

$$\partial_{l_\delta}\partial_{k_\gamma}P^\alpha_\beta - \partial_{k_\gamma}\partial_{l_\delta}P^\alpha_\beta = [e_{l_\delta}, e_{k_\gamma}](P^\alpha_\beta) = w^{r_\varrho}_{l_\delta k_\gamma}\partial_{r_\varrho}P^\alpha_\beta\,.$$

et leurs analogues obtenues en remplaçant P^α_β par Q^i_j.

En tenant compte du système lui-même, nous obtenons après avoir fait la notation

$$(2.36)\qquad \begin{cases} \varrho_{k_\gamma, l_\delta} = \partial_{l_\delta}\varrho_{k_\gamma} + \varrho_{k_\sigma}A^\sigma_{\gamma\, l_\delta} + \varrho_{r_\gamma}B^r_{k\, l_\delta}\,, \\ u_{k_\beta, l_\delta} = \partial_{l_\delta}u_{k_\beta} + u_{k_\sigma}A^\sigma_{\beta\, l_\delta} + u_{s_\beta}B^s_{k\, l_\delta}\,, \end{cases}$$

les équations

$$(2.37)\qquad \begin{cases} A^{*\alpha}_{\beta\, k_\gamma l_\delta} + \delta^\alpha_\beta(\varrho_{k_\gamma, l_\delta} - \varrho_{l_\delta, k_\gamma}) + \delta^\alpha_\gamma(u_{k_\beta, l_\delta} + u_{k_\delta}u_{l_\beta}) - \delta^\beta_\delta(u_{l_\beta, k_\gamma} + u l_\gamma u_{k_\beta}) = 0\,, \\ B^{*i}_{j\, k_\gamma l_\delta} + \delta^i_j(\varrho_{k_\gamma, l_\delta} - \varrho_{l_\delta, k_\gamma}) + \delta^i_k(u_{j_\gamma, l_\delta} + u_{j_\delta}u_{l_\gamma}) - \delta^i_l(u_{j_\delta, k_\gamma} + u_{j_\gamma}u_{k_\delta}) = 0\,, \end{cases}$$

où $A^{*\alpha}_{\beta k_\gamma l_\delta}$ et $B^{*i}_{j\, k_\gamma l_\delta}$ sont données par (2.23). Plaçons-nous dans les hypothèses du lemme 4. En composant alors (2.37) avec (2.31) nous trouvons

$$(2.38)\qquad \varrho_{k_\gamma, l_\delta} = \varrho_{l_\delta, k_\gamma}$$

et

$$(2.39)\qquad u_{k_\beta, l_\delta} + u_{k_\delta}u_{l_\beta} = -N_{k_\beta l_\delta}\,.$$

L'équation (2.38) traduit la propriété de la forme différentielle ϱ à composantes ϱ_{k_γ} d'être fermée. On peut écrire donc localement

$$(2.40)\qquad \varrho_{k_\gamma|U'} = \partial_{k_\gamma}R\,.$$

R étant une fonction définie dans un voisinage $U' \subset U$. Quant aux équations (2.39) elles impliquent la même propriété pour la 1-forme u vu la symétrie (2.30) des fonctions $N_{k_\gamma l_\delta}$. Il nous reste seulement à vérifier les conditions d'intégrabilité du système (2.39) qui sont satisfaites grâce aux équations (2.33).

En conclusion, si les conditions du lemme 4 sont satisfaites on peut trouver sur la variété M, au voisinage de chaque point, une section spéciale du fibré des repères formée de champs de vecteurs permutables ($w^I_{JK} = 0$). Il suffit pour cela d'intégrer le système (2.39) afin de trouver la 1-forme u et de choisir une fonction R arbitraire; avec $\varrho = dR$ et u on forme ensuite le système (2.35) qui est complètement intégrable et qui fournit une solution du problème. Nous avons donc démontré la

PROPOSITION 4. – *Si $p \geqslant 3$, $q \geqslant 3$, une $GL(p, \mathbf{R}) \otimes GL(q, \mathbf{R})$-structure avec tenseur de Bernard B_S nul est plate.*

PARTIE 3

17. – Nous allons donner ici la signification géométrique des calculs que nous venons de faire. Pour cela, il faut établir d'abord la nature de l'objet géométrique qui est représenté, dans chaque voisinage U muni d'une section spéciale s_U du fibré des repères $\mathcal{R}(U)$, par la 1-forme $A\otimes 1_q + 1_p\otimes B$ où A, B sont les 1-formes à composantes (2.8).

Si l'on observe que w^I_{JK} représentent les composantes par rapport à la section s_U de la différentielle extérieure $d\omega$ de la 1-forme fondamentale ω du fibré des repères, on peut traiter ce problème avec les méthodes générales de [4]; pour éviter de nouvelles notations nous continuerons d'utiliser la méthode directe.

Supposons le premier tenseur de structure nul et considérons un voisinage U' auquel nous associons la 1-forme $A'\otimes 1_q + 1_p\otimes B'$ par les formules analogues à (2.8) dans ce nouveau voisinage. Si $U\cap U'\neq\emptyset$, la formule (2.6) nous donne la loi de transformation des composantes de l'objet cherché dans $U\cap U'$, loi qui s'écrit en faisant appel au cobord algébrique

$$\omega-\omega' = -\,\partial(\mathcal{T}\otimes 1_q + 1_p\otimes \mathcal{Q}) \tag{3.1}$$

ou bien

$$\partial[(A-A'+\mathcal{T})\otimes 1_q + 1_p\otimes(B-B'+\mathcal{Q})] = 0\,. \tag{3.2}$$

Les considérations faites dans 8 nous disent qu'il existe dans l'intersection $U\cap U'$ deux 1-formes $\varrho^{U',U}$ et $\varphi^{U',U}$ de façon que l'on ait

$$\left\{\begin{aligned} &A^\alpha_{\beta\,k_\gamma} - p^\alpha_\tau A'^\tau_{\varrho\,s_\sigma} P^\varrho_\beta Q^s_k P^\sigma_\gamma + p^\alpha_\tau\partial_{k_\gamma}P^\tau_\beta = \delta^\alpha_\beta\,\varrho^{U',U}_{k_\gamma} + \delta^\alpha_\gamma\,\varphi^{U',U}_{k_\beta}\,,\\ &B^i_{j\,k_\gamma} - q^i_t B'^t_{r\,s_\sigma} Q^r_j P^\sigma_\gamma Q^s_k + q^i_t\partial_{k_\gamma}Q^t_j = -\,\delta^i_j\,\varrho^{U',U}_{k_\gamma} + \delta^i_k\,\varphi^{U',U}_{j_\gamma}\,.\end{aligned}\right. \tag{3.3}$$

Faisons les contractions $\alpha=\beta$ et $i=j$; nous trouvons

$$p^\tau_\sigma\partial_{k_\gamma}P^\sigma_\tau = p\,\varrho^{U',U}_{k_\gamma} + \varphi^{U',U}_{k_\gamma}\,,\qquad q^s_t\partial_{k_\gamma}Q^t_s = -\,q\,\varrho^{U',U}_{k_\gamma} + \varphi^{U',U}_{k_\gamma}\,. \tag{3.4}$$

Les premiers membres représentent les dérivées logarithmiques des déterminants $\Delta_P=\det(P^\alpha_\beta)$ et $\Delta_Q=\det(Q^i_j)$. Si l'on réduit alors les groupes de structure des fibres E et F aux sous-groupes unimodulaires de $GL(p,\boldsymbol{R})$ et $GL(q,\boldsymbol{R})$ respectivement, les modules des déterminants Δ_P et Δ_Q seront égaux à 1 et on aura $\varrho^{U',U} = \varphi^{U',U}=0$ dans $U'\cap U$. Ainsi, dans l'intersection $U'\cap U$ les 1-formes A, A' à valeurs dans $sl(p,\boldsymbol{R})$ et les 1-formes B, B' à valeurs dans $sl(q,\boldsymbol{R})$ obéiront aux formules de transformation

$$-\,P^\alpha_\varrho A^\varrho_\beta + A'^\alpha_\varrho P^\varrho_\beta = dP^\alpha_\beta\,,\qquad -\,Q^i_r B^r_j + B'^i_r Q^r_j = dQ^i_j \tag{3.5}$$

qui coïncident avec les lois de transformation des formes de connexion pour les fibrés E et F. Nous pouvons énoncer le:

LEMME 5. – *Lorsque le tenseur de Bernard de la $G_{p,q}$-structure* (2.1) *est nul, on peut associer de façon canonique des connexions linéaires dans les fibrés vectoriels E, F dès qu'on a réduit leurs groupes de structure à des sous-groupes unimodulaires.*

CONSÈQUENCE. – Il en résulte par produit une connexion linéaire dans le sous-fibré des repères tangents à la variété M correspondant à la réduction du groupe de structure dans les facteurs. N'ayant pas de critère invariant pour rendre cette réduction canonique nous sommes amenés à introduire des connexions dans les fibrés en droites réelles $E^{\Delta p}$, $F^{\Delta q}$ (leurs fibres en chaque point x de M sont les produits extérieurs de dimension maximum des fibres E_x et F_x).

18. – Soit $\gamma_{E^{\Delta p}}$, $\gamma_{F^{\Delta q}}$ deux connexions linéaires des fibrés en droites $E^{\Delta p}$, $F^{\Delta q}$ respectivement. Dans chaque voisinage U au-dessus duquel les deux fibrés E et F sont trivialisés, ces connexions sont représentées par deux 1-formes scalaires $\gamma^U_{E^{\Delta p}}$ et $\gamma^U_{E^{\Delta q}}$ qui obéissent dans l'intersection $U \cap U'$ de deux tels voisinages aus lois de transformation suivantes

$$d \log \Delta_P = \gamma^{U'}_{E^{\Delta p}} - \gamma^{U}_{E^{\Delta p}}\,, \qquad d \log \Delta_Q = \gamma^{U'}_{F^{\Delta q}} - \gamma^{U}_{F^{\Delta q}} \tag{3.6}$$

où $\Delta_P = \det (P^\alpha_\beta)$, $\Delta_Q = \det (Q^i_j)$. De telles connexions peuvent être obtenues parfois par le procédé suivant; on part d'une connexion linéaire γ_E du fibré E représentée dans chaque voisinage U de trivialisation locale de E par une 1-forme à valeurs dans $\mathfrak{gl}(p, \boldsymbol{R})$, γ^U_E: Les 1-formes scalaires trace γ^U_E constituent alors les 1-formes d'une connexion linéaire pour le fibré $E^{\Delta p}$. Nous dirons que cette connexion désignée $\operatorname{tr}\gamma_E$ est *induite* par γ_E dans $E^{\Delta p}$.

En comparant (3.6) avec (3.4) on a aussi

$$\gamma^{U'}_{E^{\Delta p}} - \gamma^{U}_{E^{\Delta p}} = p\varrho^{U',U} + \varphi^{U',U}\,, \qquad \gamma^{U'}_{F^{\Delta q}} - \gamma^{U}_{F^{\Delta q}} = -\, q\varrho^{U',U} + \varphi^{U',U}$$

et on peut donc déterminer les 1-formes $\varrho^{U',U}$ et $\varphi^{U',U}$ par

$$\varrho^{U',U} = \frac{1}{p+q}\left[(\gamma^{U'}_{E^{\Delta p}} - \gamma^{U'}_{F^{\Delta q}}) - (\gamma^{U}_{E^{\Delta p}} - \gamma^{U}_{F^{\Delta q}})\right], \tag{3.7}$$

$$\varphi^{U',U} = \frac{pq}{p+q}\left[\left(\frac{1}{p}\gamma^{U'}_{E^{\Delta p}} + \frac{1}{q}\gamma^{U'}_{F^{\Delta q}}\right) - \left(\frac{1}{p}\gamma^{U}_{E^{\Delta p}} + \frac{1}{q}\gamma^{U}_{F^{\Delta q}}\right)\right].$$

En remplaçant dans (3.3) on trouve que les 1-formes locales $\tilde{A}^U$, $\tilde{B}^U$ à valeurs dans $\mathfrak{gl}(p, \boldsymbol{R})$ et $\mathfrak{gl}(q, \boldsymbol{R})$ de composantes

$$
(3.8)\qquad \left\{\begin{aligned}
\tilde{A}^{\alpha}_{\beta\, k_\gamma} &= A^{\alpha}_{\beta\, k_\gamma} + \frac{\delta^{\alpha}_{\beta}}{p+q}\left(\gamma^{U}_{E^{\Lambda p},\, k_\gamma} - \gamma^{U}_{F^{\Lambda q},\, k_\gamma}\right) + \delta^{\alpha}_{\gamma}\frac{pq}{p+q}\left(\frac{1}{p}\gamma^{U}_{E^{\Lambda p},\, k_\beta} + \frac{1}{q}\gamma^{U}_{F^{\Lambda q},\, k_\beta}\right),\\
\tilde{B}^{i}_{j\, k_\gamma} &= B^{i}_{j\, k_\gamma} - \frac{\delta^{i}_{j}}{p+q}\left(\gamma^{U}_{E^{\Lambda p},\, k_\gamma} - \gamma^{U}_{F^{\Lambda q},\, k_\gamma}\right) + \delta^{i}_{k}\frac{pq}{p+q}\left(\frac{1}{p}\gamma^{U}_{E^{\Lambda p},\, j_\gamma} + \frac{1}{q}\gamma^{U}_{F^{\Lambda q},\, j_\gamma}\right),
\end{aligned}\right.
$$

satisfont la loi de transformation (3.5) et représentent donc des connexions linéaires dans les fibrés vectoriels E, F. Nous avons obtenu le

LEMME 6. – *Si le tenseur de Bernard de la $G_{p,q}$-structure* (2.1) *est nul, la connaissance de deux connexions linéaires $\gamma_{E^{\Lambda p}}$ et $\gamma_{F^{\Lambda q}}$ des fibrés en droites $E^{\Lambda p}$ et $F^{\Lambda q}$ permet de construire deux connexions linéaires $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ pour les fibrés E et F, définies localement par les formules* (3.8).

OBSERVATION. – La formule (2.1) entraîne pour le fibré en droites $(TM)^{\Lambda pq}$ l'isomorphisme

$$
(3.9)\qquad (TM)^{\Lambda pq} \simeq (E^{\Lambda p})^{\otimes q} \otimes (F^{\Lambda q})^{\otimes p}.
$$

Ainsi, dans l'intersection $U \cap U'$ le déterminant Δ_M de la matrice de passage de la section spéciale s_U à la section spéciale $s_{U'}$ dont les composantes sont $X^{i\alpha}_{j\beta} = P^{\alpha}_{\beta} Q^{i}_{j}$ sera donné par la formule

$$
(3.10)\qquad \Delta_M = \Delta^{q}_{P} \cdot \Delta^{p}_{Q}.
$$

Par différentiation logarithmique on a

$$
(3.11)\qquad d\log \Delta_M = q d\log \Delta_P + p d\log \Delta_Q,
$$

ce qui prouve, après avoir comparé avec (3.6), que les connexions $\gamma_{E^{\Lambda p}}$ et $\gamma_{F^{\Lambda q}}$ induisent une connexion γ_M dans le fibré $(TM)^{\Lambda pq}$ qui est définie localement par la 1-forme scalaire

$$
(3.12)\qquad \gamma^{U}_{M} = q\gamma^{U}_{E^{\Lambda p}} + p\gamma^{U}_{F^{\Lambda q}}.
$$

Inversement, si l'on connaît une connexion γ_M du fibré $(TM)^{\Lambda pq}$ et une connexion de l'un des fibrés $E^{\Lambda p}$ ou $F^{\Lambda q}$ on peut en déduire une connexion pour l'autre fibré en résolvant localement l'équation (3.12).

Lorsque l'on forme à partir des 1-formes $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ la 1-forme de connexion $\tilde{A} \otimes 1_q + 1_p \otimes \tilde{B}$ pour le fibré vectoriel TU, les parenthèses qui contiennent les différences $\gamma^{U}_{E^{\Lambda p}} - \gamma^{U}_{F^{\Lambda q}}$ se réduisent dans la somme; les autres parenthèses s'expriment avec la connexion γ_M donnée par (3.12). On peut donc énoncer le

LEMME 7. – *Si le tenseur de Bernard de la $G_{p,q}$-structure* (2.1) *est nul, une connexion γ_M du fibré en droites $(TM)^{\Lambda pq}$ permet de construire une $G_{p,q}$-connexion linéaire Γ sur TM ayant pour composantes locales spéciales*

$$\Gamma^{i\alpha}_{j\beta\,k\gamma} = \delta^i_j A^{\alpha}_{\beta\,k\gamma} + \delta^{\alpha}_{\beta} B^i_{j\,k\gamma} + \frac{1}{p+q}\,(\delta^{i\alpha}_{j\gamma}\gamma^U_{M,\,k\beta} + \delta^{i\alpha}_{k\beta}\gamma^U_{M,\,j\gamma}) \tag{3.13}$$

avec $A^{\alpha}_{\beta\,k\gamma}$ et $B^i_{j\,k\gamma}$ données par (2.8). *Cette connexion est à torsion nulle. C'est l'unique $G_{p,q}$-connexion à tosion nulle qui induise la connexion γ_M dans le fibré $(TM)^{\Lambda pq}$, c'est-à-dire telle que* tr $\Gamma = \gamma_M$.

Pour les connexions plates ce résultat a été établi dans [8].

19. – Nous sommes maintenant en mesure de comprendre le sens géométrique des conditions d'intégrabilité (2.24) et (2.26).

Si U est un voisinage muni d'une section spéciale s_U du fibré des repères $\mathcal{R}(U)$ et si le tenseur de Bernard est nul, on peut associer à ce voisinage une $G_{p,q}$-connexion linéaire Γ_U à torsion nulle en prenant pour composantes de la forme de connexion

$$-\,\Gamma^{i\alpha}_{j\beta\,k\gamma} = \delta^i_j A^{\alpha}_{\beta\,k\gamma} + \delta^{\alpha}_{\beta} B^i_{j\,k\gamma}\,. \tag{3.14}$$

La courbure R_U de cette connexion est une 2-forme sur U à valeurs dans $\mathfrak{g}_{p,q}$ et ses composantes spéciales sont

$$-\,R^{i\alpha}_{j\beta\,k\gamma\,l\delta} = \delta^i_j A^{*\alpha}_{\beta\,k\gamma\,l\delta} + \delta^{\alpha}_{\beta} B^{*i}_{j\,k\gamma\,l\delta} \tag{3.15}$$

avec $A^{*\alpha}_{\beta\,k\gamma\,l\delta}$, $B^{*i}_{j\,k\gamma\,l\delta}$ données par (2.23). Ainsi (2.24) représentent les premières identités de Bianchi de cette connexion locale. Le tenseur dérivé ∇R_U du tenseur de courbure R_U par rapport à Γ_U a pour composantes spéciales

$$-\,R^{i\alpha}_{j\beta\,k\gamma\,l\delta,\,m\mu} = \delta^i_j A^{**\alpha}_{\beta\,k\gamma\,l\delta,\,m\mu} + \delta^{\alpha}_{\beta} B^{**i}_{j\,k\gamma\,l\delta\,m\mu}$$

les A^{**}, ..., B^{**}, ... étant données par (2.25). Les équations (2.26) traduisent les identités de Bianchi de deuxième espèce

$$R^{i\alpha}_{j\beta\,k\gamma\,l\delta,\,m\mu} + R^{i\alpha}_{j\beta\,l\delta\,m\mu,\,k\gamma} + R^{i\alpha}_{j\beta\,m\mu\,k\gamma,\,l\delta} = 0$$

vérifiées par toute connexion à torsion nulle.

Lorsque les équations (2.31) sont satisfaites, ce qui arrive nécessairement si $p, q \geqslant 3$, on peut modifier la connexion Γ_U au voisinage d'un point arbitraire de U en une nouvelle $G_{p,q}$-connexion à torsion nulle $\tilde{\Gamma}_U$, celle-ci étant à courbure nulle.

Pour définir $\tilde{\Gamma}_U = \tilde{A}\otimes 1_q + 1_p \otimes \tilde{B}$ on prend les formes $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ à composantes locales

$$\tilde{A}^{\alpha}_{\beta\, k_\gamma} = A^{\alpha}_{\beta\, k_\gamma} + \delta^{\alpha}_{\beta}\varrho_{k_\gamma} + \delta^{\alpha}_{\gamma} u_{k_\beta}\,, \qquad \tilde{B}^{i}_{j\, k_\gamma} = B^{i}_{j\, k_\gamma} - \delta^{i}_{j}\varrho_{k_\gamma} + \delta^{i}_{k} u_{j_\gamma} \tag{3.16}$$

ϱ et u étant des solutions des équations (2.31), (2.39). Ainsi, un champ de repères déduit par transport parallèle relatif à la connexion $\tilde{\Gamma}_U$, qui est une $G_{q,p}$-connexion sans torsion et à courbure nulle, à partir d'un repère appartenant à la $G_{p,q}$-structure initiale, fournit localement des systèmes de coordonnées locales adaptées à la $G_{p,q}$-structure.

20. – Comme application, nous allons déterminer le pseudo-groupe des automorphismes locaux d'une $G_{p,q}$-structure plate.

Si la $G_{p,q}$-structure (2.1) est plate, on peut munir la variété M de systèmes de coordonnées locales (U, x^i_α), $U \subset M$, de façon que les champs locaux $\partial/\partial x^i_\alpha$ engendrent des sections spéciales du fibré des repères $\mathfrak{R}(U)$; de telles coordonnées locales seront appelées *adaptées* à la structure. Le résultat final est le suivant:

PROPOSITION 5. – *Le pseudo-groupe des automorphismes locaux f d'une $G_{p,q}$-structure plate est constitué par les homographies matricielles*

$$x = (x^i_\alpha) \xmapsto{\ f\ } x' = (ax+b)(cx+d)^{-1}\,, \qquad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in GL(p+q, \boldsymbol{R}) \tag{3.17}$$

où (x^i_α) sont les coordonnées locales adaptées à la $G_{p,q}$-structure.

Nous allons établir d'abord quelques propriétés du pseudo-groupe (3.17) nécessaires par la suite. Ecrivons en composantes ses équations

$$x'^i_\varrho(c^\varrho_r x^r_\alpha + d^\varrho_\alpha) = a^i_r x^r_\alpha + b^i_\alpha\,, \qquad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in GL(p+q, \boldsymbol{R})\,. \tag{3.18}$$

Nous supposons que $\det(d^\beta_\alpha) \neq 0$ de façon que le domaine où la matrice $cx + d$ est inversible, contienne toujours l'origine du système de coordonnées locales x^i_α. Par différentiation de (3.18) on obtient

$$dx'^i_\varrho(c^\varrho_r x^r_\alpha + d^\varrho_\alpha) = (a^i_r - x'^i_\varrho c^\varrho_r)\, dx^r_\alpha$$

ou bien

$$dx'^i_\alpha = (a^i_r - x'^i_\sigma c^\sigma_r)\, dx^r_\varrho((cx+d)^{-1})^\varrho_\alpha\,.$$

Ainsi, on trouve

$$\frac{\partial x^{i\prime}_\alpha}{\partial x^j_\beta} = P^\alpha_\beta Q^i_j \tag{3.19}$$

avec

$$Q^i_j = a^i_j - x'^i_\varrho c^\varrho_j\,, \qquad p^\alpha_\beta = c^\alpha_r x^r_\beta + d^\alpha_\beta\,, \qquad (p^\alpha_\varrho P^\varrho_\beta = \delta^\alpha_\beta)\,. \tag{3.20}$$

Proposons-nous de calculer le déterminant

$$\Delta_M = \det\left(\frac{\partial x'^i_\alpha}{\partial x^j_\beta}\right) = \Delta^q_P \Delta^p_Q\,, \qquad \Delta_P = \det(P^\alpha_\beta)\,, \qquad \Delta_Q = \det(Q^i_j)\,.$$

Le calcul suivant

$$\det(Q^i_j)\cdot\det(p^\alpha_\beta) = \det\begin{pmatrix} a^i_j - x'^i_\varrho c^\varrho_j & c^\alpha_j \\ 0 & c^\alpha_r x^r_\beta + d^\alpha_\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} a^i_j - x'^j_\varrho c^\varrho_j & c^\alpha_j \\ -a^i_r x^r_\beta + x'^i_\varrho c^\varrho_r x^r_\beta & d^\alpha_\beta \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a^i_j - x'^i_\varrho c^\varrho_j & c^\alpha_j \\ b^i_\beta - x'^i_\varrho d^\varrho_\beta & d^\alpha_\beta \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

montre que

$$(3.21)\quad \Delta_Q = \det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\Big/\det(p^\alpha_\beta) = \det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\cdot\Delta_P = \det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\Big/\det(d^\alpha_\beta + c^\alpha_r x^r_\beta)\,.$$

Donc

$$(3.22)\qquad \Delta_M = \left[\det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right]^p\cdot[\det(cx+d)]^{-(p+q)}\,.$$

Considérons maintenant le système (2.35) et ses conditions d'intégrabilité. Une homographie matricielle (3.17), étant un automorphisme local de la $G_{p,q}$-structure plate de $\boldsymbol{R}^p\otimes\boldsymbol{R}^q$ comme le montrent les équations (3.19), elle doit satisfaire ce système où les formes A, B sont identiquement nulles.

Le calcul qui nous a conduit aux formules (3.4) nous donne alors

$$(3.23)\qquad \frac{\partial\log\Delta_P}{\partial x^k_\gamma} = -p\varrho_{k_\gamma} - u_{k_\gamma}\,, \qquad \frac{\partial\log\Delta_Q}{\partial x^k_\gamma} = q\varrho_{k_\gamma} - u_{k_\gamma}\,.$$

Mais la formule (3.21) donne $d\log\Delta_Q = d\log\Delta_P$ et par conséquent $\varrho_{k_\gamma} = 0$. Quant à l'équation (2.39) elle devient

$$(3.24)\qquad \frac{\partial u_{k_\beta}}{\partial x^l_\delta} + u_{k_\delta}u_{l_\beta} = 0\,.$$

Si on prend comme nouvelle fonction inconnue $F = e^\varphi$ où $u_{k_\gamma} = \partial\varphi/\partial x^k_\beta$ cette équation devient

$$(3.25)\qquad F\frac{\partial^2 F}{\partial x^k_\beta\partial x^l_\delta} = \frac{\partial F}{\partial x^k_\beta}\cdot\frac{\partial F}{\partial x^l_\delta} - \frac{\partial F}{\partial x^k_\delta}\cdot\frac{\partial F}{\partial x^l_\beta}\,.$$

Ainsi, nous avons prouvé le

LEMME 8. – *La fonction*

$$(3.26)\qquad \det(cx+d) = \Delta_P^{-1}$$

est une solution de l'équation aux dérivées partielles (3.25).

21. – Soit f un automorphisme local de la $G_{p,q}$-structure plate de la variété M. Supposons que son domaine de définition contienne l'origine d'un système de coordonnées locales x^i_α adaptées à la $G_{p,q}$-structure. Déterminer de tels automorphismes revient à intégrer le système (2.35) où $A^\alpha_{\beta\, k_\gamma} = 0$, $B^i_{j\, k_\gamma} = 0$ et ϱ_{k_γ}, u_{k_γ} sont des solutions des équations (2.38), (2.39). Observons d'abord que en multipliant les éléments des matrices (P^α_β) et (Q^i_j) par e^R et e^{-R} respectivement, où $\partial R/\partial x^k_\gamma = \varrho_{k_\gamma}$ (formule (2.40)) nous pouvons supposer que $\varrho_{k_\gamma} = 0$ dans les équations (2.35).

Pour intégrer donc ce système il ne reste qu'à trouver une solution de (2.39). Cette équation est équivalente à (3.25) dont on a trouvé une solution (3.26). Mais toute solution de (3.25) est du type (3.26). En effet, toute solution F de (3.25) est affine dans les variables qui apparaissent sur une ligne ou sur une colonne de la matrice (x^i_α) car

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^k_\beta \partial x^l_\beta} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^k_\beta \partial x^k_\delta} = 0\,.$$

Ainsi, F est un polynôme de degré $\leqslant \min(p, q)$ par rapport aux variables x^i_α. De plus, il est déterminé par sa valeur en un point, disons 0, et par les valeurs de ses dérivées partielles du premier ordre en 0. Ainsi

$$F = k\cdot\det\Big(\delta^\alpha_\beta + \sum_r k^r_\alpha x^r_\beta\Big) = k\cdot\det\Big(\delta^i_j + \sum_\varrho k^i_\varrho x^j_\varrho\Big)$$

est la solution de l'équation (3.25) satisfaisant les conditions initiales

$$F(0) = k\,, \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial x^j_\beta}\right)_0 = k\cdot k^j_\beta\,.$$

En conclusion, trouver la forme générale d'un automorphisme local d'une $G_{p,q}$-structure plate revient à intégrer les systèmes d'équations aux différentielles totales

$$\frac{\partial x'^i_\alpha}{\partial x^j_\beta} = P^\alpha_\beta Q^i_j\,, \tag{3.27}$$

et

$$\frac{\partial P^\alpha_\beta}{\partial x^k_\gamma} = -P^\alpha_\gamma \frac{\partial \log\det\Big(\delta^\varrho_\sigma + \sum_r k^r_\varrho x^r_\sigma\Big)}{\partial x^k_\beta}\,, \qquad \frac{\partial Q^i_j}{\partial x^k_\gamma} = -Q^i_k \frac{\partial \log\det\Big(\delta^r_s + \sum_\varrho k^r_\varrho x^s_\varrho\Big)}{\partial x^j_\gamma}\,. \tag{3.28}$$

Soit $d = (d^\alpha_\beta)$ une $p\times p$-matrice non-singulière que nous allons prendre comme valeur en 0 de la transposée de la matrice $(p^\alpha_\beta) = (P^{-1})^\alpha_\beta$. Donc

$$p^\alpha_\beta(0) = d^\beta_\alpha\,, \qquad P^\alpha_\beta(0) = (d^{-1})^\beta_\alpha\,. \tag{3.29}$$

En prenant pour matrice $p = (p^\alpha_\beta)$ la suivante

$$p^\alpha_\beta(x) = \sum_\varrho d^\beta_\varrho\Big(\delta^\alpha_\varrho + \sum k^r_\varrho x^r_\alpha\Big) = d^\beta_\alpha + c^\beta_r x^r_\alpha\,, \qquad c^\beta_r = \sum_\varrho d^\beta_\varrho k^r_\varrho\,.$$

nous trouvons la solution du premier système (3.28) qui satisfait les conditions initiales (3.29). En effet, en dérivant l'identité $p^\alpha_\varrho P^\varrho_\beta = \delta^\alpha_\beta$ nous obtenons

$$\frac{\partial p^\alpha_\varrho}{\partial x^k_\gamma} P^\varrho_\beta + p^\alpha_\varrho \frac{\partial P^\varrho_\beta}{\partial x^k_\gamma} = \delta^\alpha_\gamma \sum_\varrho c^\varrho_k P^\varrho_\beta + p^\alpha_\varrho \frac{\partial P^\varrho_\beta}{\partial x^k_\gamma} = 0$$

ce qui nous donne d'une part

$$\frac{\partial P^\alpha_\beta}{\partial x^k_\gamma} = - P^\alpha_\gamma \sum_\varrho c^\varrho_k P^\varrho_\beta \tag{3.30}$$

et par contraction en $\alpha = \beta$

$$\sum_\varrho c^\varrho_k P^\varrho_\gamma + \frac{\partial}{\partial x^k_\gamma} \log \Delta_P = 0$$

où

$$\Delta_P = \det (P^\alpha_\beta) = \left(\det (p^\alpha_\beta)\right)^{-1} = \left(\det (d^\alpha_\beta) \cdot \det \left(\delta^\alpha_\beta + \sum_r k^r_\alpha x^r_\beta\right)\right)^{-1}.$$

Ainsi

$$\sum_\varrho c^\varrho_k P^\varrho_\gamma = \frac{\partial}{\partial x^k_\gamma} \log \det \left(\delta^\alpha_\beta + \sum_r k^r_\alpha x^r_\beta\right) \tag{3.31}$$

et en remplaçant dans (3.30) on trouve la première équation (3.28).

De façon analogue on trouve une solution pour le deuxième système (3.28). Pour trouver finalement les fonctions x'^i_α considérons les sommes $s^i_\alpha = x'^i_\varrho (d^\varrho_\alpha + c^\varrho_r x^r_\alpha)$. On a, en tenant compte de (3.27)

$$\frac{\partial}{\partial x^j_\beta} \left(x'^i_\varrho (d^\varrho_\alpha + c^\varrho_r x^r_\alpha)\right) = \delta^\alpha_\beta (Q^i_j + x'^i_\varrho c^\varrho_j).$$

Pour i, α fixés la fonction s^i_α dépend donc seulement des variables x^j_α, $j = p+1, \ldots, p+q$ et on peut montrer qu'elle est affine. En effet, en tenant compte de (3.27) (3.28) et (3.31) on trouve

$$\frac{\partial^2 s^i_\alpha}{\partial x^j_\alpha \partial x^k_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^k_\alpha} (x'^i_\varrho c^\varrho_j + Q^i_j) = \frac{\partial x'^i_\varrho}{\partial x^k_\alpha} c^\varrho_j + \frac{\partial Q^i_j}{\partial x^k_\alpha} =$$
$$= \sum_\varrho P^\varrho_\alpha Q^i_k c^\varrho_j - Q^i_k \frac{\partial}{\partial x^j_\alpha} \log \det \left(\delta^\varrho_\sigma + \sum_r k^r_\varrho x^r_\sigma\right) = \sum_\varrho P^\varrho_\alpha Q^i_k c^\varrho_j - Q^i_k \sum_\varrho c^\sigma_j P^\sigma_\alpha = 0$$

et donc on aboutit aux formules (3.18). La proposition 5 est démontrée.

22. – La géométrie différentielle des espaces projectifs de dimension supérieure à 1 est basée sur le système différentiel d'Eisenhart [14], chap. VI,

$$\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{1}{q+1} \left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \frac{\partial \log \Delta}{\partial x^k} + \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial \log \Delta}{\partial x^j}\right), \qquad \Delta = \det \left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right)$$

qui traduit la propriété d'un difféomorphisme local $x \mapsto x'$ de classe C^2 de R^q, $q > 1$, de transformer les lignes droites dans des lignes toujours droites. Un système analogue peut être déduit sur une variété munie d'une $G_{p,q}$-structure plate. En effet, par dérivation de l'équation (3.27) et en tenant compte de (3.28) et de (3.22) on obtient le système

$$\text{(3.32)} \qquad \frac{\partial^2 x'^i_\alpha}{\partial x^j_\beta \, \partial x^k_\gamma} = \frac{1}{p+q}\left(\frac{\partial x'^i_\alpha}{\partial x^j_\gamma}\frac{\partial \log \Delta}{\partial x^k_\beta} + \frac{\partial x'^i_\alpha}{\partial x^k_\beta}\frac{\partial \log \Delta}{\partial x^j_\gamma}\right), \qquad \Delta = \det\left(\frac{\partial x'^i_\alpha}{\partial x^j_\beta}\right).$$

On peut réécrire ce système sous une forme mieux adaptée à la $G_{p,q}$-structure et à d'autres analogies en faisant intervenir le champ ψ. Soit $\dot\psi = (p+q)^{-1}\cdot\psi$ le « normalisé » de ψ; son tenseur contracté de type $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\dot\psi^{IR}_{JR}$, coïncide avec le tenseur de Kronecker car

$$\dot\psi^{IR}_{JR} = \frac{1}{p+q}\psi^{i_\alpha r_\varrho}_{j_\beta r_\varrho} = \frac{1}{p+q}(\delta^{i_\alpha}_{j_\varrho}\delta^{r_\varrho}_{r_\beta} + \delta^{i_\alpha}_{r_\beta}\delta^{r_\varrho}_{j_\varrho}) = \frac{1}{p+q}(\delta^{i_\alpha}_{j_\beta}\cdot q + \delta^{i_\alpha}_{j_\beta}\cdot p) = \delta^{i_\alpha}_{j_\beta} = \delta^I_J\,.$$

Le système (3.32) devient alors

$$\text{(3.33)} \qquad \frac{\partial^2 x'^I}{\partial x^J \, \partial x^K} = \dot\psi^{RS}_{JK}\frac{\partial x'^I}{\partial x^R}\frac{\partial \log \Delta}{\partial x^S}, \qquad \Delta = \det\left(\frac{\partial x'^I}{\partial x^J}\right).$$

PROPOSITION 6. – *Les automorphismes locaux d'une $G_{p,q}$-structure plate vérifient le système d'équations aux dérivées partielles de type d'Eisenhart* (3.32) *ou* (3.33).

23. – Pour conclure, faisons la remarque suivante. On a vu que si le fibré tangent TM d'une variété M est isomorphe à un produit tensoriel $E \otimes F$ de fibrés sur M, la variété admet une $G_{p,q}$-structure; la réciproque n'est valable que localement. En effet soit M une variété différentiable douée d'une $G_{p,q}$-structure $\mathcal{G}$. Soit $\mathcal{U} = \{\ldots, U_\alpha, \ldots\}_{\alpha \in A}$ un recouvrement de M par des voisinages de trivialisation du fibré $\mathcal{G}$ supposés convexes pour une métrique Riemannienne. Les fonctions de transition du fibré dans l'intersection $U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1}$ mettent en évidence des fonctions matricielles $M_{\alpha_1\alpha_0}$: $U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \to G_{p,q} \subset GL((pq, \mathbf{R})$ satisfaisant dans $U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2} \neq \emptyset$ aux relations

$$\text{(3.34)} \qquad M_{\alpha_0\alpha_1} \circ M_{\alpha_1\alpha_2} \circ M_{\alpha_2\alpha_0} = 1_{pq}\,.$$

Pour construire des fibrés E, F sur M à partir du système $\{U_\alpha, M_{\alpha\beta}\}$ afin de satisfaire à l'équation $TM \simeq E \otimes F$ on cherche les fonctions de transition

$$P_{\alpha_1\alpha_0}\colon\ U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \to GL(p, \mathbf{R}) \qquad \text{et} \qquad Q_{\alpha_1\alpha_0}\colon\ U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \to GL(q, \mathbf{R})$$

des fibrés E, F relatives à $\mathcal{U}$ de façon que les équations

$$M_{\alpha_1\alpha_0} = P_{\alpha_1\alpha_0} \otimes Q_{\alpha_1\alpha_0} \tag{3.35}$$

soient satisfaites. Deux solutions de cette équation, disons $P_{\alpha_1\alpha_0}$, $Q_{\alpha_1\alpha_0}$ et $P'_{\alpha_1\alpha_0}$, $Q'_{\alpha_1\alpha_0}$, sont déterminées, à un facteur près,

$$P'_{\alpha_1\alpha_0} = \varrho_{\alpha_1\alpha_0} P_{\alpha_1\alpha_0}, \qquad Q'_{\alpha_1\alpha_0} = \varrho^{-1}_{\alpha_1\alpha_0} Q_{\alpha_1\alpha_0}.$$

Soit $\mathcal{P} = \{..., P_{\alpha_1\alpha_0}, ...\}$ et $\mathcal{Q} = \{..., Q_{\alpha_1\alpha_0}, ...\}$ un système de solutions des équations (3.35). En remplaçant dans (3.34) on trouve

$$(P_{\alpha_0\alpha_1} \circ P_{\alpha_1\alpha_2} \circ P_{\alpha_2\alpha_0}) \otimes (Q_{\alpha_0\alpha_1} \circ Q_{\alpha_1\alpha_2} \circ Q_{\alpha_2\alpha_0}) = 1_p \otimes 1_q$$

donc, il existe $\lambda_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}\colon U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2} \to R^X$ satisfaisant

$$P_{\alpha_0\alpha_1} \circ P_{\alpha_1\alpha_2} \circ P_{\alpha_2\alpha_0} = \lambda_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} 1_p, \qquad Q_{\alpha_0\alpha_1} \circ Q_{\alpha_1\alpha_2} \circ Q_{\alpha_1\alpha_2} = \lambda^{-1}_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} 1_q. \tag{3.36}$$

Ainsi, les systèmes $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ représentent les systèmes de fonctions de transition de deux fibrés vectoriels E, F seulement si $\lambda_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} = 1$, $\forall \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$, $U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2} \neq \emptyset$, où bien, plus généralement, si l'on peut trouver des fonctions $\varrho_{\alpha_0\alpha_1}\colon U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \to \boldsymbol{R}^X$ de façon que

$$\lambda_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} = \varrho_{\alpha_0\alpha_1} \varrho_{\alpha_1\alpha_2} \varrho_{\alpha_2\alpha_0}.$$

Les identités satisfaites par les $\lambda_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}$ sont

$$\lambda_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} \cdot \lambda^{-1}_{\alpha_0\alpha_1\alpha_3} \cdot \lambda_{\alpha_0\alpha_2\alpha_3} \cdot \lambda^{-1}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = 1 .$$

Elles resultent de (3.36). A chaque recouvrement $\mathcal{U}$ les fonctions de transition du fibré M associent donc un cocycle de dimension 2 du nerf de $\mathcal{U}$ à valeurs dans le faisceau $\mathcal{F}$ des germes de fonctions réelles non nulles sur M. L'obstruction à la possibilité de représenter le fibré TM comme produit tensoriel réel lorsque M est douée d'une $G_{p,q}$-structure se trouve donc dans la cohomologie $H^2(M, \mathcal{F})$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. BERGER, *Sur les groupes d'holonomie des variétés riemanniennes et des variétés affines sans torsion*, Thèse, Paris, 1955.

[2] M. BERGER, *Groupes d'holonomie des variétés à connexion affine*, Séminaire Bourbaki, décembre 1954.

[3] D. BERNARD, *Sur la géométrie différentielle des G-structures*, Ann. Inst. Fourier, **10** (1960), pp. 151-270.

[4] V. GUILLEMIN, *The integrability problem for G-structures*, T.A.M.S., **116** (1965), pp. 544-560.
[5] TH. HANGAN, *Géométrie différentielle grassmannienne*, Rev. Roum. Math. pures et appl., **11**, no. 5 (1966).
[6] TH. HANGAN, *Tensor product tangent bundles*, Archiv der Math., **19** (1968).
[7] TH. HANGAN, *Pseudogrupul grassmannian*, Ann. St. Univ. « Al. l. Cuza » Yassi, **11** (1965), pp. 349-356.
[8] TH. HANGAN, *Analogies entre la géométrie différentielle de l'espace projectif et celle de la variété de Grassmann*, Convegno di Geometria Differenziale, Bologna, 1967.
[9] R. HERMANN, *Interdisciplinary Mathematics*, vol. **10**.
[10] T. ISHIHARA, *On tensor-product structures and Grassmanniann structurs*, J. Math. Tokushima Univ., **4** (1970), pp. 1-17.
[11] T. OCHIAI, *Geometry associated with semi-simple flat homogeneous spaces*, T.A.M.S., **152** (Nov. 1970).
[12] I. M. SINGER - S. STERNBERG, *On the infinite groups of Lie and Cartan*, J. d'Analyse Math., **15** (1965), pp. 1-114.
[13] N. TANAKA, *On the equivalence problem associated with a certain class of homogeneous spaces*, J. Math. Soc. Japan, **17**, no. 2 (1965).
[14] G. VRANCEANU, *Leçons de géométrie différentielle*, Ed. Acad. de la R.S. Roum., **1** (1957).